

PHYSIQUE II

Projet Virgo

Calculatrices autorisées

Préambule

Tout comme l'accélération de charges permet le rayonnement d'une onde électromagnétique, l'accélération de masses entraîne l'émission d'ondes gravitationnelles (notées **OG** dans la suite) sous forme de trains d'onde, se propageant dans toutes les directions à la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les ondes gravitationnelles sont de petites perturbations de la géométrie locale de l'espace-temps. On les caractérise classiquement par une grandeur sans dimension h mesurant en quelque sorte le « pourcentage » de la déformation (on peut le considérer comme une variation anisotrope de l'indice de réfraction du vide). Si une onde gravitationnelle d'amplitude suffisante traverse un interféromètre, les chemins optiques suivis par chaque faisceau différent, provoquant un (faible) décalage de phase des faisceaux à la recombinaison. La mesure de ce déphasage permet de remonter à la différence de longueur des chemins dl puis à la grandeur $h = dl/L$ où L est la longueur de chacun des bras (soit 3 km dans le projet Virgo).

L'importance de telles ondes, prédite par la Relativité Générale, provient du fait qu'elle pourraient valider les prédictions d'Einstein et que tout phénomène physique peut en être la source, puisqu'il n'y a pas de matière qui soit neutre gravitationnellement. En particulier, les **OG** apparaissent dans l'Univers lors de processus « dramatiques » tels que les supernovæ ou la coalescence d'un système binaire d'étoiles à neutrons.

Le projet franco-italien Virgo consiste à détecter, par des méthodes d'interférométrie optique poussées à leurs limites extrêmes de sensibilité, ces **OG** dont les amplitudes sont très faibles et dont les fréquences vont de 10 à 10^4 Hz (ce qui correspond par exemple à l'exploration de l'amas de la Vierge, d'où l'expérience tire son nom).

L'objectif du projet Virgo est d'atteindre une sensibilité suffisante h , de l'ordre de 10^{-21} .

Notations :

- à une grandeur réelle $g(t) = G \cos(\omega t + \varphi)$ on associe la grandeur complexe $\underline{g} = \underline{G} e^{j\omega t}$,
- \underline{a} étant l'amplitude complexe lumineuse, l'éclairement est alors $E = \underline{a} \cdot \underline{a}^*$.

Les quatre parties, bien que liées à la mise en œuvre de ce projet, sont dans une large mesure indépendantes entre elles.

Filière TSI

Partie I - Interféromètre de Michelson

Quand l' OG arrive dans l'interféromètre, son action peut être modélisée de la façon suivante : l' OG provoque une variation d'indice de réfraction et donc une variation de différence de chemin optique. On cherche alors à détecter la variation de puissance lumineuse en sortie de l'interféromètre induite par ce passage.

I.A - La figure 1 donne le schéma d'un interféromètre. Les miroirs M_1 et M_2 sont parfaitement orthogonaux entre eux et éclairés par une source laser de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 1064 \text{ nm}$, de diamètre supposé constant (section S). La lame séparatrice est notée Sp .

I.A.1) À partir d'un schéma clair, expliquer en quelques lignes le rôle de la lame compensatrice, notée C , sa nature et son placement. Cette compensation est-elle parfaite ? Justifier la présence de la lentille mince L ; comment placer le détecteur ?

I.A.2) On admet que l'ensemble $\{Sp + C\}$ n'introduit aucune différence de marche supplémentaire.

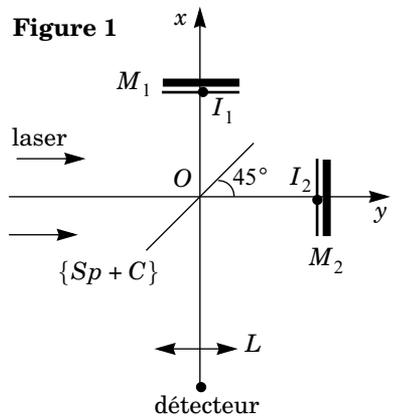
Dans cette question il n'y a aucune OG .

a) On note $OI_1 = L_1$; $OI_2 = L_2 = L_1 + e$. L'indice de l'air sera pris égal à 1. Quelle est la différence de chemin optique δ_0 entre les rayons se réfléchissant sur M_1 et ceux se réfléchissant sur M_2 ?

b) En déduire, par une démonstration rapide, l'éclairement E_0 reçu par le détecteur en fonction de e , λ et l'éclairement E_{inc} du faisceau laser incident. On rappelle que chaque faisceau interférant a un éclairement égal à $E_{\text{inc}}/4$.

c) Qu'observerait-on si l'ensemble $\{L + \text{détecteur}\}$ était remplacé par un écran placé à grande distance de l'interféromètre ?

