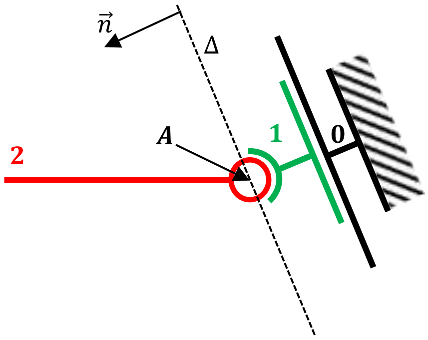
A.VI. Liaisons équivalentes

Nous nous limiterons ici à la détermination de liaisons équivalentes par la méthode **cinématique**. Nous verrons plus tard qu'une démarche semblable s'applique avec une méthode statique.

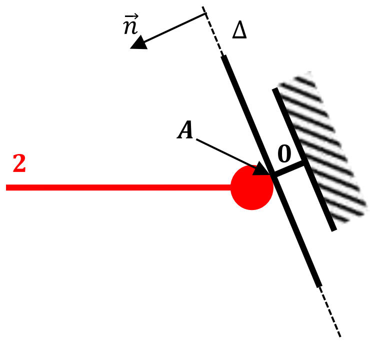
A.VI.1 Présentation

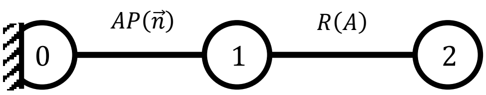
A.VI.1.a Exemples : série –parallèle

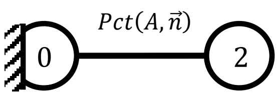
Plusieurs liaisons en série définissent une liaison équivalente qui peut être usuelle ou non (et toujours isostatique)



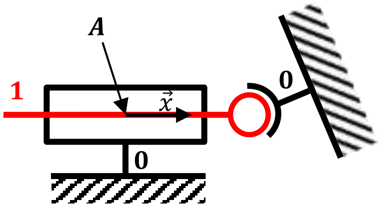
$\Leftrightarrow$



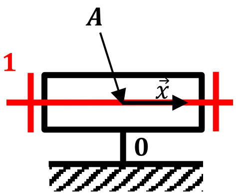


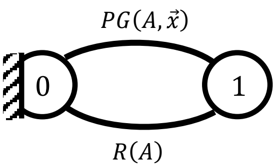


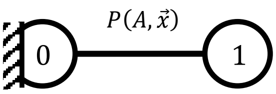
Plusieurs liaisons en parallèle définissent une liaison équivalente qui peut être usuelle ou non (dont la solution non simplifiée peut être est isostatique ou hyperstatique - notion abordée en 2° année) :



$\Leftrightarrow$







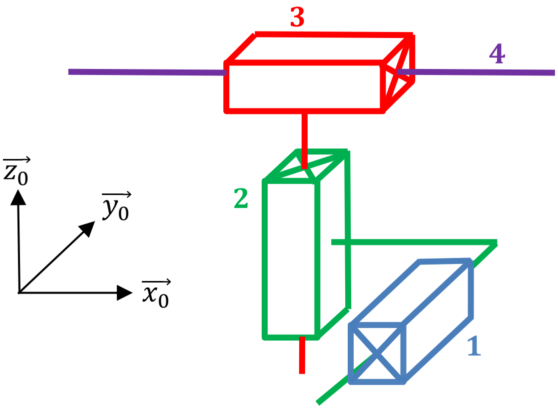
A.VI.1.b Objectifs

Obtenir une liaison équivalente dans un système complexe permet de le simplifier. En effet, lorsque l'on détermine une liaison équivalente à plusieurs liaisons, le nombre de liaisons du système en est d'autant réduit.

Lorsque l'on détermine une liaison équivalente, on détermine concrètement le torseur équivalent à l'ensemble des torseurs des liaisons considérées en utilisant l'une des deux méthodes disponibles, adaptées aux assemblages de liaisons en série ou en parallèle.

