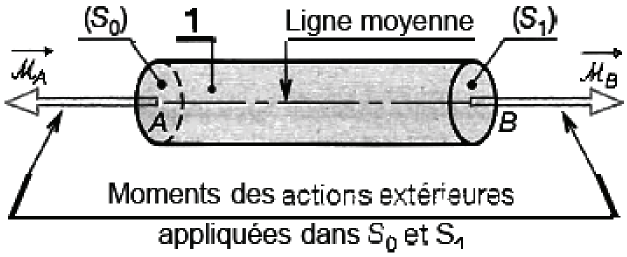
I- HYPOTHÈSES : (Figure 1)

Le solide est idéal : matériau homogène, isotrope, poutre rectiligne de section constante et circulaire.
Les actions extérieures dans les sections extrêmes sont modélisables par deux moments opposés, portés par la ligne moyenne. La poutre est donc soumise à deux torseurs couples.

$$\left\{\tau_{\bar{1}/1}\right\}_A = \left\{\vec{0}\,\middle|\,\overrightarrow{M_A}\right\}_A \quad et \quad \left\{\tau_{\bar{1}/1}\right\}_B = \left\{\vec{0}\,\middle|\,\overrightarrow{M_B}\right\}_B$$



(Figure 1)

II- DÉFINITION : (Figure 2)

Une poutre est sollicitée à la torsion simple si le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) sur la partie gauche (I) de la poutre peut se réduire en **G**, barycentre de la section droite (S) à un moment perpendiculaire à (S), tel que :

$$\left\{Coh_{II/I}\right\}_G = \left\{\vec{0}\,\middle|\,\overrightarrow{M_t}\right\}_G \quad dans \ R\left(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$$

$$avec : N = 0;\ Ty = 0;\ Tz = 0$$

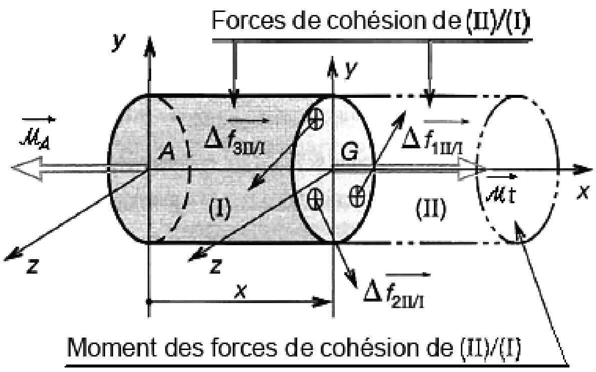
$$M_t \neq 0;\ M_{fGy} = 0;\ M_{fGz} = 0$$

et

$$\left\{Coh_{II/I}\right\}_G = -\left\{Action\ ext. à\ gauche/_I\right\}_G$$

$$\left\{Coh_{II/I}\right\}_G = +\left\{Action\ ext. à\ droite/_{II}\right\}_G$$

donc : $\boxed{\vec{R} = \vec{0}\ et\ \overrightarrow{M_t} = -\overrightarrow{M_A}}$



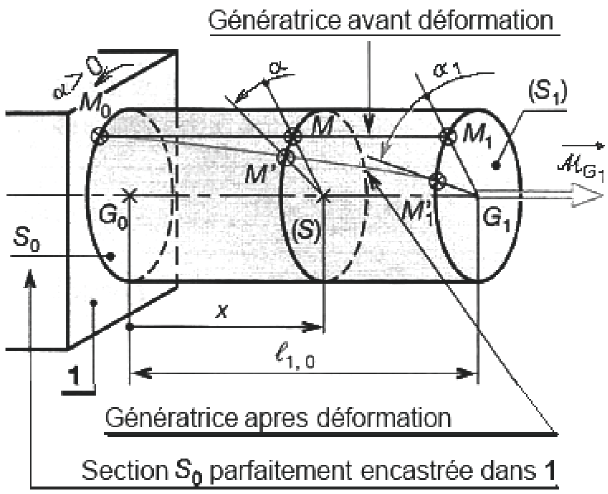
(Figure 2)

III- ÉTUDE DES DÉFORMATIONS : (angle unitaire de torsion) (Figure 3)

$$\boxed{\theta = \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha_1}{\ell_{1,0}}}\ ; Si\ \alpha > 0 \Rightarrow \theta > 0$$

θ : Angle unitaire de torsion en (rad/mm)

α : Angle de torsion en (rad).



(Figure 3)

IV- CONTRAINTE TANGENTIELLE DE TORSION : (Figure 4)

$$\boxed{\tau_M = G.\theta.\rho}$$

avec :

τ_M : Contrainte tangentielle due à la torsion en un point M en (MPa)

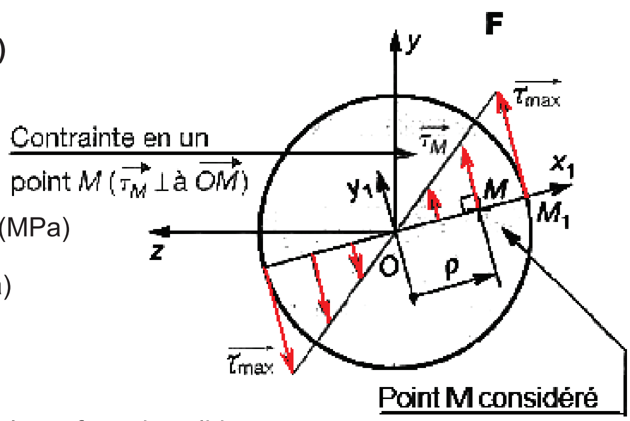
G : Module d'élasticité transversale (ou de Coulomb) en (MPa)

θ : Angle de torsion unitaire en (rad/mm)

ρ : Distance de M au centre de la section en (mm).

Remarque : La contrainte de torsion est maximale si M est sur la surface du solide

c'est-à-dire, ρ = R $\quad \boxed{\tau_{max\,i} = G.\theta.R}$



(Figure 4)
Diagramme de représentation des contraintes de torsion

V- MOMENT QUADRATIQUE D'UNE SURFACE PLANE PAR RAPPORT A UN AXE DE SON PLAN: (Figure 5)

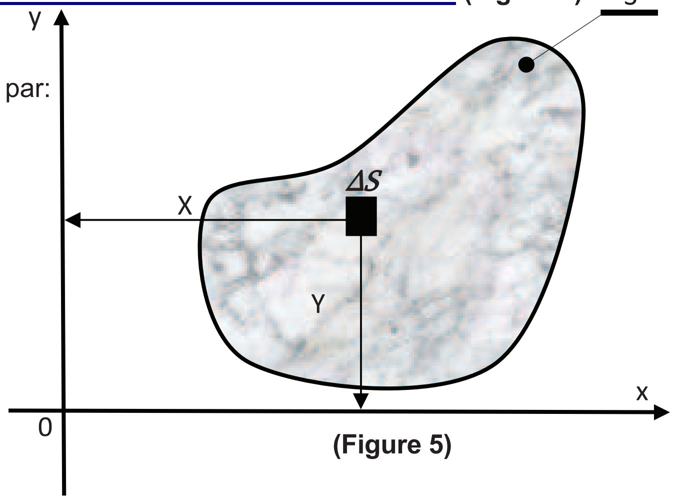
Définition:

Le moment quadratique ou d'inertie de la surface (S) est défini par:

Proj/ox : ⇨ $$I_{ox} = \sum_{(s)} y^2.\Delta S = \int_{(s)} y^2.dS \quad (en\ mm^4)$$

Proj/oy : ⇨ $$I_{oy} = \sum_{(s)} x^2.\Delta S = \int_{(s)} x^2.dS \quad (en\ mm^4)$$

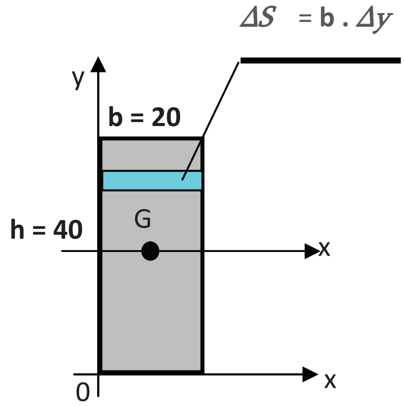
Remarque: Les moments quadratiques interviennent dans le calcul de la contrainte de torsion et de la flexion.



