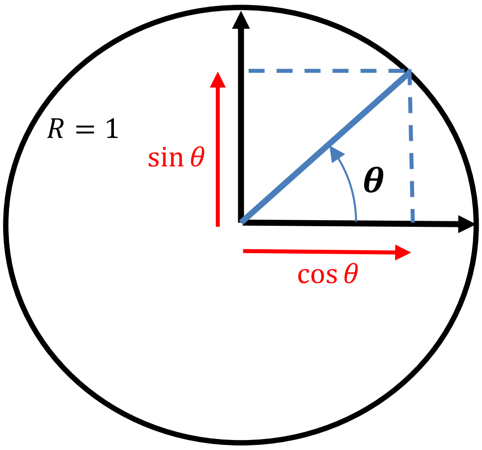
A. Cinématique

A.I. Outils mathématiques pour la mécanique

A.I.1 Trigonométrie

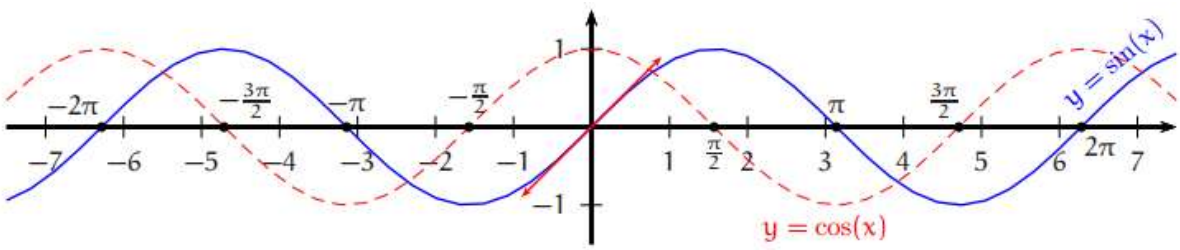
A.I.1.a Cercle trigonométrique

Il est nécessaire de maîtriser le sinus et le cosinus pour aborder la mécanique. Que ce soit pour des projections, des calculs de moments, produits scalaires et vectoriels, la trigonométrie intervient. La base consiste à maîtriser le cercle de rayon 1 et de savoir interpréter les valeurs de sinus et cosinus sur ce cercle pour un angle θ et ses dérivés $\left(\frac{\pi}{2}-\theta;\frac{\pi}{2}+\theta;\pi-\theta;\pi+\theta\right)$. Toutes ces relations trigonométriques se trouvent facilement sur le cercle.



Remarque : attention au sens de la flèche et au signe de θ qui peut être positif ou négatif. Pour plus de détails, se référer à la fiche « Rappels – Projections »

A.I.1.b Fonctions sinus et cosinus



A.I.1.c Valeurs usuelles et calculs

θ en degrés	0	30	45	60	90
θ en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Attention : faire attention lors du calcul d'un sinus ou cosinus avec une calculatrice. Il faut vérifier si votre calculatrice est en mode degrés ou radians. Pour cela, un simple calcul permet de le vérifier : cos(60)

- le résultat vaut 0,5, alors la calculatrice utilisée est en mode Degrés.
- le résultat vaut $-0{,}95$, l'erreur doit sauter aux yeux, cos(60) devant être positif, le mode radian est actif.

Pour changer un angle en degrés ou radians, on utilise la règle de 3 :

θ degrés → radians	θ radians → degrés
$180° \rightarrow \pi\, rd$ $\theta° \rightarrow \frac{\pi}{180}\theta$	$\pi\, rd \rightarrow 180°$ $\theta\, rd \rightarrow \frac{180}{\pi}\theta$

A.I.2 Repérage d'un point

A.I.2.a Base et repère

Une base $\mathcal{B}$ est la donnée de trois vecteurs $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (trièdre) de l'espace, unitaires (de norme 1), formant une famille libre ($\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$), tels que tout vecteur $\vec{u}$ puisse s'écrire sous la forme :

$$\vec{u} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}$$

Un repère $\mathcal{R}$ est la donnée d'un point O et d'une base $\mathcal{B}$, permettant de repérer tout point M de l'espace par rapport à O tel que :

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}$$

Une base ou un repère orthonormé a ses vecteurs deux à deux orthogonaux.

Une base directe est une base dont les vecteurs sont organisés afin de former un trièdre directe, représentable par les doigts de la main droite (pouce pour $\vec{x}$, index pour $\vec{y}$ puis majeur pour $\vec{z}$).

Dans la suite, toutes les bases seront orthonormées directes.

A.I.2.b Systèmes de coordonnées

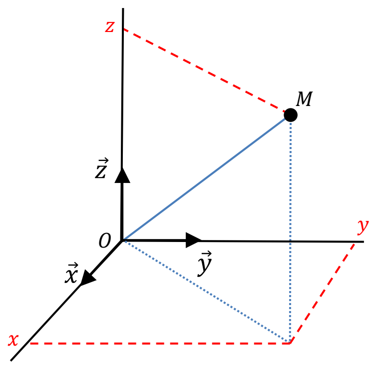
Pour repérer un point, on peut utiliser 3 systèmes de coordonnées. Chacun d'entre eux sera utilisé en fonction du cas traité et il est possible de passer de l'un à l'autre en transformant les coordonnées.

A.I.2.b.i Coordonnées cartésiennes

Le repère cartésien est de loin le plus utilisé.

Soit la base $\mathfrak{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Un point est repéré par ses 3 coordonnées cartésiennes (x,y,z) dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

On utilise aussi la notation verticale pour représenter les coordonnées d'un point dans le système cartésien :

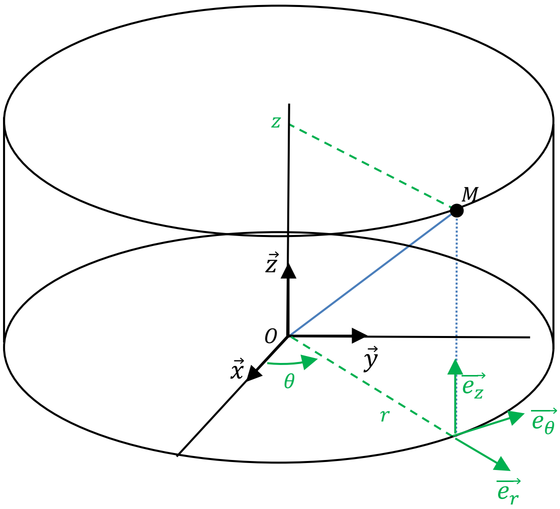
$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

ATTENTION : Cette notation est dépendante de la base $\mathfrak{B}$ dans laquelle est exprimé le vecteur.