La liaison équivalente obtenue n'est pas obligatoirement une liaison normalisée. En effet, le torseur obtenu peut être :

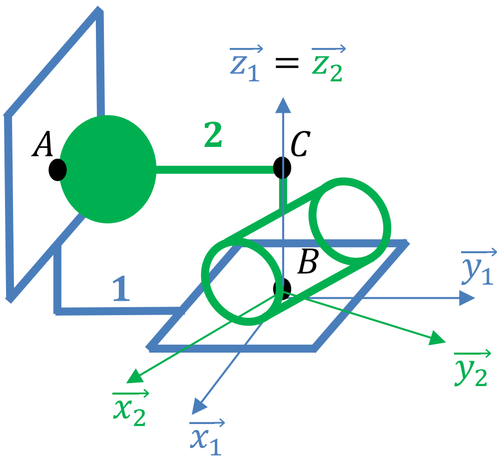
- Un torseur qui présente une forme non usuelle avec des inconnues indépendantes



$$\{\mathcal{V}_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{4/3} \\ 0 & V_{2/1} \\ 0 & W_{3/2} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{4/1} \\ 0 & V_{4/1} \\ 0 & W_{4/1} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

$$3DDL - \ 3\ inconnues\ indépendantes$$

- Un torseur présentant ou non une forme usuelle mais avec des inconnues **dépendantes**



$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P_{2/1}} & U_{2/1} \\ \boldsymbol{\tan\theta_{2/1}\, P_{2/1}} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$$

$$Q_{2/1} = \tan\theta_{2/1}\, P_{2/1}$$

$$= \begin{Bmatrix} P'_{2/1} & U'_{2/1} \\ 0 & V'_{2/1} \\ R'_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2} = \begin{Bmatrix} \dfrac{P_{2/1}}{\cos\theta_{2/1}} & \boldsymbol{U'_{2/1}} \\ 0 & \boldsymbol{U'_{2/1}\tan\theta_{2/1}} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2}$$

$$V'_{2/1} = U'_{2/1}\tan\theta_{2/1}$$

- Un mélange des 2 solutions précédentes

La difficulté lors de la détermination de liaisons équivalentes sera de bien choisir le point d'expression du torseur équivalent et sa base afin d'obtenir ce que l'on appelle la forme canonique du torseur dans le but de le reconnaître si c'est une liaison usuelle, ou d'exprimer au plus simple ses DDL dans le cas d'une liaison non usuelle.

A.VI.2 Préliminaires

A.VI.2.a.i Dépendance entre inconnues

La résolution de liaisons équivalentes conduit à trouver un torseur équivalent du type :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} P_{eq} & U_{eq} \\ Q_{eq} & V_{eq} \\ R_{eq} & W_{eq} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

Il est alors nécessaire de savoir si P_{eq}, Q_{eq}, R_{eq}, U_{eq}, V_{eq} et W_{eq} sont indépendants. Autrement dit, si $(P_{eq}, Q_{eq}, R_{eq}, U_{eq}, V_{eq}, W_{eq})$ forme une famille libre, ou encore ci chacune des variables ne peut pas être exprimée comme combinaison linéaire des autres.

Ces variables dépendent des différentes inconnues des liaisons formant la liaison équivalente. Chacune de ces inconnues est une variable pouvant indépendamment des autres prendre n'importe quelle valeur. Il suffit donc de vérifier que les variables équivalentes en font de même.

Autrement dit : Est-il possible que chaque variable équivalente (case du torseur équivalent) prenne toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$ lorsque les autres sont nulles ?

• **<u>Liaisons en série</u>**

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} P_{eq} & U_{eq} \\ Q_{eq} & V_{eq} \\ R_{eq} & W_{eq} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} P_{10} & 0 \\ Q_{21} & V_{32}\cos\theta \\ 0 & V_{32}\sin\theta \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

On remarque que :

$$R_{eq} = U_{eq} = 0 \quad ; \quad \frac{W_{eq}}{V_{eq}} = \tan\theta$$

Soit :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} P_{eq} & 0 \\ Q_{eq} & V_{eq} \\ 0 & V_{eq}\tan\theta \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

Nous verrons que dans cette situation (dépendance entre 2 termes d'une seule colonne), aucun changement de base ne peut la faire disparaître, on a donc un torseur équivalent possédant 3 inconnues ! Il y a une dépendance. Ce ne peut être une liaison normalisée

