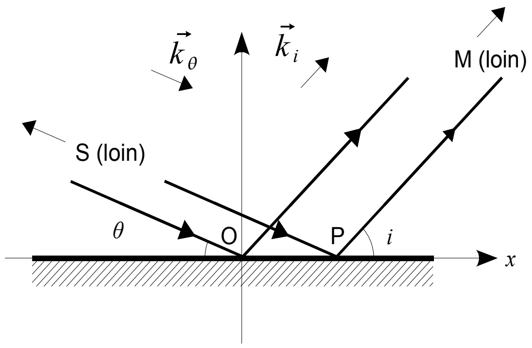
Physique I Mines PSI 2007

□ 1 - Fixons les notations :



Les chemins optiques des rayon passant par O et P valent respectivement:

$(SOM)=\vec{k}_\theta.\overrightarrow{SO}+\vec{k}_i.\overrightarrow{OM}$ et

$(SPM)=\vec{k}_\theta.\overrightarrow{SP}+\vec{k}_i.\overrightarrow{PM}$. par soustraction il vient :

$$\delta=(SPM)-(SOM)=\left(\vec{k}_\theta-\vec{k}_i\right).\overrightarrow{OP}$$

$$=x\left(\cos\theta-\cos i\right)$$

Si $ds_P(M,t)$ représente la contribution du rayon passant par P à l'amplitude en M, on a

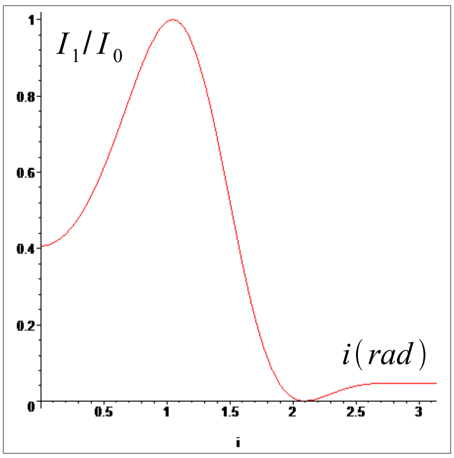
$$ds_P(M,t)=ds_O(M,t)e^{j\frac{2\pi}{\lambda}\delta}$$

Puis d'après le principe de Huygens-Fresnel :

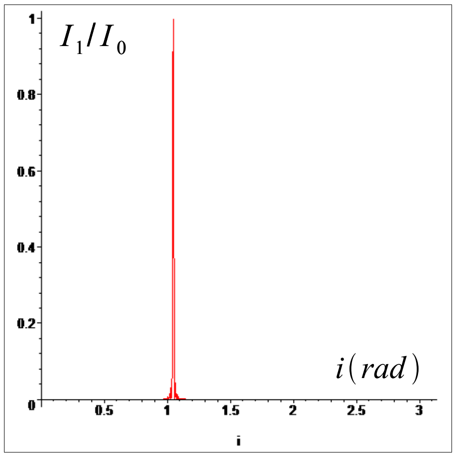
$$s(M,t)=\int_P ds_P(M,t)=K\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}\delta}\,dx$$

Enfin $I_1=ss^*$. En notant I_o la valeur maximale de I_1 , on obtient bien le résultat demandé.

□ 2 - (cas a): $\left(\frac{e}{\lambda}=1,\theta=\frac{\pi}{3}\right)$ La lumière est diffractée dans toutes les directions, avec un maximum dans la direction de l'optique géométrique . $(i=\theta)$



(cas b) $\left(\frac{e}{\lambda}=100,\theta=\frac{\pi}{3}\right)$. La lumière est réfléchie dans la direction de l'optique géométrique.



□ 3 - Comme en □ 1 :

$$\delta=(SP_2M)-(SP_1M)=\left(\vec{k}_\theta-\vec{k}_i\right).\overrightarrow{P_2P_1}$$

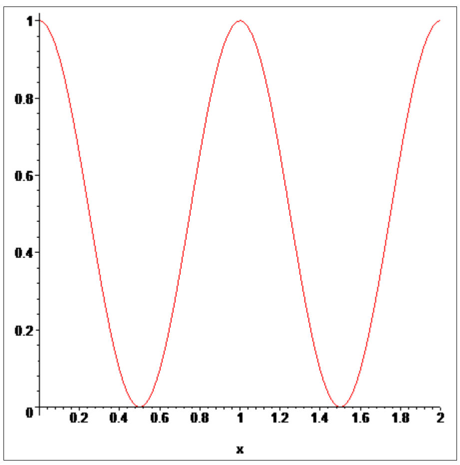
$$=-d\left(\sin\theta+\sin i\right) .$$

L'amplitude totale réfléchie par le miroir 1 vaut $s_1(M,t)=s_0\,sinc(C)$ d'après 1-. Celle issue du miroir 2 vaut alors $s_2(M,t)=s_0\,sinc(C)e^{jS}$ d'après □ 3. Enfin $I_{1,2}=(s_1+s_2)(s_1+s_2)^*$ conduit au résultat.