I.B - On suppose maintenant que l'interféromètre est soumis à une OG se propageant selon l'axe Oz , à la fréquence $\nu_{OG} = 1 \text{ kHz}$. Cela modifie alors la propagation des ondes lumineuses de la façon suivante :



- une onde lumineuse se propageant dans la direction Ox voit un indice égal à $n_x = 1 - (1/2)h(t, z)$;
- une onde lumineuse se propageant dans la direction Oy voit un indice égal à $n_y = 1 + (1/2)h(t, z)$;

où $h(t, z) = h_0 \cos(2\pi\nu_{OG}(t - z/c))$ caractérise le passage de OG (voir préambule). On supposera que cette grandeur a une amplitude constante sur l'ensemble de l'interféromètre ($z = 0$) ainsi que pendant sa propagation dans celui-ci : $h(t, z) = h_0 = 10^{-21}$.

I.B.1)

- Calculer en présence de l' OG le chemin optique (OI_1) en fonction de h_0 et L_1 .
- Même question pour le chemin optique (OI_2) en fonction de h_0 et L_2 .
- En déduire la différence de chemin optique δ entre deux rayons interférant, en fonction de e , h_0 , L_1 et L_2 .

I.B.2) Montrer qu'en présence de l' OG l'éclairement en sortie de l'interféromètre s'écrit, au premier ordre en h_0 :

$$E \approx \frac{E_{\text{inc}}}{2} [1 + \cos\varphi_0 - 2h_0 kL \sin\varphi_0]$$

où φ_0 est le déphasage des rayons interférant en l'absence d' OG ; $k = 2\pi/\lambda$; $L = (L_1 + L_2)/2$.

I.B.3) On appelle P la puissance lumineuse. On admet que

$$P = \iint_{\text{Surface faisceau}} E dS \quad .$$

- Déterminer la puissance lumineuse P_{mes} mesurée en sortie de l'interféromètre en fonction entre autre de la puissance P_{inc} du faisceau laser incident.
- Pour quelle valeur de φ_0 la variation $|\Delta P_{\text{mes}}|$ de puissance mesurée lors du passage de l' OG est-elle maximale ? Donner alors l'expression de cette variation maximale.

Application numérique : pour $P_{\text{inc}} = 20$ W et $L_1 \approx L_2 = 3$ km, calculer la valeur de cette variation maximale. Conclure.

I.B.4) En réalité, il faut optimiser la sensibilité de la méthode de détection. Une limitation fondamentale, en optique, est le bruit de comptage de photons (« shot noise »). On peut montrer que le rapport signal sur bruit, qu'il faut maximiser, s'écrit alors :

$$\frac{\text{signal}}{\text{bruit}} = K \frac{|\Delta P_{\text{mes}}|}{\sqrt{P_0}}$$

où P_0 est la puissance mesurée en l'absence d' OG et K une constante dimensionnée.

- Déterminer la valeur la plus intéressante pour φ_0 . À quelle type de franges cela correspond-il ?
- Expérimentalement on a $L_2 - L_1 = e = 847,9003$ mm. Cela vous semble-t-il cohérent ? Justifier.

I.B.5) On admettra que la plus grande sensibilité de l'interféromètre est atteinte pour $\varphi_0 \approx \pi$; la plus petite valeur mesurable de h_0 est alors :

$$h_{\min} = \frac{1}{4\pi L} \sqrt{\frac{h_{\text{Planck}} c \lambda}{P_{\text{inc}} T}}$$

où T est la durée de mesure, et h_{Planck} la constante de Planck $h_{\text{Planck}} = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J · s. Calculer h_{\min} pour $T = 10^{-4}$ s (on remarquera que $e \ll L_1$).

I.B.6)

- Le dispositif étudié ici permet-il de détecter les OG provoquées par les supernovæ de l'amas de la Vierge, situées à environ 100 années lumière ?
- Sachant que l'amplitude d'une OG décroît, comme une onde électromagnétique, de manière inversement proportionnelle à la distance à la source, en déduire la distance à laquelle doit se produire une supernova pour qu'elle soit détectable par ce modèle de dispositif.