• **Liaisons en parallèle**

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} P_{eq} & U_{eq} \\ Q_{eq} & V_{eq} \\ R_{eq} & W_{eq} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} P_{10}^1 & U_{10}^1 \\ Q_{10}^1 & V_{10}^1 \\ R_{10}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} P_{10}^2 & U_{10}^2 \cos\theta \\ 0 & U_{10}^2 \sin\theta \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

On remarque que :

$$Q_{eq} = R_{eq} = W_{eq} = 0 \quad ; \quad \frac{V_{eq}}{U_{eq}} = \tan\theta$$

Soit :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} P_{eq} & U_{eq} \\ 0 & U_{eq}\tan\theta \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

Ici aussi, la liaison équivalente présente une dépendance qui ne peut disparaître, il y a uniquement 2 degrés de liberté et elle n'est pas normalisé.

A.VI.2.a.ii Reconnaissance d'une liaison

Pour reconnaître une liaison usuelle, il faut :

- obtenir la forme canonique du torseur associé. La forme canonique d'un torseur est la forme du torseur lorsque son moment est minimum (choix du point) et ses composantes ont des expressions les plus simples (le plus de 0 possibles) (choix de la base). Par forme on entend composantes nulles ou non nulles et places de celles-ci dans le torseur
- N'obtenir que des inconnues indépendantes

On pourra alors vérifier que le torseur obtenu correspond **ou non** à une liaison usuelle. Lorsque l'on obtient le torseur équivalent final, il est composé soit

- d'inconnues indépendantes permettant ou non de reconnaître une liaison usuelle selon sa forme
- d'inconnues dépendantes, ne pouvant correspondre à une liaison normalisée

La forme et l'indépendance des inconnues d'un torseur dépendent de deux choix :

- Le point d'expression du torseur équivalent
- La base d'expression du torseur équivalent

Remarque : Une liaison équivalente peut être une liaison normalisée dans une base qui bouge avec le temps et en un point qui peut ne pas être fixe dans l'espace. On peut par exemple trouver une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ où le point O n'est pas fixe au cours du temps dans la base 0.

A.VI.2.a.iii Choix du point

• **Principe**

La reconnaissance d'une liaison par son torseur (cinématique, statique) dépend du point où celui-ci est exprimé. Ainsi, si le torseur d'une liaison est écrit en un point du lieu géométrique caractéristique de celle-ci (et si la base est bien choisie, point développé au prochain paragraphe), sa reconnaissance sera triviale :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

On reconnaît ici le torseur cinématique d'une liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$. Cette écriture est la forme canonique du torseur de la liaison pivot.

Par contre, si ce torseur est exprimé en un point quelconque de l'espace $P(x, y, z)$, le torseur associé à cette liaison prendra une forme non conventionnelle :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & zP_{2/1} \\ 0 & -yP_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & V_{2/1} \\ 0 & W_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$$

On remarque alors que les 3 composantes de ce torseur ne sont **pas indépendantes** :

$$V_{2/1} = zP_{2/1} \quad ; \quad W_{2/1} = -yP_{2/1}$$

Des inconnues en moment dépendent inconnues en résultante et on voit que la forme du torseur obtenu n'est pas la forme correspondant au moment minimum.

On remarque qu'en $y = z = 0$, soit sur l'axe $(A, \vec{x})$, le moment est minimum et les inconnues sont indépendantes :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

On reconnaître la liaison pivot recherchée.

Il est parfois compliqué de mener cette réflexion si le choix du point n'était pas bon au départ

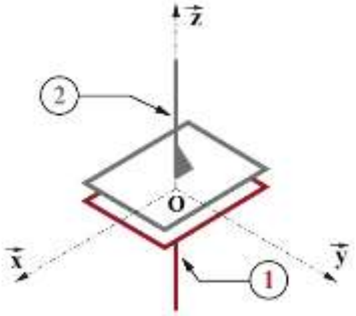
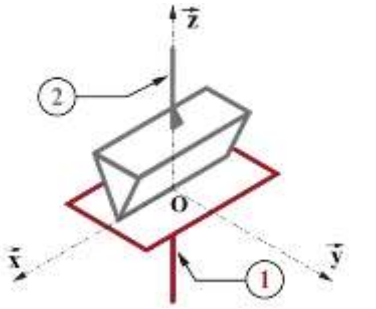
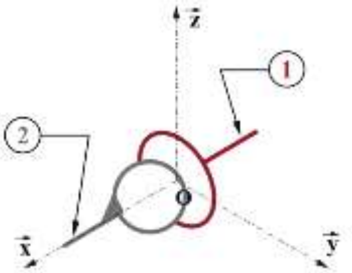
Conclusion : le choix du point avant même de mener l'analyse sera très important pour mener une étude correcte et simple de liaison équivalente : **on essaiera de reconnaître la liaison recherchée « par intuition » afin de choisir un point sur son lieu géométrique avant de commencer**.