□ 4 - I_1 est maximale si $C=0$, soit $\cos(\theta)=\cos(i)$, qui admet comme unique solution $\theta=i$ dans $[0,\pi]$.

Il faut alors $\cos(S)=1$, soit $S=2k\pi,k\in\mathbb{N}$ car $d>0$, soit encore $\boxed{d=k\frac{\lambda}{2\sin\theta},k\in\mathbb{N}}$.

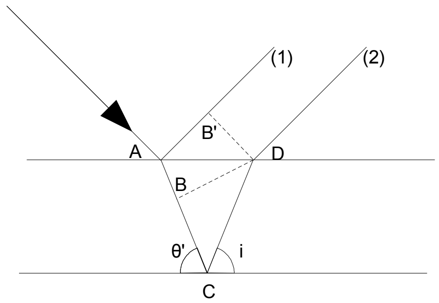
On obtient , avec $x=\frac{d}{\left(\frac{\lambda}{2\sin\theta}\right)}$:



□ 5 - Avec un grand nombre de miroirs, on réalise un <u>réseau</u> : l'intensité diffractée n'est appréciable que si la condition $d=k\dfrac{\lambda}{2\sin\theta}, k\in\mathbb{N}$ est précisément réalisée .

□ 6 - En se référant à la figure 5, l'absence de différence de marche se traduit par (AB) = (DC) que l'on peut considérer ici comme une conséquence du $\boxed{\text{théorème de Malus}}$. Il en est de même au retour.

Dès lors les points B et B' sont en phase sur le dessin suivant :



la différence de marche (2) - (1) vaut alors $\boxed{\delta=(BCD)=2n_h d\sin\theta'}$ après un calcul géométrique.

□ 7 - Pour $\theta'=\dfrac{\pi}{2}$, $\delta=2n_h d$. Les valeurs associées à un maximum de lumière réfléchie sont telles que $\boxed{d=k\dfrac{\lambda}{2n_h}, k\in\mathbb{N}}$. Pour un minimum, on obtient $\boxed{d=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2n_h}, k\in\mathbb{N}}$.

□ 8 - Le spectre visible correspond environ à l'intervalle $\boxed{[400\,\mathrm{nm}, 700\,\mathrm{nm}]}$. 555 nm correspond au maximum du rayonnement solaire ou au maximum de perception de l' oeil. Les valeurs de L résultant de la question □ 7 corespondant à des longueurs d'ondes visibles sont (en nm) :

$\boxed{\ell_1=277{,}5\,,\ L_1=370\,,\ \ell_2=462{,}5\,.}$

□ 9 - Pour être constructif, les mélanges doivent être respectivement à 24 % pour (ab) et 38% pour (a'b'), par lecture sur la figure 6 pour $L=L_1$. Par contre à 40°C, on obtient (en nm) $L_{(ab)}=252$ et $L_{(a'b')}=274$. C'est pour (a'b') que l'extinction est la meilleure car $L\approx\ell_1$. En conclusion on choisira $\boxed{\text{le mélange (a'b') à 38\%}}$.

□ 10 -De $L=L_0\exp(-\alpha T)$, on tire

$$\alpha=\frac{1}{(40-37)}\ln\left(\frac{L_{37}}{L_{40}}\right)$$. Soit

numériquement : $\alpha_{(ab)}=0{,}11\,°C^{-1}$ et $\alpha_{(a'b')}=0{,}10\,°C^{-1}$. Une précision de $100\,°C^{-1}$ est nécessaire pour le bain des bébés dinosaures.

□ 11 - $D_{vol}=\int_{\text{tuyau}}\vec{v}\,.\,\vec{dS}$ avec $\vec{dS}=2\pi r\,dr\,\hat{z}$.

On a par définition $D_{vol}=v_{\text{moy}}^{\text{débit}}S$, soit

$$\boxed{v_{\text{moy}}^{\text{débit}}=\frac{2v_0}{a^2}\int_0^a r\,f(r)\,dr.}$$

Tandis que $\boxed{v_{\text{moy}}=\dfrac{v_0}{a}\displaystyle\int_0^a f(r)\,dr.}$

□ 12 - C'est immédiat en cartésiennes en remarquant que $y=r\cos\theta$ (Fig 7):

$\vec{rot}\,\vec{A}=\vec{rot}(B_{1m}\,y\cos(\omega_0 t)\hat{z})=B_{1m}\cos(\omega_0 t)\vec{rot}\,y\hat{z}$

et $\vec{rot}\,y\,\hat{z}=\dfrac{\partial y}{\partial y}\hat{x}=\hat{x}$.