(Figure 5)

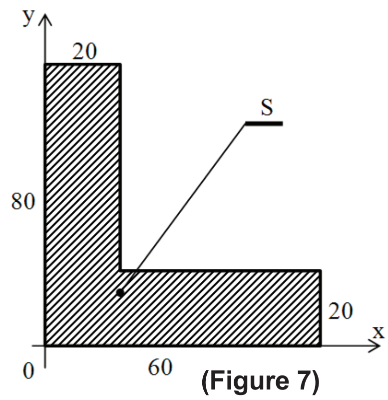
Exemple1:

Calculer le moment quadratique (I_{ox} et I_{oy}) et (I_{Gx} et I_{Gy}) de la surface (S) définie par la figure 6.



(Figure 6)

Exemple2: Calculer le moment quadratique (I_{ox} et I_{oy}) de la surface (S) définie par la figure 7.



(Figure 7)

VI- MOMENT QUADRATIQUE D'UNE SURFACE PLANE PAR RAPPORT A UN POINT:

(Moment quadratique polaire) (Figure 8)

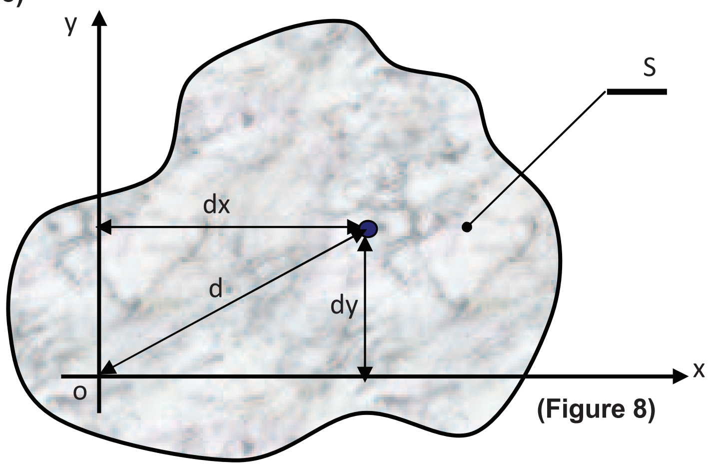
Le moment quadratique polaire est défini par:

....

....

....

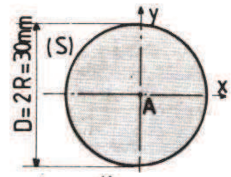
....

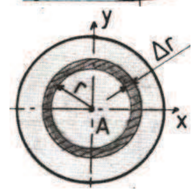


(Figure 8)

Exemple : cas d'une surface circulaire de rayon R = D/2

Calculons le moment quadratique polaire de l'élément de surface ΔS, ΔS est la couronne de rayon moyen '' r '' et de largeur Δr (Δr est très petit).





$\Delta S = 2\pi . r . \Delta r$

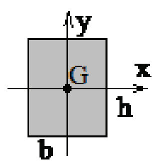
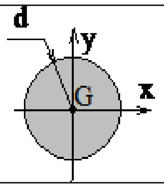
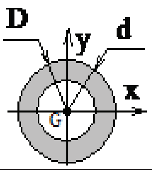
....

....

....

....

VII- MOMENTS QUADRATIQUES USUELS:

	I_{Gx}	I_{Gy}	I_G
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{12}\left(b^2+h^2\right)$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64}\left(D^4-d^4\right)$	$\frac{\pi}{64}\left(D^4-d^4\right)$	$\frac{\pi}{32}\left(D^4-d^4\right)$

IIX- THEOREME DE HUYGNES ET CHNGEMENT D'AXE:

Le moment quadratique d'une surface (S) par rapport à un axe (ox) quelconque de son plan est égal au moment quadratique de cette surface par rapport à l'axe (GX) passant par son centre de gravité et parallèle à (ox), plus le produit de l'aire de cette surface par le carré de la distance des deux axes (ox) et (GX).

X et Y passent par le centre de gravité G ou barycentre de la surface (S). x est parallèle à X et y à Y, ; dx et dy sont les distances entre les axes et S l'aire de la surface (S).

Remarque:

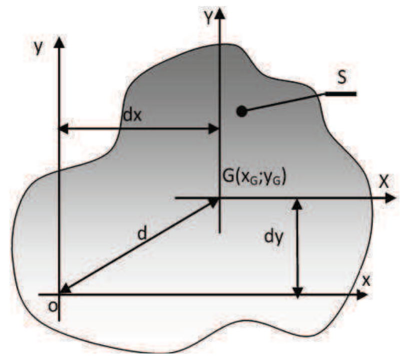
$$d^2 = d_x^2 + d_y^2$$

$$I_{0x} = I_{G_X} + S d_y^2$$

$$I_{0y} = I_{G_Y} + S d_x^2$$

$$I_0 = I_G + S d^2$$

$$I_{0xy} = I_{G_X G_Y} + S d_x d_y$$



IX- ÉQUATION DE DÉFORMATION :

C'est la relation entre M_t et θ :

$$\boxed{M_t = G.\theta.I_0} \Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{M_t.\ell}{G.I_0}}$$

Avec : - M_t : moment de torsion en (N.m)

G : Module d'élasticité transversale (ou de Coulomb) en (MPa)

θ : Angle de torsion unitaire en (rad/mm)

I_0 : moment quadratique polaire de S (mm^4).

X- CONTRAINTE DE TORSION :

C'est la relation entre M_t et τ

$$\boxed{\tau_M = \frac{M_t}{I_o}.\rho}$$ Et la contrainte Maxi $$\boxed{\tau_{M\,axi} = \frac{M_{tM\,axi}}{I_o/v}}$$

Avec : - τ_M : contrainte tangentielle due à la torsion en un point M en (MPa)

- $\tau_{M\,axi}$ contrainte tangentielle maxi en (MPa)

M_t : moment de torsion en (N.m)

M_{tMaxi} : moment de torsion maxi en (N.m)

I_0 : moment quadratique polaire de S (mm^4).

v = R = ρ_{Maxi} : Distance de M au centre de la section en (mm).

XI- CONDITION DE RESISTANCE :

$$\boxed{\tau_{M\,axi} = \frac{M_{tM\,axi}}{I_o/v} \leq Rpg = \frac{Reg}{s}}$$

avec :
- **Rpg :** résistance pratique au glissement en (MPa)
- **Reg :** résistance élastique au glissement en (MPa)
- **s :** coefficient de sécurité

XII- CONDITION DE RIGIDITE :

$$\boxed{|\theta| = \frac{|M_t|}{G.I_o} \leq \theta_{\lim}}$$

Avec : $\theta_{\lim}$ **:** angle unitaire limite de torsion en (rad/mm)

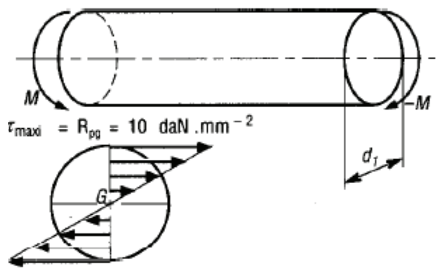
XIII- CONCENTRATION DE CONTRAINTES :

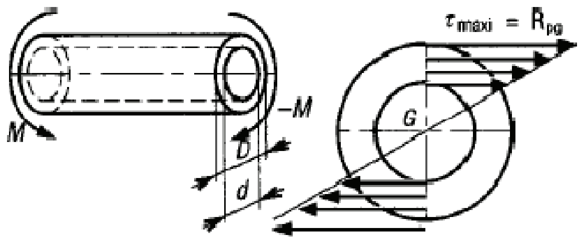
Lorsque les arbres étudiés présentent de brusques variation de section (gorge ; épaulement, trou…) les formules précédentes ne s'appliquent plus. On dit qu'il y a concentration de contraintes.

$$\boxed{\left|\tau_{eff\,\max i}\right| = k_t.\left|\tau_{th}\right| \leq Rpg}$$

Comparaison entre arbre plein et arbre creux :

Soit deux arbres de transmission construits à partir du même acier, G=8000 daN/mm^2. Le premier est plein (diamètre d); le second est creux (diamètre extérieur D, diamètre intérieur *d* = 0,8D). Le couple à transmettre est de 200 Nm ; la résistance pratique au cisaillement adoptée pour les deux cas est de 10 daN/mm^2.
Déterminons les dimensions optimales des deux arbres et comparons les poids respectifs des deux constructions.





....

....

....

....

....

....