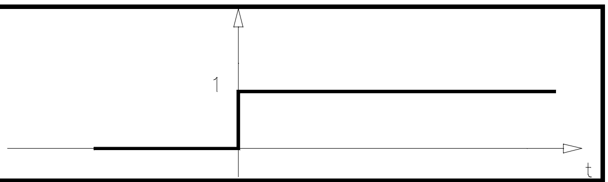
I - ANNEXE - TRANSFORMATION DE LAPLACE

1. Définitions

Soit f une fonction de la variable réelle t définie sur R et supposée nulle pour t<O, on appelle transformée de Laplace de f, la fonction F définie par:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

avec p une variable réelle ou complexe.
En pratique on utilise la transformée de Laplace restreinte qui ne s'applique aux fonctions causales (c'est à dire aux fonctions $f(t)$ telles que $f(t) = 0$ pour $t > 0$).
On définit la fonction existence $u(t)$ ou fonction de Heaviside, telle que

$\forall t \langle 0, \quad u(t) = 0$ $\forall t \geq 0 \quad u(t) = 1$	

Ainsi on ne calcule pas la transformée de Laplace de $\cos(\omega t)$ mais $u(t) \cdot \cos(\omega t)$ qui n'est définie que de $[0 + \infty[$

On note : $F(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$, la transformée de Laplace de $f(t)$. $F(p)$ est l'image de $f(t)$

2. Propriétés

unicité	à $f(t)$ il correspond $F(p)$ unique à $F(p)$ il correspond $f(t)$ unique
addition	$\mathcal{L}\left[f(t) + g(t)\right] = F(p) + G(p)$
linéarité	$\mathcal{L}\left[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\right] = a \cdot F(p) + b \cdot G(p)$
produit de convolution	$\mathcal{L}\left[f(t) * g(t)\right] = F(p) \cdot G(p)$ avec $f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u).g(u)du$ produit de convolution
Dérivation	dérivée première $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot F(p) - f(0^+)$ dérivée seconde $\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 \cdot F(p) - pf(0^+) - \dot{f}(0^+)$ dans la plupart des cas nous aurons $f(0^+) = 0$
	démonstration:
Intégration	$\mathcal{L}\left[\int_0^t fx)dx\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{A_{0^+}}{p}$

	démonstration $g(t) = \int_0^t fx)dx$ $g'(t) = f(t)$ $\mathrm{L}[g'(t)] = p \cdot G(p) - g(0^+)$ $\mathrm{L}[f(t)] = F(p)$ $p \cdot G(p) - g(0^+) = F(p)$ $G(p) = \frac{F(p)}{P} + \frac{g(0^+)}{p}$ $g(0^+) = 0$ $G(p) = \frac{F(p)}{P}$

Remarque importante: si les conditions initiales sont nulles (conditions d'Heaviside) alors:

Dériver dans le domaine temporel revient à **multiplier par p** dans le domaine symbolique (domaine de Laplace)

Intégrer dans le domaine temporel revient à **diviser par p** dans le domaine symbolique.

théorème du retard	$\mathrm{L}\ [f(t-\tau)] = e^{-\tau \cdot p} F(p)$
théorème de la valeur initiale	$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot F(p)$
théorème de la valeur finale Attention ce théorème n'est utilisable que si la fonction temporelle est convergente (le système étudié est stable).	$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p \cdot F(p)$

3. Tableau des transformées de Laplace usuelles

$f(t).u(t)$	$F(p)=\mathcal{L}[f(t)]$	$f(t).u(t)$	$F(p)=\mathcal{L}[f(t)]$
K	$\frac{K}{p}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2+p^2}$
$K.t$	$\frac{K}{p^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{p}{\omega^2+p^2}$
$e^{-a.t}$	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-a.t}\cdot\sin\omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2+(p+a)^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-a.t}\cdot\cos\omega t$	$\frac{p}{\omega^2+(p+a)^2}$
$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1+\tau.p)}$	$sh\omega t=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$e^{-a.t}\cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$ch\omega t=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$

4. Formes particulières: systèmes du premier ordre et du second

$f(t).u(t)$	$F(p)=\mathcal{L}[f(t)]$
$\frac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\cdot\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$	$\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$
$1+\frac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\cdot\left(\tau_1.e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2.e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$	$\frac{1}{p.(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$
$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}.\left(\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t\right)\right)$	$\frac{1}{1+2z\frac{p}{\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$ avec $z\langle 1$
$1-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}.\left(\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t-\varphi\right)\right)$ avec $\varphi=arctg\frac{\sqrt{1-z^2}}{-z}$	$\frac{1}{p\left(1+2z\frac{p}{\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2\right)}$ avec $z\langle 1$

5. Transformation de Laplace inverse

La transformation de Laplace inverse consiste à rechercher la fonction temporelle qui correspond à un fonction $F(p)$ donnée.

Lorsque la fonction $F(p)$ est sous la forme de fractions rationnelles en p , la méthode à utiliser est la décomposition en éléments simples, La fonction temporelle consiste alors en la recherche dans la table précédente de la transformée inverse de chaque fraction élémentaire. La fonction temporelle correspondante est la somme des fonctions temporelles élémentaires.

a) exemple:

$$F(p)=\frac{p+2}{p^2+15p+50}=\frac{p+2}{(p+5)(p+10)}$$

Décomposition en éléments simples

On met $F(p)$ sous la forme $\frac{A_1}{(p+5)}+\frac{A_2}{(p+10)}$.

On résout en identifiant

$$F(p)=\frac{p+2}{(p+5)(p+10)}=\frac{A_1(p+10)+A_2(p+5)}{(p+5)(p+10)}$$

$$F(p)=\frac{A_1 p+10A_1+A_2 p+5A_2}{(p+5)(p+10)}$$

$$F(p)=\frac{(A_1+A_2)p+10A_1+5A_2}{(p+5)(p+10)}$$

$$A_1=-\frac{3}{5}; A_2=\frac{8}{5}$$

on a donc

$$F(p)=\frac{-3/5}{(p+5)}+\frac{8/5}{(p+10)}$$

puis en recherchant dans la table:

$$\boxed{f(t)=-\frac{3}{5}e^{-5t}+\frac{8}{5}e^{-10t}}$$

6. Intérêt de la transformation de Laplace

La transformation de Laplace permet de remplacer une équation différentielle dans le domaine temporel par une équation polynomiale dans le domaine symbolique.
La recherche de la solution de l'équation différentielle se limite alors, à partir des racines du polynôme, à la recherche dans une table de la forme type de la solution.
La transformation de Laplace ne permet pas de résoudre d'autres équations différentielles que les méthodes classiques