A.I.2.b.ii Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont souvent utilisées lorsque le problème traité présente une symétrie de révolution autour d'un axe, avec lequel sera confondu l'un des vecteurs de la base.

Un point est repéré par ses 3 coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans le repère $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$



$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$

$\overrightarrow{e_r}$ est un vecteur qui dépend de θ.

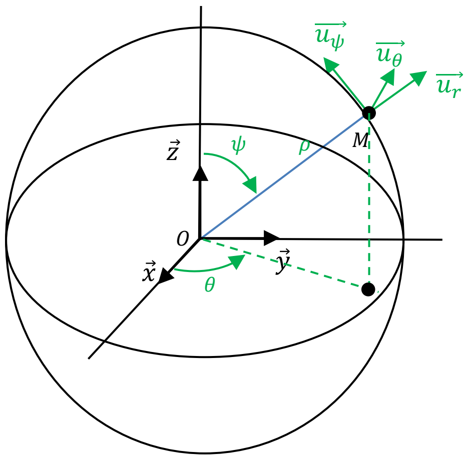
On peut passer du système cylindrique au système cartésien :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

A.I.2.b.iii Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont souvent utilisées lorsque le problème traité présente une forme sphérique.

Un point est repéré par ses 3 coordonnées sphériques (ρ, θ, ψ) dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\psi}\right)$



$$\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{u_r}$$

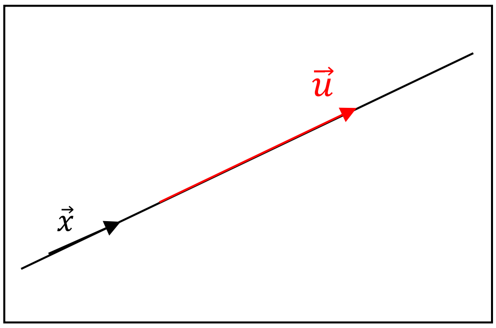
$\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\psi}$ sont des vecteurs qui dépendent de θ et ψ.

On peut passer du système sphérique aux autres systèmes :

Cartésien	Cylindrique
$\begin{cases} x = \rho \sin\psi \cos\theta \\ y = \rho \sin\psi \sin\theta \\ z = \rho \cos\psi \end{cases}$	$\begin{cases} r = \rho \sin\psi \\ \theta = \theta \\ z = \rho \cos\psi \end{cases}$

A.I.3 Vecteurs

A.I.3.a Définition



Un vecteur $\vec{u}$ est défini par :

- Une direction
- Un sens
- Une longueur (norme)

Un vecteur est indépendant du point d'origine.

A.I.3.b Expression

Soit une base $\mathfrak{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

A.I.3.b.i Notation vectorielle

Soit u_x, u_y, u_z les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathfrak{B}$.

On a :

$$\vec{u} = u_x\vec{x} + u_y\vec{y} + u_z\vec{z}$$

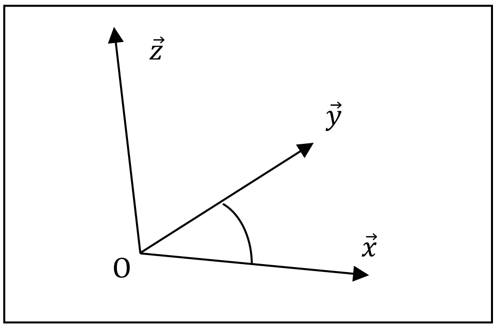
A.I.3.b.ii Notation verticale

En notation verticale, on peut écrire les composantes d'un vecteur verticalement dans une matrice à 3 lignes et 1 colonne.

ATTENTION : Cette notation est dépendante de la base dans laquelle est exprimé le vecteur.

On a ainsi l'expression des vecteurs de base :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad ; \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad ; \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$



On a donc :

$$\vec{u} = u_x\vec{x} + u_y\vec{y} + u_z\vec{z} = u_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} + u_y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} + u_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

Si la base n'est pas précisée, par principe, le résultat sera considéré faux.

A.I.3.c Norme

La norme du vecteur $\vec{u}$ s'écrit $\|\vec{u}\|$.

$$\vec{u} = \pm\|\vec{u}\|\vec{x} = u\vec{x}$$
$$\|\vec{u}\| = |u|$$

On associe souvent la lettre d'un vecteur pour représenter sa valeur algébrique. Attention aux notations. Ecrire u pour parler du vecteur $\vec{u}$ est une erreur courante. Il faut donc faire attention à l'objet que l'on manipule, un vecteur ou sa valeur algébrique.

On a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2 + {u_z}^2}$$

Une norme est un nombre réel positif.

A.I.3.d Opérations sur les vecteurs

A.I.3.d.i Somme

Soit le vecteur $\vec{u}$ obtenu par somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$$

Pour calculer $\vec{u}$:

- graphiquement, il faut mettre les vecteurs bout à bout.
- analytiquement, il suffit d'ajouter les composantes des vecteurs.

• **<u>Vecteurs colinéaires</u>**

Si $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires, $\vec{u}$ est de même direction.

Analytiquement, supposons que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont portés par $\vec{x}$:

$$\overrightarrow{u_1} = u_1\vec{x} \quad ; \quad u_1 \in \mathbb{R}$$

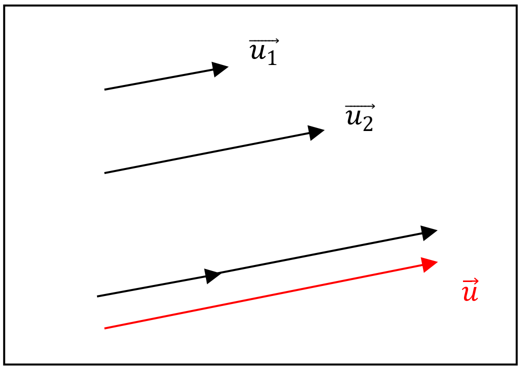
$$\overrightarrow{u_2} = u_2\vec{x} \quad ; \quad u_2 \in \mathbb{R}$$

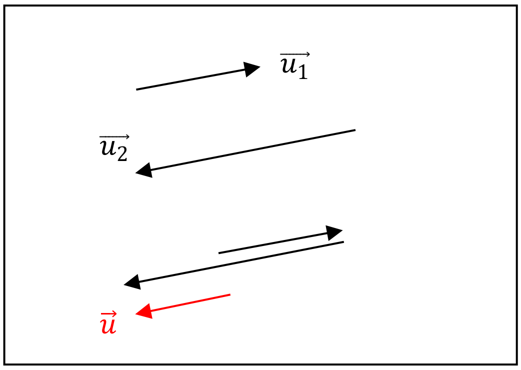
$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = u_1\vec{x} + u_2\vec{x} = (u_1 + u_2)\vec{x}$$

Le sens de $\vec{u}$ résulte du signe de $(u_1 + u_2)$ et du sens de $\vec{x}$.