• **Effets d'un mauvais choix de point**

Un mauvais choix de point conduit à l'apparition dans les moments de termes liés à la résultante du torseur **et à des dimensions** (ce n'est pas le cas pour l'hélicoïdale). Il faut alors déplacer le torseur en un autre point afin de minimiser le moment en jouant sur les dimensions et de rendre, si possible les inconnues indépendantes.

• **<u>Cas particuliers</u>**

A savoir, en cinématique par exemple, les liaisons Appui Plan, Linéaire Rectiligne et Ponctuelle peuvent contenir des termes U,V et W dépendants de P, Q et R sans changer leur forme canonique. Il peut donc être possible de les reconnaître sans faire ce travail.

		
$\begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1} - yR_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} + xR_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P}^{\mathfrak{B}}$ $\begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{P\in(O,\vec{z})}^{\mathfrak{B}}$	$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} + xR_{2/1} - zP_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{P\in(O,\vec{x},\vec{z})}^{\mathfrak{B}}$ $\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{0}^{\mathfrak{B}}$	$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & V_{2/1} + xR_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} - xQ_{2/1} \end{Bmatrix}_{P\in(O,\vec{x})}^{\mathfrak{B}}$ $\begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_{0}^{\mathfrak{B}}$

Remarques :

- En aucun cas cette dépendance à des termes en résultante n'induit une dépendance entre les inconnues cinématiques. Exemple pour l'appui plan : il n'est pas possible d'écrire : $U_{2/1} - yR_{2/1} = kR_{2/1}$. On remarque juste que les termes en moment sont « influencés » par les termes en résultante.
- Il en va de même en statique pour un certain nombre de liaisons (cf tableau des liaisons)
- Ce n'est pas parce que le moment n'est pas minimum que le torseur n'a pas sa forme canonique.

• **Méthode de choix du point**

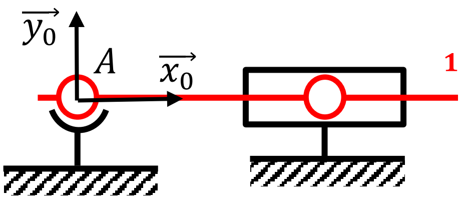
Soit P le point d'expression des torseurs des liaisons composant la liaison équivalente recherchée :

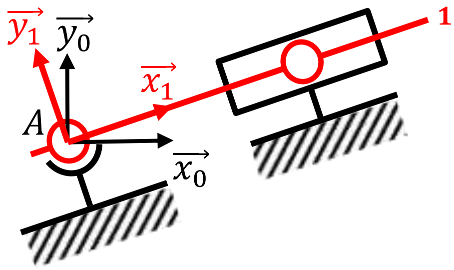
- Essayer de reconnaître la liaison recherchée parmi les liaisons usuelles
- Si la liaison recherchée est une liaison usuelle, P sera choisi sur son lieu d'invariance
- P sera choisi, autant que possible, sur un lieu d'invariance commun des différents torseurs des liaisons composant la liaison équivalente afin de minimiser le travail de déplacement des torseurs en P.
- Si des torseurs doivent être déplacés, et si différents points peuvent convenir, P sera le point induisant le moins de termes en moment, c'est-à-dire que les torseurs à déplacer auront généralement le moins possible de composantes de résultante (P, Q, R). Autrement dit, il faut choisir l'un des points où la **résultante** du torseur de la liaison associée a **le plus d'inconnues**
  Remarque : Cela n'est pas nécessaire dans le cas où parmi les points possibles, le changement de point s'effectue suivant l'axe de la résultante supplémentaire (s'il n'y en a qu'une), car le produit vectoriel de la formule de Varignon n'induira pas de nouveaux termes

A.VI.2.a.iv Choix de la base

• **Principe**

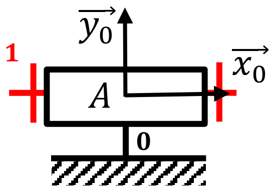
La base d'expression du torseur équivalent peut modifier sa forme. En général, la base est bien choisie intuitivement.