Quatre interféromètres de ce type existent dans le monde ; les projets les plus avancés sont LIGO (États-Unis) et TAMA (Japon).

Partie II - Isolation sismique des éléments d'optique

Les vibrations sismiques du sol ont des amplitudes plus importantes que celles des OG . Il est donc essentiel que ces vibrations n'atteignent pas les composants optiques de l'interféromètre. On introduit alors entre la Terre et les miroirs des isolateurs mécaniques permettant une isolation verticale et horizontale. Cette partie propose d'étudier l'isolation horizontale. Le miroir sera assimilé à une masse ponctuelle M . On ne considérera que des petits déplacements ; on appelle g le champ de pesanteur, dirigé selon l'axe Oz dans le sens des négatifs.

II.A - Pendule simple

On considère un pendule simple, figure 2, formé d'un fil sans raideur, de masse négligeable, de longueur L_p ; l'une de ses extrémités est reliée au point O_1 fixe d'abscisse x_0 , l'autre à la masse M , supposée ponctuelle.

II.A.1) Établir l'équation différentielle vérifiée par $x_1(t)$. On introduira la pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{g/L_p}.$$

Donner la loi $x_1(t)$ avec des conditions initiales quelconques.

II.A.2) On soumet maintenant la masse M à une force d'amortissement

$$-\frac{M}{\tau} \frac{dx_1}{dt} \hat{e}_x.$$

Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $x_1(t)$.

Effectuer un bilan énergétique (on pourra poser $x_2 = x_1 - x_0$); donner la signification des différents termes du bilan.

II.A.3) Sur trois schémas différents, tracer l'allure de $x_1(t)$ pour chacun des trois régimes possibles (on prendra les conditions initiales $x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0$). Quelle est la signification physique de τ ? Dans le cas du régime pseudo-périodique, le faire figurer sur le graphe correspondant.

II.B - Le point O_1 est maintenant mobile, son abscisse $x_0(t)$ variant sinusoidalement : $x_0(t) = X_0 \cos \omega t$. L'ensemble est toujours assimilé à un pendule simple de longueur L_p , soumis à la force de frottement précédente.

II.B.1) À partir du principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $x_1(t)$ et faisant intervenir $x_0(t)$.

II.B.2)

a) En régime sinusoïdal établi, montrer que la relation entre les amplitudes complexes \underline{X}_1 et \underline{X}_0 est :

$$\underline{X}_1(-\omega^2 + \omega_0^2 + j\omega/\tau) = \omega_0^2 \underline{X}_0.$$

b) Tracer sur le même graphe les allures possibles de $|\underline{X}_1/\underline{X}_0|(\omega)$, en précisant les conditions d'obtention. Dans le cadre du projet Virgo, dans quel domaine faut-il se placer? Justifier.

c) *Application numérique* : $\tau = 100$ s, $\omega_0 = 2\pi \cdot 0,5$ rad \cdot s $^{-1}$, $\omega = 2\pi \cdot 10^3$ rad \cdot s $^{-1}$, $X_0 = 1 \mu\text{m}$. Calculer l'amplitude des oscillations du miroir. L'isolation est-elle suffisante?

d) On souhaite également, par un modèle du même type, mesurer l'amplitude des vibrations sismiques : dans quel domaine doit-on alors choisir ω_0 ? Justifier.

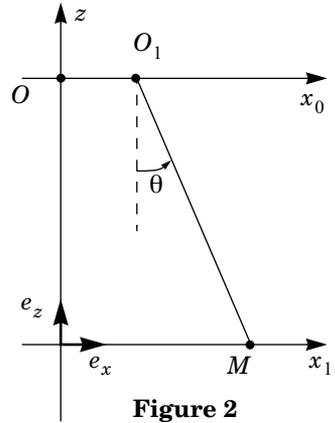
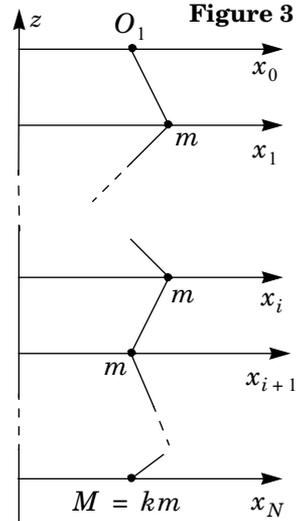


Figure 2

II.C - Amélioration du dispositif

Le dispositif est en fait formé de N pendules assimilables à des pendules simples de longueur L_p , de masse m et de temps d'amortissement τ , à l'exception du dernier qui correspond au miroir pour lequel on supposera que $M = km$ où k est un nombre sans dimension.