Remarque : dans ce cas, on a l'égalité : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{u_1}\| + \|\overrightarrow{u_2}\|$

Graphiquement, la détermination de $\vec{u}$ est simple :





• <u>**Vecteurs non colinéaires**</u>

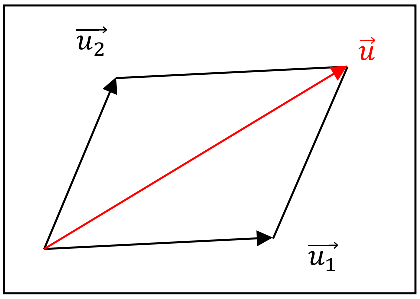
Analytiquement, supposons que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont portés par $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ respectivement :

$$\overrightarrow{u_1} = u_1\overrightarrow{x_1} \quad ; \quad u_1 \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{u_2} = u_2\overrightarrow{x_2} \quad ; \quad u_2 \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = u_1\overrightarrow{x_1} + u_2\overrightarrow{x_2}$$

Graphiquement, dans le cas de vecteurs non colinéaires, un parallélogramme permet de construire $\vec{u}$.



Remarque : dans ce cas, on a l'inégalité : $\|\vec{u}\| \leq \|\overrightarrow{u_1}\| + \|\overrightarrow{u_2}\|$

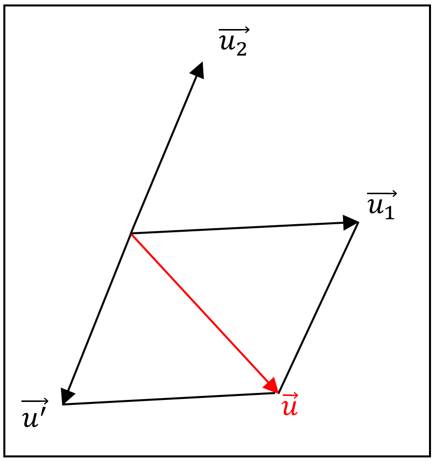
A.I.3.d.ii Soustraction

Soit le vecteur $\vec{u}$ obtenu par soustraction du vecteur $\overrightarrow{u_2}$ au vecteur $\overrightarrow{u_1}$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$$

Il faut se ramener à une somme de vecteurs. On introduit un vecteur $\overrightarrow{u'} = -\overrightarrow{u_2}$, de sens opposé à $\overrightarrow{u_2}$ de même direction et de même norme.

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u'}$$

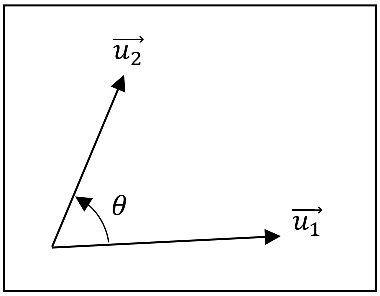


A.I.4 Produit scalaire et projections

1.1.4.a Produit scalaire

A.I.4.a.i Définition

Le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{u_1}$ avec le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ noté $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}$ est égal au produit des normes des 2 vecteurs multiplié par le cosinus de l'angle θ entre les deux directions, quel que soit le sens pris pour l'angle.



$\theta = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ angle orienté

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|cos\left(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}\right)$$

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = |u_1 u_2| \; cos(\theta)$$

Un produit scalaire est un nombre réel.
Remarque :

$$\text{si } \overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2} \Rightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0 \text{ car } cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vec{x}.\vec{x} = 1 \quad ; \quad \vec{y}.\vec{y} = 1 \quad ; \quad \vec{z}.\vec{z} = 1$$
$$\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.\vec{z} = \vec{y}.\vec{z} = 0$$

A.I.4.a.ii Calcul avec la définition

Soient deux vecteurs portés par des vecteurs unitaires :

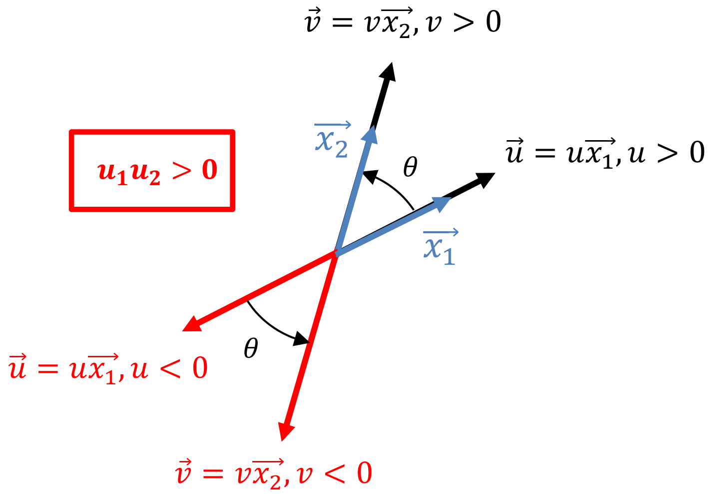
$$\overrightarrow{u_1} = u_1\overrightarrow{x_1} \quad ; \quad \overrightarrow{u_2} = u_2\overrightarrow{x_2} \quad ; \quad \left(\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}}\right) = \theta$$
$$\|\overrightarrow{x_1}\| = \|\overrightarrow{x_2}\| = 1$$

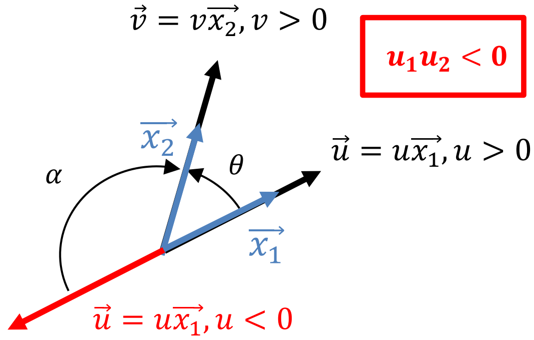
• **<u>Application à ne pas faire</u>**

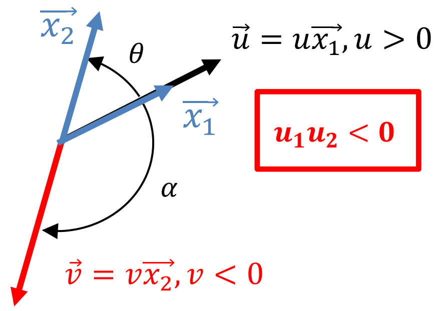
$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|cos(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = |u_1u_2|\,cos\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right)$$

Le problème de cette écriture est que l'angle $\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right)$ dépend des signes de u_1 et u_2 et qu'il ya une valeur absolue dont on se passerait bien.