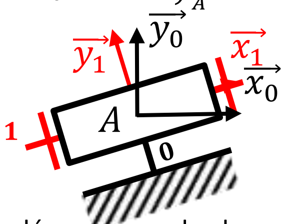




$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{10} & 0 \\ P_{2/1}\sin\theta_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$





Dans le cas de droite, et dans la base 0, on remarque une dépendance de deux composantes en résultante (vitesse de rotation) et on remarque qu'un changement de base permet de supprimer celle-ci et de reconnaitre une liaison pivot.

Il est parfois compliqué de mener cette réflexion si le choix de la base n'était pas bon au départ

Conclusion : le choix de la base avant même de mener l'analyse sera très important pour mener une étude correcte et simple de liaison équivalente : **on essaiera de reconnaître la liaison recherchée « par intuition » afin de choisir une base contenant les vecteurs associés à la liaison recherchée avant de commencer**.

• **Effets d'un mauvais choix de base**

Un mauvais choix de base fait apparaître des relations adimensionnées (rapports de longueurs, cos, sin, tan) entre les mêmes composantes en résultante et en moment. Il faut alors faire un changement de base afin de rendre, si possible, ces inconnues indépendantes.

• **Méthode de choix de la base**

Pour déterminer la base d'expression du torseur équivalent, il faut :

- Essayer de reconnaître la liaison recherchée parmi les liaisons usuelles
- Si la liaison recherchée est une liaison usuelle, $\mathfrak{B}$ sera une base contenant au minimum les vecteurs proposés dans le tableau des liaisons (ex : $\mathfrak{B}(\vec{x},-,-)$ → choix d'une base quelconque contenant le vecteur $\vec{x}$, quelle que soit sa position)
- D'une manière générale, choisir une base contenant à la fois les éléments géométriques des liaisons présentes et les éventuels vecteurs qui vont servir à la formule de Varignon

• **Remarque**

On remarquera que pour réussir à trouver la forme canonique d'un torseur par changement de base, il sera nécessaire d'avoir les mêmes relations entre deux mêmes composantes de la résultante et du moment :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{10} & U_{2/1}\cos\theta_{10} \\ P_{2/1}\sin\theta_{10} & U_{2/1}\sin\theta_{10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{10} & U_{2/1} \\ P_{2/1}\sin\theta_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1}\cos\theta_{01} \\ 0 & U_{2/1}\sin\theta_{01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

A.VI.3 Analyse

A.VI.3.a Préliminaires

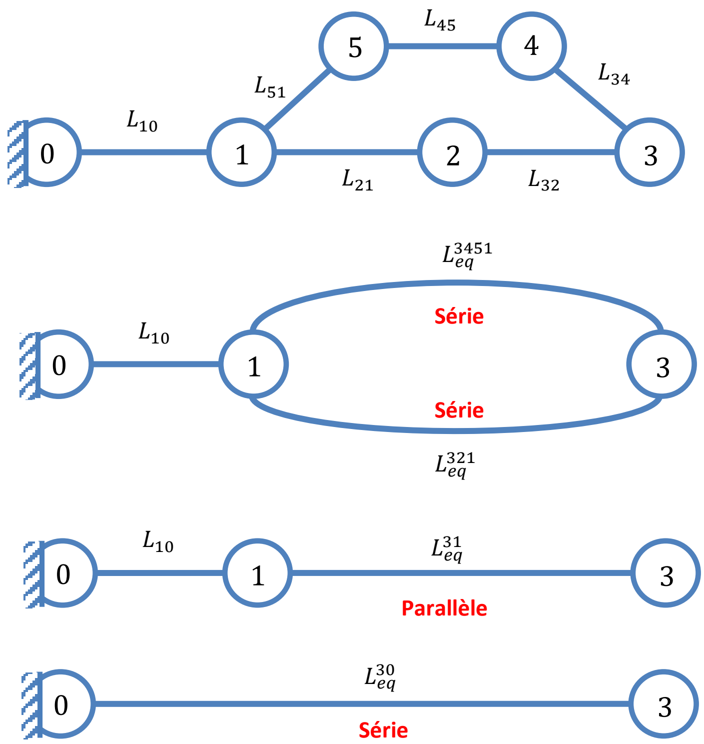
Face à un plan ou une vue 3D d'un mécanisme :