On note (figure 3) $x_0(t)$ la position du support, $x_N(t)$ celle du miroir, $x_1(t)$ celle de la $i^{\text{ème}}$ masse avec $i \in [1, N-1]$.



II.C.1) À partir du principe fondamental de la dynamique :

a) déterminer la norme de la tension du fil exercée sur la masse M : T_N ;

b) montrer que la norme de la tension \vec{T}_i exercée par la $(i-1)^{\text{ème}}$ masse sur la $i^{\text{ème}}$ masse (figure 4) est : $T_i = mg(N+k-i)$.

II.C.2)

a) Dédire de II.C.1-a) l'équation différentielle du mouvement du miroir faisant intervenir x_N et x_{N-1} . On fera apparaître les constantes τ et ω_0 .

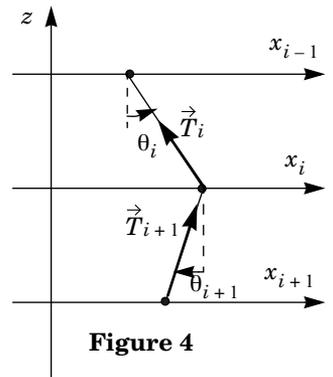
b) Montrer que l'équation différentielle satisfaite par la position de la $i^{\text{ème}}$ masse est :

$$\ddot{x}_i + \frac{\dot{x}_i}{\tau} + \omega_0^2 [2(k+N-i) - 1] x_i = \omega_0^2 [(k+N-i)x_{i-1} + (k+N-i-1)x_{i+1}]$$

II.C.3) En déduire la relation entre les grandeurs complexes \underline{x}_N et \underline{x}_{N-1} puis entre \underline{x}_{i+1} , \underline{x}_{i-1} et \underline{x}_i . On utilisera les notations

$$A_0 = \frac{-\omega^2 + j\omega/\tau}{\omega_0^2}$$

$$A_i = A_0 + 2(N+k-i) - 1 \text{ et } A_N = A_0 + 1$$



II.C.4) On peut montrer (cela n'est pas demandé au candidat) qu'alors $\underline{x}_i = B_i \underline{x}_N$ pour $i \in [0, N]$ avec

$$B_{i-1} = \frac{A_i B_i - (N+k-i-1)}{N+k-1} \text{ pour } i \in [1, N-1]$$

a) Que valent B_N et B_{N-1} ?

b) Pour cette question on se place dans le cas où $\omega \gg \omega_0$, $N \approx 1$ et $k \approx 1$. Montrer que $|A_i| \approx |A_0| \gg 1$. En déduire l'expression approchée de B_0 : $B_0 \approx -\omega^2/\omega_0^2$.

c) Dans le dispositif du projet Virgo, $N = 5$, $k = 4$ et $\omega \gg \omega_0$. Donner la limite de l'atténuation en amplitude du dispositif, au-dessus de 10 Hz. Conclure.

En réalité ce modèle est insuffisant. Le dispositif d'atténuation, appelé superatténuateur, est constitué d'une pré-isolation, puis de cinq filtres (auxquels on ajoute des ressorts pour amortir les mouvements verticaux) et enfin d'un système magnétique permettant l'immobilisation de l'ensemble. La fréquence de résonance est alors ramenée à environ 30 mHz, ce qui permet une atténuation de 10^{-14} à 10 Hz.