Etudions les 3 situations suivantes :







$$si\ u_1u_2 > 0$$
$$|u_1u_2| = u_1u_2$$
$$\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = \theta$$
$$cos\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = cos(\theta)$$

$$si\ u_1u_2 < 0$$
$$|u_1u_2| = -u_1u_2$$
$$\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = \alpha = \theta - \pi$$
$$cos\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = cos(\theta - \pi) = -cos(\theta)$$

Ce qui induit dans tous les cas que :

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = |u_1u_2|\,cos\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = u_1u_2cos\theta$$

• **<u>Application à réaliser</u>**

Pour appliquer cette formule, on passera toujours par le produit scalaire de vecteurs unitaires :

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = u_1\overrightarrow{x_1}.u_2\overrightarrow{x_2} = u_1u_2\overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{x_2} = u_1u_2\|\overrightarrow{x_1}\|\|\overrightarrow{x_2}\|cos\left(\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}}\right) = u_1u_2\,cos\left(\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}}\right)$$

Ainsi, il n'y a ni valeurs absolues, ni discussion sur l'angle : $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = u_1u_2\,cos(\theta)$

A.I.4.a.iii Calcul avec composantes

Soit une base $\mathfrak{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Posons :

$$\overrightarrow{u_1} = x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad ; \quad \overrightarrow{u_2} = x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

• **<u>Notation vectorielle</u>**

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = (x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z}).(x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

• **<u>Notation verticale</u>**

S'ils sont exprimés dans la même base :

$$\boxed{\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} . \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

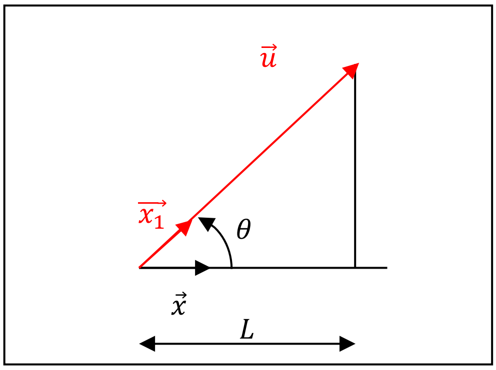
On fait la somme des produits ligne par ligne :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \begin{matrix} x \\ x \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

1.1.4.b Projection orthogonale

Si l'un des deux vecteurs est de norme 1, par exemple le vecteur de base $\vec{x}$, alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{x}$ est la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{x}$.

$$\vec{u} = u\overrightarrow{x_1}$$



$$\|\vec{u}.\vec{x}\| = L = \|\vec{u}\|\|\vec{x}\||\cos\theta| = |u\cos\theta|$$

Démonstration :

$$\vec{u}.\vec{x} = u\cos\theta$$

$$\vec{u}.\vec{x} = \begin{bmatrix}u\\0\\0\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} . \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix}u\cos\theta\\u\sin\theta\\0\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} . \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = u\cos\theta$$

$$L = |u\cos\theta|$$

1.1.4.c Changement de base

En mécanique, la projection d'un vecteur dans une base est un élément essentiel qui, s'il n'est pas maîtrisé, ne permet pas d'obtenir de résultats justes. Il faut donc parfaitement maîtriser les projections, en particulier leur signe.

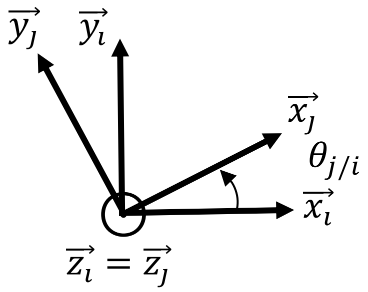
A.I.4.c.i Contexte

Soit $\mathfrak{B}_i$ une base $(\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$, $\mathfrak{B}_j$ une base $(\overrightarrow{x_j}, \overrightarrow{y_j}, \overrightarrow{z_j})$ en rotation autour de leur même vecteur $\overrightarrow{z_i} = \overrightarrow{z_j}$ et l'angle $\theta_{j/i}$ orientant la base j par rapport à la base i. $\theta_{j/i}$ est l'angle qui par de $\overrightarrow{x_i}$ et qui va vers $\overrightarrow{x_j}$.

Tout autre cas devra être traité à partir de la bonne compréhension de ce paragraphe.

1.1.4.c.ii Formules de projection

Le sens de l'angle orienté est primordial.



$$\theta = (\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{x_j}) = (\overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{y_j})$$

angle orienté

On a :

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{x_j} &= \cos\theta_{j/i}\,\overrightarrow{x_i} + \sin\theta_{j/i}\,\overrightarrow{y_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{j/i} \\ \sin\theta_{j/i} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_i} \\ \overrightarrow{y_j} &= -\sin\theta_{j/i}\,\overrightarrow{x_i} + \cos\theta_{j/i}\,\overrightarrow{y_i} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_{j/i} \\ \cos\theta_{j/i} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_i} \end{aligned}}$$

Ou encore :

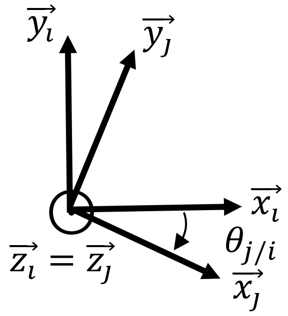
$$\overrightarrow{x_j} = (\overrightarrow{x_j}.\overrightarrow{x_i})\overrightarrow{x_i} + (\overrightarrow{x_j}.\overrightarrow{y_i})\overrightarrow{y_i}$$

$$\overrightarrow{y_j} = (\overrightarrow{y_j}.\overrightarrow{x_i})\overrightarrow{x_i} + (\overrightarrow{y_j}.\overrightarrow{y_i})\overrightarrow{y_i}$$

Avec

$$\overrightarrow{x_j}.\overrightarrow{x_i} = \cos\theta_{j/i} \quad - \quad \overrightarrow{x_j}.\overrightarrow{y_i} = \sin\theta_{j/i} \quad - \quad \overrightarrow{y_j}.\overrightarrow{x_i} = -\sin\theta_{j/i} \quad - \quad \overrightarrow{y_j}.\overrightarrow{y_i} = \cos\theta_{j/i}$$

1.1.4.c.iii Cas d'une orientation négative



$$\vec{x_j} = \cos\theta_{j/i}\,\vec{x_i} + \sin\theta_{j/i}\,\vec{y_i}$$

$$\vec{y_j} = -\sin\theta_{j/i}\,\vec{x_i} + \cos\theta_{j/i}\,\vec{y_i}$$

Il est très important de bien retenir ce résultat. Dans le cas d'une orientation négative, l'angle $\theta_{j/i}$ a une valeur négative qui induit que $sin\theta_{j/i}$ est négatif.