□ 13 - $e_{CD}=\int_{-a}^{a}(v\,\hat{z}\wedge B\,\hat{x}).dy\,\hat{y}=2B\int_0^a v(y)\,d(y)$, ce qui donne bien le résultat. Elle n'est pas à priori proportionnelle au débit volumique d'après □ 11 : ce n'est pas la bonne intégrale.

AN : $e_M=5\,\mathrm{mV}$.

□ 14 - des tensions parasites de quelques mV peuvent exister en continu où à 50 Hz du fait de l'environnement industriel.

□ 15 - La couche limite est celle ou les phénomène de viscosité ne peuvent être négligés. Sans viscosité, la vitesse serait uniforme; on en déduit (Fig. 8) que $\delta=A_pA_\infty$.

□ 16 - Le calcul des intégrales de □ 11 conduit à

$$v_{\text{moy}}=v_0\left(1-\frac{1}{p+1}\right) \quad\text{et}\quad v_{\text{moy}}^{\text{débit}}=v_0\left(1-\frac{2}{p+2}\right) .$$

La différence relative vaut sensiblement $\dfrac{1}{p}$ pour p grand. On en déduit qu'il faut $\boxed{p>100}$.

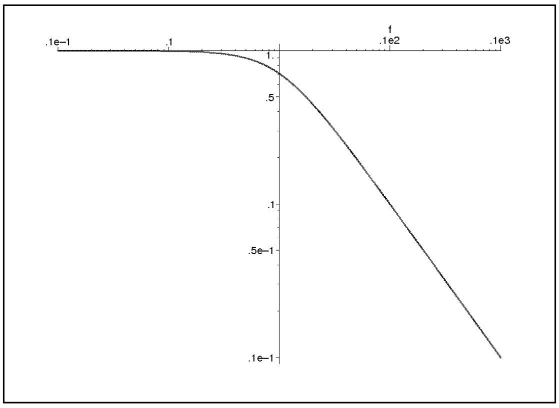
L'étude de $f(r)$ montre que $\delta=A_pA_\infty=\dfrac{a}{p}$.

soit $\mathrm{Re}>p^2=10\,000$, ce qui est bien compatible avec $\mathrm{Re}>2000$.

□ 17 - En remplaçant □ 11 dans □ 13 , on obtient :

$\boxed{e_M=\dfrac{2B}{\pi a}D_{vol}}$. A.N : $D_{vol}=0{,}55\,L.s^{-1}$. Il faut environ $\boxed{\text{trois minutes}}$ pour remplir la baignoire.

□ 18 - $R_1V_1=(R_1+R_2)V_e$. Le filtre de sortie est un passe bas. R doit être grand devant l'impédance de sortie du multiplieur, par exemple $1\,M\Omega$. La capacité vaut alors $C=\dfrac{1}{2\pi R f_c}$ = $\boxed{150\,\mu F}$.



□ 19 - A la sortie du multiplieur, on trouve deux composantes de fréquence $f_b - f_0$ et $f_b + f_0$.

La moins bien filtrée sera la première: son amplitude complexe à la sortie du filtre sera proportionnelle à $\dfrac{1}{\left(1+j\dfrac{(f_b - f_0)}{f_c}\right)}$. Un filtre passe bande aura quand à lui une amplitude de sortie proportionnelle à

$$\frac{1}{\left(1+jQ(f_b/f_0 - f_0/f_b)\right)} \approx \frac{1}{\left(1+j2Q\dfrac{(f_b - f_0)}{f_0}\right)}$$

pour $f_b \approx f_0$. Les deux expressions se rejoignent si $Q = f_0/2f_c$ selon ce point de vue, soit $\boxed{Q=20}$ (au lieu de 40 dans l'énoncé). Le bruit à 50 Hz sera atténué d'un facteur 10, ce qui est peut être un peu faible. Une fréquence plus élevée aurait sans doute donné un meilleur résultat.

$$V_X = k\,A\cos(\omega_0 t)\frac{R_1+R_2}{R_1}e_{\mathrm{CD}}$$
$$= k\,A\frac{B_1}{\pi a}(1+\cos(2\,\omega_0 t))\frac{R_1+R_2}{R_1}D_{vol} \quad .$$

Après filtrage, il vient :

$$\boxed{V_s = k\,A\frac{B_1}{\pi a}\frac{R_1+R_2}{R_1}D_{vol}} \quad .$$