Partie III - Contrôle de la position du miroir

Il est impératif de se placer au maximum de sensibilité de l'interféromètre ; il faut entre autre positionner parfaitement le miroir. Pour cela, après un alignement « manuel », on soumet l'instrument à un asservissement de position. On donne le schéma bloc de l'asservissement (figure 5) :

- $E_{ref}(t)$ est une tension de référence ;

- Le filtre H_2 permet de passer de la vitesse de translation du miroir à la position de celui-ci ; $V(t)$ et $x(t)$ sont des tensions proportionnelles respectivement à la vitesse et à la position du miroir ;

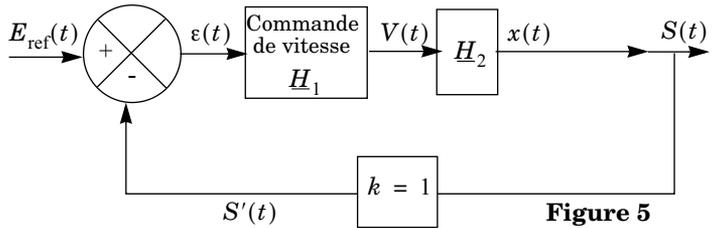
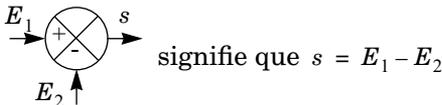


Figure 5

- On rappelle que le symbole :



III.A - Étude de la commande de vitesse

La commande de vitesse est modélisée par le circuit ci-contre figure 6. L'amplificateur opérationnel est supposé parfait et fonctionne en régime linéaire.

III.A.1) Établir la fonction de transfert $H_1 = \underline{V}/\underline{\epsilon}$. La mettre sous la forme

$$H_1 = \frac{H_0}{1 + j(\omega/\omega_1)}$$

et donner les expressions de H_0 et ω_1 . Quelle est la nature du filtre H_1 ?

III.A.2) Faire une étude asymptotique du gain en décibel et tracer l'allure de son diagramme de Bode.
On précisera les différents éléments caractéristiques.

III.B - Asservissement de la position du miroir

III.B.1) Quelle fonction de base faut-il utiliser pour obtenir la « position » $x(t)$ du miroir à partir de la « vitesse » $V(t)$?

III.B.2) Quelle réalisation la plus simple possible proposeriez-vous ? Donner alors $\underline{H}_2 = \underline{x}/\underline{V}$ (la constante de temps sera prise égale à RC).

III.B.3) Expliquer l'utilité de cet asservissement.
III.B.4)

- a) Déterminer la fonction de transfert $\underline{F} = \underline{S}/\underline{E}_{\text{ref}}$, en remarquant que $S(t) = x(t)$. Le système est-il stable ? Justifier.
- b) Faire une étude asymptotique du gain en décibel et tracer son diagramme de Bode. On précisera les différents éléments caractéristiques.
- c) Déterminer la bande passante f_{bp} du système asservi.

La position du miroir doit se faire à $\pm\delta l/2$: quelle doit être alors la vitesse maximale v_{seuil} du miroir ? On exprimera v_{seuil} en fonction de f_{bp} et δl .

III.B.5) On prend $E_{\text{ref}} = 0$ (qui correspond au minimum de la puissance de sortie). Déterminer la loi $S(t)$ et tracer son allure. On prendra les conditions initiales : $S(0) = S_0$ et $\dot{S}(0) = 0$. L'asservissement est-il correct ? Justifier.

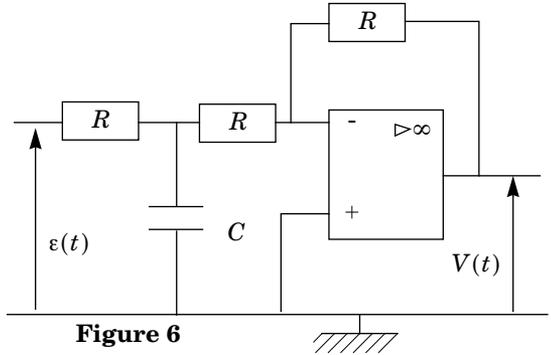


Figure 6

Partie IV - En amont de l'interféromètre : le LASER

Inventé il y a une quarantaine d'années, le LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation), au-delà de son importance dans les expériences de détection des ondes gravitationnelles, est omniprésent dans notre vie quotidienne et dans l'industrie. Il est donc essentiel d'avoir une idée de son principe de fonctionnement. Il peut se résumer ainsi :



Le résonateur a pour rôle essentiel de confiner l'énergie électromagnétique dans la cavité, en jouant le rôle de « piège » à photons, au moyen de deux miroirs. Si

ses caractéristiques nécessitent une étude poussée, ce n'est toutefois pas à ceci que nous nous intéresserons, mais plutôt à l'amplification : effet physique qui a donné son nom au laser.