Prenons l'exemple où $\theta_{j/i} = -\frac{\pi}{4}$

$$\vec{x_j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{x_i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{y_i}$$

$$\vec{y_j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{x_i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{y_i}$$

1.1.4.c.iv Conclusion

Les fonctions sinus et cosinus contiennent les changements de signes. Le fait de représenter des bases dans une autre position que celle où l'angle orienté est positif inférieur à 90° induit des projections fausses à cause de problèmes de signe.

Pour plus de » détails sur les signes et les erreurs à ne pas faire avec les projections, se référer à la fiche **« Rappels – Projections »**.

Quelques conseils :

- quelle que soit la position d'un mécanisme, toujours représenter une base à projeter positivement par rapport à la base de référence, avec un angle inférieur à 90°, et appliquer les formules ci-dessus par cœur
- on peut toujours lire les coordonnées d'une projection si l'angle est en sens direct et inférieur à 90°
- ne jamais projeter des vecteurs si ce n'est pas explicitement demandé ou nécessaire. Un résultat exprimé en fonction de vecteurs de différentes bases reste juste. Exemple : $\vec{V} = V\vec{x_3}$

A.I.5 Produit vectoriel

A.I.5.a Données

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs exprimés dans la base $\mathcal{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ ainsi :

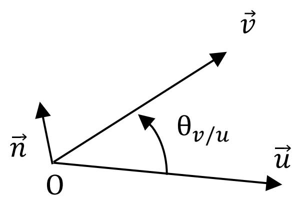
$$\vec{u} = u_x\vec{x} + u_y\vec{y} + u_z\vec{z}$$

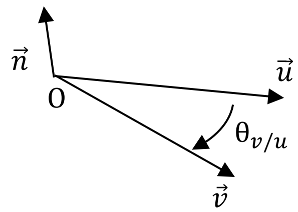
$$\vec{v} = v_x\vec{x} + v_y\vec{y} + v_z\vec{z}$$

Soit le plan $\mathcal{P}$ contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et une droite Δ orthogonale à $\mathcal{P}$. Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire ($\|\vec{n}\| = 1$) de Δ. Soit $\theta_{v/u}$ l'angle orienté allant de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ tel que la direction de $\vec{v}$ est obtenue par rotation de la direction de $\vec{u}$ autour du vecteur $\vec{n}$ de l'angle $\theta_{v/u}$:

$$\theta_{v/u} = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

$\vec{n}$ est tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ forme un trièdre direct si $\theta_{v/u}$ était positif inférieur à 90°.

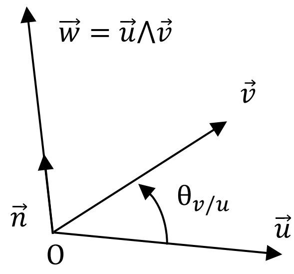




Que l'on soit dans le cas de gauche où $\theta_{v/u} \in [0;\pi]$ ou dans le cas de droite où $\theta_{v/u} \in [0;-\pi]$, il faut construire $\vec{n}$ tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ soit un trièdre direct lorsque $\theta_{v/u} \in [0;\pi]$ (c'est-à-dire ne pas créer $\vec{n}$ à l'aide de la règle de la main droite).

Remarque : Le sens du produit vectoriel selon $\vec{n}$ sera défini en fonction du sinus de l'angle, négatif dans le cas où $\theta_{v/u} \in [0;-\pi]$.

A.I.5.b Définition



Soit $\vec{w}$ le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\,\vec{n}$$

Un produit vectoriel est un vecteur, dont la direction est orthogonale à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, et dont la norme vaut :

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\left|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right|$$

Le sens de $\vec{w}$, c'est-à-dire le signe selon $\vec{n}$ du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est simplement obtenu à l'aide des 3 doigts de la main droite :

En formant un trièdre direct avec la main droite, on place le pouce dans le sens du premier vecteur, l'index dans le sens du second, le majeur donne alors le sens du résultat du produit vectoriel du premier vecteur avec le second.

Attention toutefois : Cette règle donne le signe de $\vec{w}$ selon $\vec{n}$, c'est-à-dire le signe de $\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. En aucun cas il ne faut ajouter un moins sur la formule :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\,\vec{n}$$

NON

A.I.5.c Propriétés

A.I.5.c.i Vecteurs colinéaires

$$\vec{u}//\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$$

A.I.5.c.ii Signe

$$\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}$$

Démonstration :

$$\vec{v}\wedge\vec{u} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$$

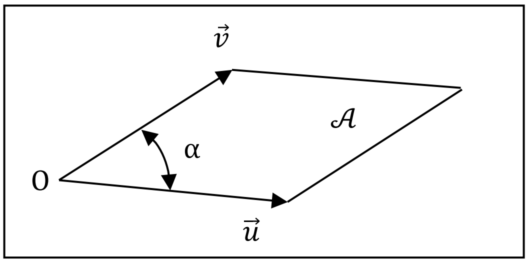
$$\vec{v}\wedge\vec{u} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin\left[(\widehat{\vec{v},\vec{u}})\right] = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin\left[-(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right] = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -\vec{u}\wedge\vec{v}$$

A.I.5.c.iii Multiplication par un réel

$$\forall k \in \mathbb{R}, k\vec{v}\wedge\vec{u} = \vec{v}\wedge k\vec{u}$$

A.I.5.c.iv Norme

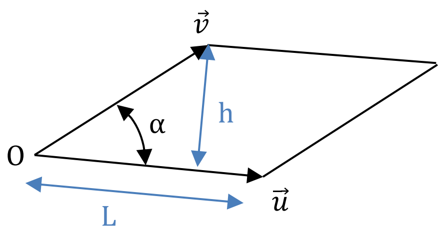
La norme du produit vectoriel correspond à l'aire du parallélogramme de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$



$$\mathcal{A} = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$

Démonstration :

