1- Généralités

1.1- Objectif

L'objectif de la cinétique est de modéliser trois grandeurs physiques :

- ☞ La quantité de mouvement d'un corps.
- ☞ La quantité d'accélération d'un corps.
- ☞ L'énergie cinétique (Energie de mouvement) d'un corps.

Ces trois grandeurs dépendent de la masse du corps (et de sa répartition dans l'espace) et de son mouvement. Un mouvement ne pouvant être défini que par rapport à un repère (ou un solide) ces trois grandeurs ne peuvent donc être définies que par rapport à un repère.

1.2- Cinétique d'une masse ponctuelle

Soit un corps dont toute la masse m est concentrée en un point M. On définit alors :

☞ La quantité de mouvement du corps S par rapport au repère R comme le vecteur : ....

☞ La quantité de d'accélération du corps S par rapport au repère R comme le vecteur : ....

☞ L'énergie cinétique du corps S par rapport au repère R comme le réel : ....

1.3- Cinétique d'un corps volumique

1.3.1- Notions de base de géométrie des masses

Un corps volumique S est toujours la somme sur le volume occupé par ce corps de masses élémentaires dm concentrées en des points P.

La masse dm est le réel : $dm = \rho(P).dv$ Où : dv est un volume élémentaire autour du point P et $\rho(P)$, la masse volumique du corps autour du point P. Pour les calculs somatiques, sur le corps volumique il faut bien sur passer par une intégrale triple sur le volume de $\rho(P).dv$. Cependant pour simplifier les écritures nous écrirons l'intégrale sur le solide S des masses élémentaire dm.

La masse de ce corps M est donc le réel :

....

Le centre d'inertie ou centre des masses est le point G_I tel que :

....

Le centre de gravité ou centre des poids est le point G_g tel que :

....

Où : $\overrightarrow{g(P)}$ est le vecteur accélération gravitationnel en P. $\overrightarrow{g(P)}$: le champ de gravité de la terre

Très souvent en mécanique, la dimension des corps étant faible devant le rayon de la terre, on considère un champ de gravité uniforme.

<u>Sous cette hypothèse</u>, le centre de gravité et le centre d'inertie sont confondus.

1.3.2- Quantité de mouvement

La quantité de mouvement du corps volumique S (défini comme la somme des masses dm) par rapport au repère R est modélisée par le torseur cinétique :

Où on a : ☞ La résultante cinétique : ....

☞ Le moment cinétique en A : ....

1.3.3- Quantité d'accélération

La quantité d'accélération du corps volumique S (défini comme la somme des masses dm) par rapport au repère R est modélisée par le torseur dynamique :

On note : ☞ La résultante dynamique : ....

☞ Le moment dynamique en A : ....

1.3.4- Energie cinétique

L'énergie cinétique du corps volumique S (défini comme la somme des masses dm) par rapport au repère R est modélisée par le réel :

....

1.4- Cinétique d'un ensemble de solides

Soit un système S constitué d'un nombre fini n de solides S_i . : $\mathbf{S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n}$

1.4.1- Quantité de mouvement

La quantité de mouvement du système S est la somme des quantités de mouvement des n solides S_i :

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathcal{C}(S_i/R)\}$$

1.4.2- Quantité d'accélération

La quantité d'accélération du système S est la somme des quantités d'accélération des n solides S_i :

$$\{\mathcal{D}(S/R)\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathcal{D}(S_i/R)\}$$

1.4.3- Energie cinétique

L'énergie cinétique du système S est la somme des énergies cinétiques des n solides S_i :

$$E_C(S/R) = \sum_{i=1}^{n} E_C(S_i/R)$$

2- Torseur cinétique d'un solide S

2.1- Torseur cinétique au centre de gravité

Soit un solide S de masse M de centre d'inertie G et d'opérateur d'inertie en G : $\overline{\overline{J_G(S)}}$.

Alors le torseur cinétique est de la forme :

C'est-à-dire que : ☞ .... *Voir démonstration A*

☞ .... *Voir démonstration B*

2.2- Torseur cinétique en un point O de S fixe dans R

Soit un solide S de masse M de centre d'inertie G et d'opérateur d'inertie en O : $\overline{\overline{J_O(S)}}$. Où le point O appartenant au solide S est fixe dans R : $\overrightarrow{\mathbf{V_{O\in S/R}}} = \vec{0}$

Alors le torseur cinétique est de la forme :

C'est-à-dire que : ☞ .... *Voir démonstration A*

☞ .... *Voir démonstration C*

2.3- Torseur cinétique en un point M quelconque

Pour déterminer le torseur cinétique en un point M quelconque, on détermine le torseur cinétique au centre de gravité G ou en un point O de S fixe dans R, puis on transporte le moment cinétique en M :

....

3- Torseur dynamique d'un solide S

3.1- Torseur dynamique au centre de gravité

Soit un solide S de masse M de centre d'inertie G et de moment cinétique en G : $\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma_G(S/R)}}$

Alors le torseur dynamique est de la forme :

C'est-à-dire que : ☞ .... *Voir démonstration D*

☞ .... *Voir démonstration E*

3.2- Torseur dynamique en un point O de S fixe dans R

Soit un solide S de masse M de centre d'inertie G et de moment cinétique en O : $\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma_O(S/R)}}$. Où le point O appartenant au solide S est fixe dans R : $\overrightarrow{V_{O\in S/R}} = \vec{0}$

Alors le torseur dynamique est de la forme :

C'est-à-dire que : ☞ .... *Voir démonstration D*

☞ .... *Voir démonstration F*

3.3- Torseur dynamique en un point M quelconque

Pour déterminer le torseur dynamique en un point M, on détermine le torseur dynamique au centre de gravité G ou en un point O de S fixe dans R, puis on transporte le moment dynamique en M :

....

4- Energie cinétique d'un solide S

4.1- Energie cinétique calculée par l'opérateur d'inertie en un point O de S fixe dans R

Soit un solide S de masse M de centre d'inertie G et d'opérateur d'inertie en O : $\overline{\overline{J_O(S)}}$. Où le point O appartenant au solide S est fixe dans R : $\overrightarrow{V_{O\in S/R}} = \vec{0}$

Alors l'énergie cinétique peut être calculée par la relation :

.... *Voir démonstration G*

4.2- Energie cinétique calculée par l'opérateur d'inertie au centre d'inertie

Soit un solide S de masse M de centre d'inertie G et d'opérateur d'inertie en G : $\overline{\overline{\mathbf{J_G(S)}}}$.

Alors l'énergie cinétique peut être calculée par la relation :

.... *Voir démonstration H*

On écrit aussi parfois :

....

Où $E_C(S/R_G)$ est l'énergie cinétique par rapport à R_G : le repère barycentrique du solide S lié à R.

Ce repère barycentrique est un repère dont le centre est constamment en G centre d'inertie du solide S et dont les axes sont constamment parallèles aux axes du repère R.