IV.A - À propos de l'émission stimulée

La loi de distribution de Maxwell-Boltzmann permet de connaître le nombre d'atomes N_1 (ou de molécules) d'énergie E_1 dans un système gazeux en équilibre thermique avec un thermostat à la température T :

$$N_1 = Ke^{\left(\frac{-E_1}{kT}\right)}, \text{ où } k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ est la constante de Boltzmann.}$$

IV.A.1) Dédurre le rapport N_1/N_0 où :

- N_1 : nombre d'atomes dans l'état excité d'énergie E_1 .
- N_0 : nombre d'atomes dans l'état fondamental d'énergie E_0 .

IV.A.2) Que vaut ce rapport à la température $T = 0 \text{ K}$? Était-ce prévisible ? Justifier. Que devient ce rapport à très haute température ? Peut-il être égal à l'unité ? Justifier.

IV.A.3) Sachant que l'énergie d'un photon associé à une onde de fréquence ν est $E_{\text{photon}} = h_{\text{Planck}} \cdot \nu$, quelle est l'énergie d'un photon associé à une onde de longueur d'onde $\lambda = 1064 \text{ nm}$ correspondant à la longueur d'onde du laser placé devant l'interféromètre et que l'on assimilera à la désexcitation d'un atome du niveau d'énergie E_1 vers le fondamental ? Calculer alors, et commenter, le rapport N_1/N_0 pour la température $T = 298 \text{ K}$?

(On rappelle que $h_{\text{Planck}} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$).

IV.B - Absorption et émission spontanées

Pour passer de l'état énergétique fondamental E_0 à l'état énergétique excité E_1 , l'atome peut absorber de l'énergie sous forme radiative, c'est-à-dire absorber un photon d'énergie : $\Delta E = E_1 - E_0$.

IV.B.1) On considère un système gazeux comportant N atomes, soumis à un flux lumineux de densité énergétique $u(\nu)$. La variation élémentaire $dN_{1\text{abs}}$ du nombre d'atomes qui peuplent l'état excité d'énergie E_1 , lorsque le système est soumis au flux lumineux pendant un temps dt , est proportionnel au nombre N_0 d'atomes dans l'état fondamental, présents dans le milieu, au temps d'exposition et à la densité énergétique du flux photonique. Établir l'expression de $dN_{1\text{abs}}$ en notant C la constante de proportionnalité qui intervient dans cette expression.

IV.B.2) D'autre part, les états d'énergie supérieure au fondamental sont instables et l'atome perd, au bout d'un temps plus ou moins long, spontanément l'énergie qu'il a acquise lors de l'absorption du photon. On admet que la varia-

tion élémentaire d'atomes dN_{1em} de l'état excité, due à ce processus, est proportionnelle au nombre d'atomes dans l'état excité et au temps d'observation. Établir l'expression de dN_{1em} en notant A la constante de proportionnalité.

IV.B.3) Si les N atomes ont été placés dans une enceinte éclairée par un faisceau lumineux (flux de photons d'énergie $\Delta E = E_1 - E_0$), à l'équilibre, le nombre d'atomes dans l'état excité doit rester constant. Montrer que cet équilibre se traduit par

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{C}{A} u(\nu).$$

IV.B.4) Sachant que la densité d'énergie est donnée par la relation :

$$u(\nu) = D(\nu) \left[\exp\left(\frac{h \text{Planck} \nu}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}, \text{ que devient le rapport } \frac{N_1}{N_0} ?$$

Remarque : cette densité d'énergie est en fait celle rayonnée par un corps noir de température T .

Ce résultat est-il compatible avec la distribution de Maxwell-Boltzmann traitée dans la partie IV.A ?

IV.C - Émission induite

Einstein fait l'hypothèse de l'existence d'une émission supplémentaire qu'il appelle émission induite. Le nombre d'atomes qui se désexcitent par ce processus est donné par la relation suivante : $dN_{1ind} = BN_1 u(\nu) dt$.

IV.C.1) Montrer que cette hypothèse permet de lever la contradiction rencontrée dans la question précédente sous réserve que A , B et $D(\nu)$ vérifient une relation que l'on déterminera.

IV.C.2) Proposer un schéma fonctionnel simple qui illustre le principe de fonctionnement d'un laser. Sur ce schéma devront clairement apparaître le milieu amplificateur, la source d'énergie, les miroirs et le faisceau émergent.

••• FIN •••