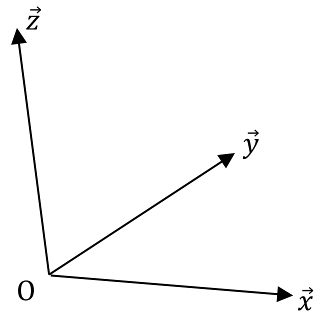
$$\mathcal{A} = \text{Base.Hauteur} = \text{LH} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\||\sin\alpha| = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$



$$h = \|\vec{v}\||\sin\alpha|$$

A.I.5.d Produit vectoriel des vecteurs de base

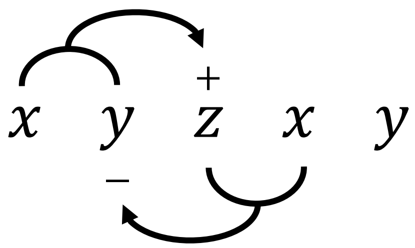
Soit une base orthonormée $\mathfrak{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.



$$\vec{x}\wedge\vec{y} = \vec{z} \; : \; \vec{y}\wedge\vec{z} = \vec{x} \; : \; \vec{z}\wedge\vec{x} = \vec{y} \; : \; \vec{y}\wedge\vec{x} = -\vec{z} \; : \; \vec{z}\wedge\vec{y} = -\vec{x} \; : \; \vec{x}\wedge\vec{z} = -\vec{y}$$

Conseil : Utiliser la règle de la main droite afin de s'assurer du signe.

Une méthode simple pour retenir ces résultats est la suivante :



Alors :

- Lorsque que l'on prend deux lettres successives de gauche à droite, le résultat est la suivante (à droite) associée d'un signe plus
- Lorsque que l'on prend deux lettres successives de droite à gauche, le résultat est la précédente (à gauche) associée d'un signe moins

Autrement dit :

- Si deux vecteurs se suivent dans le repère direct, le produit vectoriel est porté positivement par le 3° vecteur de la base.
- Si deux vecteurs ne se suivent pas dans le repère direct, le produit vectoriel est porté négativement par le 3° vecteur de la base.

Remarque :

$$\boxed{\text{Pour 2 des 3 vecteurs d'une base (orthogonaux), le sinus disparaît !}}$$

A.I.5.e Calcul de produits vectoriels

A.I.5.e.i Calcul avec la définition

Soient deux vecteurs portés par des vecteurs unitaires :

$$\overrightarrow{u_1} = u_1\overrightarrow{x_1} \quad ; \quad \overrightarrow{u_2} = u_2\overrightarrow{x_2} \quad ; \quad \left(\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}}\right) = \theta$$
$$\|\overrightarrow{x_1}\| = \|\overrightarrow{x_2}\| = 1$$

Soit $\overrightarrow{n_{12}}$ le vecteur directement orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. $\overrightarrow{n_{12}}$ est tel que $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{n_{12}})$ forme un trièdre direct si θ était positif inférieur à 90°.

- **Application à ne pas faire**

$$\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2} = \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|sin(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})\overrightarrow{n_{12}} = \boldsymbol{|u_1u_2|\ sin\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right)}\overrightarrow{n_{12}}$$

Comme vu pour le produit scalaire (cf illustrations associées), le problème de cette écriture est que l'angle $\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right)$ dépend des signes de u_1 et u_2 et qu'il ya une valeur absolue dont on se passerait bien.

$si\ u_1u_2 > 0$	$si\ u_1u_2 < 0$
$\|u_1u_2\| = u_1u_2$	$\|u_1u_2\| = -u_1u_2$
$\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = \theta$	$\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = \alpha = \theta - \pi$
$sin\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = sin(\theta)$	$sin\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = sin(\theta-\pi) = -sin(\theta)$

Ce qui induit dans tous les cas que :

$$\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2} = |u_1u_2|\ sin\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right)\overrightarrow{n_{12}} = u_1u_2sin(\theta)\overrightarrow{n_{12}}$$

- **Application à réaliser**

Pour appliquer cette formule, on passera toujours par le produit vectoriel de vecteurs unitaires :

$$\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2} = u_1\overrightarrow{x_1}\wedge u_2\overrightarrow{x_2} = u_1u_2(\overrightarrow{x_1}\wedge\overrightarrow{x_2}) = u_1u_2\|\overrightarrow{x_1}\|\|\overrightarrow{x_2}\|\ sin\left(\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}}\right)\overrightarrow{n_{12}} = u_1u_2\ \boldsymbol{sin\left(\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}}\right)}\overrightarrow{n_{12}}$$

Ainsi, il n'y a ni valeurs absolues, ni discussion sur l'angle :

$$\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2} = u_1u_2\ sin(\theta)\overrightarrow{n_{12}}$$

A.I.5.e.ii Calcul avec composantes

Soit une base $\mathfrak{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Posons :

$$\overrightarrow{u_1} = x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad ; \quad \overrightarrow{u_2} = x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

• **Notation vectorielle**

Déterminons dans un premier temps ce produit vectoriel par le calcul vectoriel :

$$\overrightarrow{u_1}\Lambda\overrightarrow{u_2} = (x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z})\Lambda(x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z})$$

$$\overrightarrow{u_1}\Lambda\overrightarrow{u_2} = x_1\vec{x}\Lambda x_2\vec{x} + x_1\vec{x}\Lambda y_2\vec{y} + x_1\vec{x}\Lambda z_2\vec{z} + y_1\vec{y}\Lambda x_2\vec{x} + y_1\vec{y}\Lambda y_2\vec{y} + y_1\vec{y}\Lambda z_2\vec{z} + z_1\vec{z}\Lambda x_2\vec{x} + z_1\vec{z}\Lambda y_2\vec{y} + z_1\vec{z}\Lambda z_2\vec{z}$$

$$\overrightarrow{u_1}\Lambda\overrightarrow{u_2} = x_1\vec{x}\Lambda y_2\vec{y} + x_1\vec{x}\Lambda z_2\vec{z} + y_1\vec{y}\Lambda x_2\vec{x} + y_1\vec{y}\Lambda z_2\vec{z} + z_1\vec{z}\Lambda x_2\vec{x} + z_1\vec{z}\Lambda y_2\vec{y}$$

$$\overrightarrow{u_1}\Lambda\overrightarrow{u_2} = x_1y_2\vec{z} - x_1z_2\vec{y} - y_1x_2\vec{z} + y_1z_2\vec{x} + z_1x_2\vec{y} - z_1y_2\vec{x}$$

$$\overrightarrow{u_1}\Lambda\overrightarrow{u_2} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{x} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{y} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{z}$$

On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{u_1}\Lambda\overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \Lambda \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}}$$

- **Notation verticale**

Les méthodes présentées ci-dessous ne sont valables que si les vecteurs sont exprimés dans la même base :

- **Méthode 1**

On ne reporte pas la première ligne en 4° ligne. Un moins apparaît sur le second terme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

- **Méthode 2**

On reporte la première ligne en 4° ligne : Pas de moins sur le second terme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

A.I.6 Dérivation temporelle de scalaires et vecteurs dans une base

Jusqu'à présent, vous ne connaissiez la dérivée que d'une fonction scalaire sans parler de base fixe ou mobile.

Exemple :

$$f : x \to f(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \cdots$$

En mécanique, nous allons dériver des fonctions scalaires et des vecteurs, et ce relativement à des bases associées à des solides qui vont changer d'orientation dans le temps, du fait des mouvements des différents solides d'un mécanisme les uns par rapport aux autres.

A.I.6.a Dérivation temporelle par rapport à une base

Introduisons donc une nouvelle notation, la dérivée temporelle par rapport à une base $\mathfrak{B}$ d'une fonction f, qui pour le moment est quelconque (scalaire, vecteur…)

$$\left.\frac{df}{dt}\right)_{\mathfrak{B}}$$

Cette écriture se lit ainsi : dérivée de la fonction f par rapport au temps dans/par rapport à la base $\mathfrak{B}$.

Lorsque la base est associée à un nombre, par exemple $\mathfrak{B}_i$, on notera :

$$\left.\frac{df}{dt}\right)_{\mathrm{i}}$$

A.I.6.b Dérivation temporelle d'un scalaire dans une base

Lorsque l'on dérive une fonction scalaire (un nombre), la dérivation par rapport à une base n'a pas d'importance :

$$\forall \mathfrak{B}_i\,, \left.\frac{df(t)}{dt}\right)_i = \frac{df(t)}{dt} = f'(t)$$

L'évolution d'une fonction scalaire est indépendante de la base de dérivation choisie.

A.I.6.c Dérivation temporelle d'un vecteur dans une base

A.I.6.c.i Contexte

Un vecteur $\vec{v}$ est exprimé dans une base $\mathfrak{B}_j$ en fonction de ses 3 vecteurs unitaires $\left(\overrightarrow{x_j}, \overrightarrow{y_j}, \overrightarrow{z_j}\right)$:

$$\vec{v} = v_x\overrightarrow{x_j} + v_y\overrightarrow{y_j} + v_z\overrightarrow{z_j}$$

Supposons l'existence d'une autre base $\mathfrak{B}_i(\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$ telle qu'il existe un mouvement entre ces deux bases. Ce mouvement est soit une translation, soit une rotation autour d'un point qui peut bouger avec le temps.

A.I.6.c.ii Dérivation

Dérivons le vecteur $\vec{v}$ dans la base $\mathfrak{B}_i$:

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\left(v_x\overrightarrow{x_j} + v_y\overrightarrow{y_j} + v_z\overrightarrow{z_j}\right)}{dt}\right)_i$$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \left.\frac{dv_x\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_i + \left.\frac{dv_y\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_i + \left.\frac{dv_z\overrightarrow{z_j}}{dt}\right)_i$$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = v_x\left.\frac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_i + \left.\frac{dv_x}{dt}\right)_i\overrightarrow{x_j} + v_y\left.\frac{d\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_i + \left.\frac{dv_y}{dt}\right)_i\overrightarrow{y_j} + v_z\left.\frac{d\overrightarrow{z_j}}{dt}\right)_i + \left.\frac{dv_z}{dt}\right)_i\overrightarrow{z_j}$$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \underbrace{\left[\left.\frac{dv_x}{dt}\right)_i\overrightarrow{x_j} + \left.\frac{dv_y}{dt}\right)_i\overrightarrow{y_j} + \left.\frac{dv_z}{dt}\right)_i\overrightarrow{z_j}\right]}_{A} + \underbrace{\left[v_x\left.\frac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_i + v_y\left.\frac{d\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_i + v_z\left.\frac{d\overrightarrow{z_j}}{dt}\right)_i\right]}_{B}$$

• **<u>Variation du vecteur dans sa base</u>**

Travaillons dans un premier temps sur le premier terme A ci-dessus :

$$A = \left.\frac{dv_x}{dt}\right)_i\overrightarrow{x_j} + \left.\frac{dv_y}{dt}\right)_i\overrightarrow{y_j} + \left.\frac{dv_z}{dt}\right)_i\overrightarrow{z_j}$$

$$\forall(i,j) \in \mathbb{N}, \left.\frac{dv_x}{dt}\right)_i = \left.\frac{dv_x}{dt}\right)_j \ car\ v_x\ scalaire$$

$$\forall(i,j) \in \mathbb{N}, \left.\frac{dv_y}{dt}\right)_i = \left.\frac{dv_y}{dt}\right)_j \ car\ v_y\ scalaire$$

$$\forall(i,j) \in \mathbb{N}, \left.\frac{dv_z}{dt}\right)_i = \left.\frac{dv_z}{dt}\right)_j \ car\ v_z\ scalaire$$

Donc :

$$A = \left.\frac{dv_x}{dt}\right)_{\mathrm{j}} \overrightarrow{x_j} + \left.\frac{dv_y}{dt}\right)_{\mathrm{j}} \overrightarrow{y_j} + \left.\frac{dv_z}{dt}\right)_{\mathrm{j}} \overrightarrow{z_j}$$

$$\left.\frac{dv_x}{dt}\right)_j \overrightarrow{x_j} = \left.\frac{dv_x\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_j \quad car\ \overrightarrow{x_j}\ constant\ dans\ \mathfrak{B}_j$$

$$\left.\frac{dv_y}{dt}\right)_j \overrightarrow{y_j} = \left.\frac{dv_y\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_j \quad car\ \overrightarrow{y_j}\ constant\ dans\ \mathfrak{B}_j$$

$$\left.\frac{dv_z}{dt}\right)_j \overrightarrow{z_j} = \left.\frac{dv_z\overrightarrow{z_j}}{dt}\right)_j \quad car\ \overrightarrow{z_j}\ constant\ dans\ \mathfrak{B}_j$$

$$A = \left.\frac{dv_x\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_j + \left.\frac{dv_y\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_j + \left.\frac{dv_z\overrightarrow{z_j}}{dt}\right)_j$$

$$A = \left.\frac{d\left(v_x\overrightarrow{x_j} + v_y\overrightarrow{y_j} + v_z\overrightarrow{z_j}\right)}{dt}\right)_j$$

$$A = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_j$$

A correspond à la variation du vecteur $\vec{v}$ dans la base $\mathfrak{B}_j$

• <u>Evolution des vecteurs de base</u>

Travaillons dans un second temps sur le second terme B :

$$B = v_x \left.\frac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_{\mathrm{i}} + v_y \left.\frac{d\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_{\mathrm{i}} + v_z \left.\frac{d\overrightarrow{z_j}}{dt}\right)_{\mathrm{i}}$$

Ce terme fait apparaitre des dérivées de vecteurs de la base $\mathfrak{B}_j$ dans la base $\mathfrak{B}_i$.

En mathématiques, on montre qu'il existe un unique vecteur $\overrightarrow{\Omega_{j/i}}$ tel que :

$$\begin{cases} \left.\frac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_{\mathrm{i}} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{x_j} \\ \left.\frac{d\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_{\mathrm{i}} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{y_j} \\ \left.\frac{d\overrightarrow{z_j}}{dt}\right)_{\mathrm{i}} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{z_j} \end{cases}$$

$\overrightarrow{\Omega_{j/i}}$ est appelé vecteur rotation de la base $\mathfrak{B}_j$ par rapport à $\mathfrak{B}_i$. Ce vecteur est

- Nul si les bases $\mathfrak{B}_i$ et $\mathfrak{B}_j$ sont en translation l'une par rapport à l'autre

- Non nul s'il existe un mouvement de rotation entre les bases $\mathfrak{B}_i$ et $\mathfrak{B}_j$. Sa direction est alors confondue avec l'axe de rotation et sa norme est égale à la vitesse de rotation $\Omega_{j/i} = \dot{\theta}_{j/i}$ des deux bases en rd/s. Ce vecteur sera revu plus en détails dans la suite (cinématique du solide).

On a donc :

$$B = v_x \left.\frac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_i + v_y \left.\frac{d\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_i + v_z \left.\frac{d\overrightarrow{z_j}}{dt}\right)_i$$

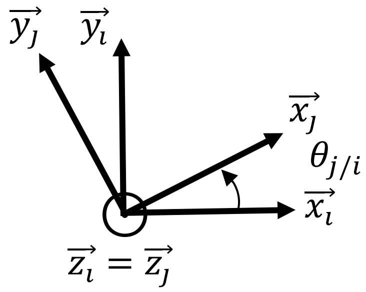
$$B = v_x \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{x_j} + v_y \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{y_j} + v_z \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{z_j}$$

$$B = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda v_x \overrightarrow{x_j} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda v_y \overrightarrow{y_j} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda v_z \overrightarrow{z_j}$$

$$B = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \left(v_x \overrightarrow{x_j} + v_y \overrightarrow{y_j} + v_z \overrightarrow{z_j} \right)$$

$$B = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \vec{v}$$

On peut illustrer ce résultat dans le cas particulier suivant :



$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\left(\cos\theta_{ji}\,\overrightarrow{x_i} + \sin\theta_{ji}\,\overrightarrow{y_i}\right)}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\cos\theta_{ji}}{dt}\right)_i \overrightarrow{x_i} + \left.\frac{d\sin\theta_{ji}}{dt}\right)_i \overrightarrow{y_i} = -\dot{\theta}_{ji}\sin\theta_{ji}\,\overrightarrow{x_i} + \dot{\theta}_{ji}\cos\theta_{ji}\,\overrightarrow{y_i}$$

$$= \dot{\theta}_{ji}\left(-\sin\theta_{ji}\,\overrightarrow{x_i} + \cos\theta_{ji}\right) = \dot{\theta}_{ji}\overrightarrow{y_j} = \dot{\theta}_{ji}\overrightarrow{z_j}\Lambda\overrightarrow{x_j} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{x_j}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\left(-\sin\theta_{ji}\,\overrightarrow{x_i} + \cos\theta_{ji}\,\overrightarrow{y_i}\right)}{dt}\right)_i = -\left.\frac{d\sin\theta_{ji}}{dt}\right)_i \overrightarrow{x_i} + \left.\frac{d\cos\theta_{ji}}{dt}\right)_i \overrightarrow{y_i}$$

$$= -\dot{\theta}_{ji}\sin\theta_{ji}\,\overrightarrow{x_i} - \dot{\theta}_{ji}\cos\theta_{ji}\,\overrightarrow{y_i} = -\dot{\theta}_{ji}\overrightarrow{x_j} = \dot{\theta}_{ji}\overrightarrow{z_j}\Lambda\overrightarrow{y_j} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{y_j}$$

• **Conclusion**

Soient deux bases $\mathfrak{B}_i(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{y_i},\overrightarrow{z_i})$ et $\mathfrak{B}_j(\overrightarrow{x_j},\overrightarrow{y_j},\overrightarrow{z_j})$ et un vecteur $\vec{v}$

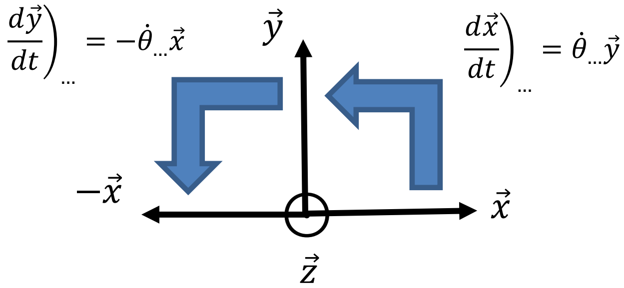
$$\boxed{\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i=\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_j+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{v}}$$

Formule de Bour

Avec $\overrightarrow{\Omega_{j/i}}$ vecteur rotation de la base $\mathfrak{B}_j$ par rapport à $\mathfrak{B}_i$

Si $\vec{v}$ est constant dans la base j, alors $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_j=\vec{0}$ et $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i=\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{v}$

Il existe un moyen simple de prévoir la dérivée d'un vecteur x ou y lorsque la rotation est suivant z :



Remarques :

- En général, on cherche à changer de base de dérivation afin d'obtenir $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_j=\vec{0}$, par exemple dans le cas des vecteurs de base :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_i=\left.\frac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_j+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{x_j}=\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{x_j}$$

- Ne pas garder de produit vectoriel lors de l'utilisation de cette formule. Il faut le calculer
- Ne pas appliquer de formule de changement de base de dérivation à un vecteur écrit avec des lettres type $\overrightarrow{AB}$ car on ne sait quelle base choisir ! $\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_i=\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_?+\cdots$. Exprimer $\overrightarrow{AB}=L\overrightarrow{x_k}$ en exploitant les données géométriques puis appliquer le changement de base