- Analyser les surfaces en contact et proposer les liaisons usuelles correspondantes
- Proposer un modèle cinématique du système : schéma d'architecture
- Etablir son graphe des liaisons
- Identifier si les liaisons étudiées sont en série ou en parallèle

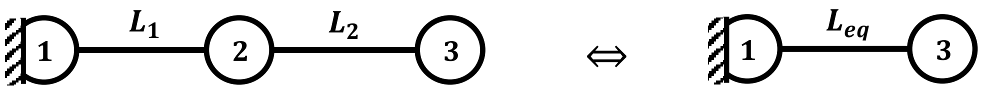
A.VI.3.b Décomposition du problème

Lorsque l'étude porte sur des liaisons à la fois en série et en parallèle, et ou s'il y a plus de 2 liaisons à étudier, il est possible, voire conseillé, de décomposer le problème en somme de problèmes simples contenant quelques liaisons en menant toute la démarche à chaque étape.

Exemple :



A.VI.3.c Liaisons en série



Lorsque deux pièces sont reliées par plusieurs liaisons successives, la liaison équivalente entre ces deux pièces possède un degré de mobilité supérieur ou égale au maximum des degrés de mobilité de chaque liaison intermédiaire.

Méthode :

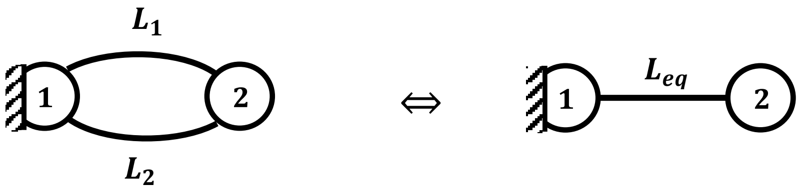
- Choisir point P et base $\mathfrak{B}$
- Exprimer les n torseurs cinématiques en P dans $\mathfrak{B}$ des liaisons $\{\mathcal{V}_{n/n-1}\}, \{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\}$ ... $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$
- Par composition du mouvement, on a :

$$\{\mathcal{V}_{n/1}\} = \{\mathcal{V}_{n/n-1}\} + \{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\} + \cdots + \{\mathcal{V}_{2/1}\}$$

Attention au choix du point P et de la base $\mathfrak{B}$ – Attention à l'ordre des indices

- Exprimer $\{\mathcal{V}_{n/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{n/1} & U_{n/1} \\ Q_{n/1} & V_{n/1} \\ R_{n/1} & W_{n/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues cinématiques non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
  - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
  - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

A.VI.3.d Liaisons en parallèle



Des liaisons en parallèle permettent généralement de répartir les efforts que chacune va subir dans un contexte de dimensionnement de mécanismes. L'ensemble des plusieurs liaisons entre deux pièces réalise une nouvelle liaison à mobilité inférieure ou égale à la mobilité de chacune des liaisons.

Méthode :

- Choisir point P et base $\mathfrak{B}$
- Exprimer les n torseurs cinématiques en P dans $\mathfrak{B}$ de chaque liaison en prenant soin de différencier leur notation, en utilisant un numéro pour chacune: $\{\mathcal{V}_{2/1}{}^1\}, \{\mathcal{V}_{2/1}{}^2\}$ … $\{\mathcal{V}_{2/1}{}^n\}$
- Poser le torseur générique de la liaison équivalente $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ comportant les 6 inconnues en P dans $\mathfrak{B}$
- Par fermeture cinématique de chaque chaîne indépendante, on a :
$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^1\} = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^2\} = \cdots = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^n\}$$
Attention au choix du point P et de la base $\mathfrak{B}$ *– Attention à l'ordre des indices*
- Exprimer $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues cinématiques non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
    - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
    - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles