PSI Physique-chimie 2020 : corrigé

Problème 1 : Transmission d'énergie électrique sans fil

Partie A / Étude des bobines utilisées

A1. L'équation de Maxwell-Thomson s'écrit $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$; celle de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{\jmath} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)}$$

Dans le cadre de l'ARQS, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit $\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{\jmath}}$.

A2. Soit un contour fermé orienté $\mathcal{L}$. Par le théorème de Stokes,

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

où S est une surface s'appuyant sur $\mathcal{L}$. Avec $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{\jmath}$, $\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}}$.

A3. L'approximation du solénoïde infini est valable si $\boxed{\ell \gg a}$.

A4. Symétries : $(\mathrm{M},\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des courants. $\vec{B}(\mathrm{M})$, devant être perpendiculaire à ce plan, est porté par $\vec{u}_z$.
Invariances : la distribution de courants est invariante par translation selon z, et par rotation selon θ : B ne dépend donc que de r. Finalement, $\boxed{\vec{B}(\mathrm{M}) = B(r)\vec{u}_z}$.

A5. Soit un contour d'Ampère rectangulaire ABCD (côté AB confondu avec l'axe Oz), de longueur b et largeur c, entièrement contenu dans le solénoïde. $\vec{B}$ étant selon $\vec{u}_z$ en tout point,

$$\oint_{\text{ABCD}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = [B(0) - B(c)]b$$

Ce contour n'enlace aucun courant. Par le théorème d'Ampère, il vient $B(0) = B(c), \forall c < a$: $\vec{B}(\mathrm{M})$ est **uniforme** dans le solénoïde.
Pour un contour rectangulaire ABCD (côté AB confondu avec Oz) de longueur b et largeur $c > a$,

$$\oint_{\text{ABCD}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = B_{\text{int}}b$$

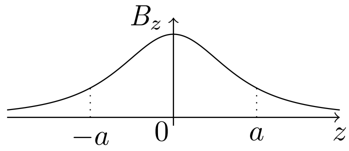
car le champ magnétique est supposé nul à l'extérieur du solénoïde. Le courant enlacé par ce contour valant $I_{\text{enlacé}} = N(b/\ell)i(t)$, il vient, d'après le théorème d'Ampère,

$$\boxed{\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 N i(t)}{\ell}\,\vec{u}_z}$$

A6. Tout plan passant par M et contenant $\vec{u}_z$ est plan d'antisymétrie des courants, et donc plan de symétrie du champ magnétique. Ainsi, en tout point M de l'axe Oz, $\vec{B}(\mathrm{M})$ est porté par $\boxed{\vec{u}_z}$.

A7. Le plan $z = 0$ est un **plan de symétrie des courants**, et donc un **plan d'antisymétrie du champ magnétique**. Cette propriété se traduit par $\boxed{B_z(-z) = B_z(z), \forall z}$.

A8. Le champ magnétique est maximal en $z = 0$ et vaut



$$\boxed{B_{z,\,\max} = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a}}$$

Par définition de $z_{1/2}$, $B_z(z_{1/2}) = B_{z,\,\max}/2$. Il vient

$$\frac{a^2}{2({z_{1/2}}^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{4a}$$

$$2a^3 = ({z_{1/2}}^2 + a^2)^{3/2}$$

$$\boxed{z_{1/2} = a\sqrt{2^{2/3} - 1} \approx 0{,}77\,a}$$

A9. Étudions la carte de champ du solénoïde.

— Le plan Π, passant par l'axe vertical de la carte de champ et perpendiculaire à celle-ci, est un plan d'antisymétrie des courants. Ce plan est donc un plan de symétrie du champ magnétique. Pour tout couple de points (L,M) symétriques par rapport à Π, on remarque en effet que

$$\boxed{\vec{B}(\mathrm{M}) = \mathrm{sym}_{\Pi}[\vec{B}(\mathrm{L})]}$$

— Le plan Π^*, passant par l'axe horizontal de la carte de champ et perpendiculaire à cette dernière, est un plan de symétrie des courants, soit également un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Pour tout couple de points (L,N) symétriques par rapport à Π^*, on note effectivement que

$$\boxed{\vec{B}(\mathrm{N}) = -\mathrm{sym}_{\Pi^*}[\vec{B}(\mathrm{L})]}$$

On retrouve les mêmes éléments de symétrie sur la carte de champ de la bobine plate.

A10. Les lignes de champ se resserrent aux endroits où **le champ magnétique est plus intense**. Elles sont parallèles aux endroits où **le champ magnétique est uniforme**. Ces propriétés viennent de l'équation locale $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$: **le champ magnétique est à flux conservatif**.

Partie B / Transfert de puissance : rendement de Yates

B1. Par définition,

$$\boxed{P_{\text{reçue}} = (u_{R_1} + u_{L_1})i = R_1 i^2 + L_1 i \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

L'intensité varie en $\cos(\omega t)$; en utilisant les résultats usuels

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \langle \cos(\omega t)\sin(\omega t) \rangle = \left\langle \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right\rangle = 0$$

$$\boxed{\langle P_{\text{reçue}} \rangle = \frac{R_1 {I_0}^2}{2}}$$

B2. On utilise l'expression du champ magnétique donnée par l'énoncé, en $z = d$, supposé uniforme au niveau de la bobine réceptrice :

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0\, N_1\, i(t)\, a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}\, N_2 S_2 = \frac{\pi\mu_0\, N_1\, N_2\, i(t)\, a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}}$$

B3. Il s'agit du phénomène d'**induction électromagnétique**, découlant de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

B4. On calcule la fem en utilisant la **loi de Faraday** :

$$\boxed{e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi\mu_0\, N_1\, N_2\, a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}\, \omega I_0 \sin(\omega t)}$$

B5. L'inductance propre de la bobine réceptrice étant négligée, cette dernière est parcourue par un courant $i_2 = e/R_2$. De fait,

$$\boxed{P_{\text{géné}} = e\, i_2 = \frac{e^2}{R_2} = \frac{1}{R_2}\left[\frac{\pi\mu_0\, N_1\, N_2\, a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}\, \omega I_0 \sin(\omega t)\right]^2}$$

Puisque $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2$,

$$\boxed{\langle P_{\text{géné}} \rangle = \frac{1}{2R_2}\left[\frac{\pi\mu_0\, N_1\, N_2\, a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}\, \omega I_0\right]^2}$$

B6. En utilisant les résultats précédents,

$$\eta = \frac{1}{2R_2}\left[\frac{\pi\mu_0\, N_1\, N_2\, a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}\, \omega I_0\right]^2 \frac{2}{R_1 {I_0}^2}$$

$$\boxed{\eta = k\, \frac{{\mu_0}^2\, {N_1}^2 {N_2}^2\, a^4 b^4\, \omega^2}{R_1 R_2\, (d^2 + a^2)^3} \qquad \text{avec} \qquad k = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Partie C / Modélisation du couplage : inductance mutuelle

C1. Le flux magnétique créé par un circuit 1, parcouru par un courant i_1, à travers un circuit 2, s'écrit

$$\boxed{\Phi_{12} = M i_1 \qquad (\text{ou } \Phi_{21} = M i_2)}$$

M est en **Henry**.

C2. La loi des mailles dans le circuit 1 s'exprime

$$\boxed{E = R_1 i_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}}$$

De même, la loi des mailles dans le circuit 2 s'exprime

$$\boxed{0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}$$

C3. On mutiplie la première loi des mailles par i_1, la seconde par i_2 :

$$Ei_1 = R_1 {i_1}^2 + L_1 i_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M i_1 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad 0 = R_2 {i_2}^2 + L_2 i_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M i_2 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

En sommant ces deux équations, on obtient

$$\boxed{Ei_1 = R_1 {i_1}^2 + R_2 {i_2}^2 + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 {i_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 {i_2}^2 + M i_1 i_2}$$

Ce bilan montre que la puissance fournie par le générateur, Ei_1, est en partie **dissipée par effet Joule dans les résistances**, en partie **stockée sous forme magnétique dans les bobines**.

C4. En reprenant l'expression de $\mathcal{E}_{\text{mag}}$,

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} {i_2}^2 \left[L_1 \left(\frac{i_1}{i_2} \right)^2 + L_2 + 2M \left(\frac{i_1}{i_2} \right) \right]$$

Avec $x = i_1/i_2$,

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} {i_2}^2 \, P(x) \qquad \text{avec} \qquad P(x) = L_1 x^2 + 2Mx + L_2}$$

C5. Puisque $\mathcal{E}_{\text{mag}} \geq 0$, $P(x) \geq 0$. Graphiquement, la fonction $x \to P(x)$ est une parabole tournée vers le haut. Pour assurer que cette fonction soit positive pour tout x, il faut que le discriminant de $P(x)$ soit négatif ou nul :

$$\Delta = (2M)^2 - 4 L_1 L_2 \leq 0$$

Il vient $\boxed{M \leq \sqrt{L_1 L_2} = M_{\text{max}}}$.

C6. On peut par exemple citer :

- les transformateurs, permettant d'élever ou d'abaisser la tension dans les lignes électriques ;
- les moteurs électriques, comportant un circuit primaire fixe et un circuit secondaire mobile ;
- les alternateurs, fonctionnant dans le sens contraire des moteurs ;
- le chauffage par induction (four, plaque) ;
- la détection à boucle inductive (détecteur de métaux, de véhicules) ;
- la transmission d'informations par radio-identification (RFID), mise en œuvre par exemple dans les portiques de sécurité...

Partie D / Résultats expérimentaux

D1. En observant la figure 9, on trouve $\boxed{\eta_{\text{max}} = 7{,}5 \cdot 10^{-2}}$ et $\boxed{f_{\text{max}} = 15 \text{ kHz}}$.

D2. Puisque $\omega = 2\pi f$, la loi de Yates prédit une **variation quadratique du rendement avec la fréquence**. Aux basses fréquences, η croît avec f (cette variation semble plutôt linéaire) ; aux hautes fréquences, η décroît avec f, **en désaccord avec la loi de Yates**.

D3. D'après le cours, $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$.

D4. Avec la question précédente, $\omega_{\text{max}} = 2\pi f_{\text{max}} = 1/\sqrt{LC_{\text{p}}}$. D'où

$$\boxed{C_{\text{p}} = \frac{1}{L(2\pi f_{\text{max}})^2} = 1{,}3 \cdot 10^{-7} \text{ F}}$$

D5. Si on écarte la bobine 2 sur le côté, **les lignes de champ s'inclinent par rapport au plan de ses spires**. De fait, **le flux magnétique $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ diminue**, de même que η. En observant la carte de champ de la figure 5, **cet effet est d'autant plus marqué que d est petit**.

D6. Cette fois, le rendement diminue beaucoup moins sur les côtés. En tournant la bobine 2, **celle-ci reste approximativement alignée avec les lignes de champ** : **le flux magnétique Φ varie donc très peu**, de même que η, contrairement à la question précédente.

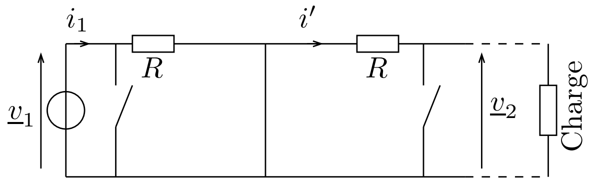
Partie E / Fonction de transfert

E1. En l'absence de couplage, $M = 0$ soit $\boxed{k = 0}$: on en déduit $\boxed{\underline{v}_2 = 0}$. On peut vérifier ce résultat en remplaçant dans le montage la bobine d'inductance propre kL par un fil. Par un théorème du pont diviseur de tension,

$$\boxed{\underline{v}_2 = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + R + \mathrm{j}L\omega}\, 0 = 0}$$

E2. Une loi des mailles au niveau du circuit secondaire impose $0 = R\underline{i}' + \underline{v}_2$. Or, $\underline{i}' = 0$ d'après la loi des nœuds, soit $\boxed{\underline{v}_2 = 0}$ aux basses fréquences. Ce résultat est confirmé par la fonction de transfert :

$$\boxed{\lim_{\omega \to 0} |\underline{H}| = 0}$$



E3.
- Aux basses fréquences,
$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}\omega L k}{R}$$
On en déduit pour G_{dB} une pente de $\boxed{+20 \text{ dB/décade}}$. Graphiquement, on constate effectivement une croissance de -65 à -45 dB quand f varie de 10^2 à 10^3 Hz.
- Aux hautes fréquences,
$$\underline{H} \sim \frac{k}{\omega^2 LC(k^2 - 1)}$$
On en déduit pour G_{dB} une pente de $\boxed{-40 \text{ dB/décade}}$. Graphiquement, on constate effectivement une décroissance de -60 à -100 dB quand f varie de 10^5 à 10^6 Hz.

E4. Par identification, on obtient $\boxed{H_0 = k}$, $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$.

E5. Il y a phénomène de résonance lorsque $|\underline{H}|$ est maximal pour une fréquence particulière f_r non nulle à déterminer. En posant $x = \omega/\omega_0$, cela revient à imposer que la quantité suivante

$$f(x) = (1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$$

soit minimale. Calculons sa dérivée :

$$f'(x) = -4x + 4x^3 + \frac{2x}{Q^2} = 4x\left(-1 + x^2 + \frac{1}{2Q^2}\right)$$

La dérivée s'annule pour $x_\mathrm{r} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ (la racine carrée est bien définie car $Q = 17$). On en déduit

$$\omega_\mathrm{r} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{R^2C}{2L}}$$

$$\boxed{f_\mathrm{r} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R^2C}{2L}} = 31\ \mathrm{kHz}}$$

Cette valeur est **cohérente** avec le diagramme de Bode en gain fourni.

E6. D'après la question précédente, f_r **ne dépend pas de k**. La fréquence de résonance ne dépend donc pas de la distance d séparant les circuits primaire et secondaire, ce qui est très pratique : on peut transférer un maximum de puissance **sans avoir besoin d'accorder la fréquence de travail à la mesure de d**.

Partie F / Résultats expérimentaux

F1. La fréquence de résonance expérimentale vaut $f_\mathrm{r} = 34$ kHz, du **même ordre de grandeur** que la prédiction théorique, 31 kHz. L'écart peut être dû aux capacités parasites non prises en compte, à la précision sur la valeur des composants...

F2. Le facteur de qualité valant $Q = 17$, on peut approximer la pulsation à la résonance : $\omega_\mathrm{r} \approx \omega_0$. D'après l'expression simplifiée de $\underline{H}$, Le gain à la résonance vaut alors

$$G_{\mathrm{dB,\,max}} = 20\log(Qk)$$

Expérimentalement, on relève $G_{\mathrm{dB,\,max}} = -6$ dB à la résonance, soit

$$\boxed{k = \frac{10^{-6/20}}{Q} = 0{,}03}$$

L'hypothèse $\boxed{k \ll 1}$ est donc vérifiée.

F3. On relève par exemple à la fréquence $f = 50$ kHz un gain $G_{\text{dB}} \approx -20$ dB. À cette fréquence, $x = \omega/\omega_0 = 1{,}5$. Soit

$$G_{\text{dB}} = 20\log\left[\frac{k}{\sqrt{(1-x^2)^2+(x/Q)^2}}\right] = -20$$

Par ailleurs,

$$G_{\text{dB}} = 20\log\left[\frac{Qk}{\sqrt{Q^2(1-x^2)^2+x^2}}\right] = G_{\text{dB, max}} - 10\log\left[Q^2(1-x^2)^2+x^2\right]$$

$$10\log\left[Q^2(1-x^2)^2+x^2\right] = 14$$

$$Q^2(1-x^2)^2+x^2 = 10^{1,4}$$

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{10^{1,4}-x^2}{(1-x^2)^2}} \approx 4}$$

On est assez loin de la valeur attendue : $Q = 17$. On pourrait à nouveau invoquer des effets non pris en compte : résistances internes des bobines, capacités parasites, pertes par rayonnement, effet de peau abordé dans la sous-partie suivante.

F4. Sur la figure 16, on lit $\boxed{\eta'_{\text{max}} = 2{,}2\cdot 10^{-1}}$. On a $\eta'_{\text{max}} \simeq 3\eta_{\text{max}}$: **le couplage résonant s'avère 3 fois plus efficace que le couplage non résonant**.

F5. Il faut travailler à la fréquence de résonance : **le rendement décroît assez vite dès que l'on s'en éloigne**. Afin d'optimiser la transmission de puissance, il faut choisir $Q = \sqrt{L/C}/R$ le plus grand possible, donc ***R* et *C* plutôt petits**, et ***L* plutôt grand**.

F6. Un noyau ferromagnétique permet d'augmenter le champ $\vec{B}$, donc les inductances propres et mutuelles, soit aussi **le facteur de qualité et le coefficient de couplage**. Avec plusieurs résonateurs successifs, on guide le flux magnétique, ce qui augmente le **coefficient de couplage**. Dans les deux cas, **la transmission de puissance est améliorée**.

Partie G / Travaux de recherche

G1. Le pas de l'hélice $h/n = 3{,}8$ cm étant très inférieur au rayon r, on peut approximer la longueur de l'hélice par

$$\boxed{\ell = n\,2\pi r = 9{,}9 \text{ m}}$$

On obtiendrait le même résultat avec la formule exacte $\ell = \sqrt{(n\,2\pi r)^2 + h^2}$. En utilisant l'expression de R_0 donnée,

$$\boxed{R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0\omega}{2\sigma}}\frac{\ell}{4\pi a} = \sqrt{\frac{\mu_0\pi f}{\sigma}}\frac{\ell}{4\pi a} = 2{,}1\cdot 10^{-1}\ \Omega}$$

G2. Il s'agit du phénomène d'**effet de peau** : les courants se concentrent à la périphérie du conducteur, sur une épaisseur typique δ dont la formule est rappelée dans l'énoncé. La surface parcourue par les courants est de l'ordre de $S' = 2\pi a\,\delta$. En l'injectant dans l'expression classique de la résistance d'un conducteur ohmique,

$$R_0 = \frac{\ell}{\sigma S'} = \sqrt{\frac{\mu_0\omega}{2\sigma}}\frac{\ell}{2\pi a}$$

À un facteur 2 près (d'origine géométrique), **on trouve la même expression que l'énoncé**.

G3. L'épaisseur de peau vaut

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} = 21\ \mu\text{m} \ll a}$$

Il faut donc tenir compte du fait que **les courants sont localisés en surface**.

G4. Le facteur de qualité Q varie en $1/R_0$. S'il y a de l'oxyde de cuivre moins conducteur en surface, **la résistance augmente donc Q diminue** : c'est cohérent.

G5. La forme de $i(x,t)$ est celle d'une **onde stationnaire monochromatique**, comme l'élongation d'une **corde vibrante** fixée en ses deux extrémités par exemple. On remarque que i s'annule en $x = \pm\ell/2$ quelque soit t, et atteint un maximum (en valeur absolue) en $x = 0$. Ce mode possède donc **deux nœuds** et **un ventre**.

G6. Entre t et $t + \mathrm{d}t$, la variation de charge du tronçon d'épaisseur $\mathrm{d}x$ s'écrit

$$\mathrm{d}^2 q = [\lambda(x,t+\mathrm{d}t) - \lambda(x,t)]\mathrm{d}x \simeq \frac{\partial \lambda}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

Cette variation de charge peut par ailleurs s'écrire

$$\mathrm{d}^2 q = [i(x,t) - i(x+\mathrm{d}x,t)]\mathrm{d}t \simeq -\frac{\partial i}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

On en déduit

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{I_0 \pi}{\ell} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos(\omega t)$$

En intégrant,

$$\boxed{\lambda(x,t) = \frac{I_0 \pi}{\ell \omega} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \sin(\omega t)}$$

en ayant choisi la constante d'intégration nulle (pas de charges si $I_0 = 0$). On en déduit l'amplitude

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{I_0 \pi}{\ell \omega}}$$

Les profils $i(x,t)$ et $\lambda(x,t)$ sont temporellement déphasés de $\boxed{\pi/2}$: ils sont en quadrature.

G7. Calculons $q_0(t)$:

$$q_0(t) = \int_{-\ell/2}^{0} \lambda(x,t)\,\mathrm{d}x$$

$$q_0(t) = -\frac{\lambda_0 \ell}{\pi} \sin(\omega t) \left[\cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\right]_{-\ell/2}^{0} = -\frac{\lambda_0 \ell}{\pi} \sin(\omega t)$$

L'imparité spatiale de la fonction $\lambda(x,t)$ montre immédiatement qu'on a une charge $-q_0(t)$ dans l'autre moitié du fil. On en déduit leur amplitude commune

$$\boxed{q_0 = \frac{\lambda_0 \ell}{\pi}}$$

G8. Dans l'ARQS, le temps de propagation τ est négligeable devant la période T des signaux. Ici, $T \simeq 10^{-7}$ s et $\tau \simeq \ell/c \simeq 3 \cdot 10^{-8}$ s. On n'a pas $\tau \ll T$, donc **l'ARQS n'est pas valable**. On pouvait le prévoir en remarquant que l'intensité $i(x,t)$ n'est pas la même en tout point du fil, à un même instant t.

Problème 2 : Chimie des batteries lithium-ion

Partie H / Équation-bilan de fonctionnement

H1. Li se situe à la **2**$^{\text{ème}}$ ligne, à la **1**$^{\text{ère}}$ colonne. Par les règles de Klechkowski et Pauli,

$$\boxed{\mathrm{Li}\ (Z=3)\ :\ 1s^2\ \mathbf{2s^1}}$$

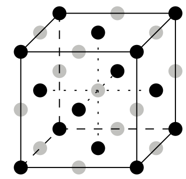
H2. Suite à la perte d'un électron, l'ion Li^+ a une configuration électronique $1s^2$ (sous-couche saturée) soit celle d'un gaz noble, d'où sa **stabilité**.

H3. La réduction des ions Li^+ se traduit par la demi-équation $\boxed{\mathrm{Li}^+_{(aq)} + \mathrm{e}^- = \mathrm{Li}_{(s)}}$.

L'insertion de Li dans le graphite s'écrit $\boxed{\mathrm{Li}_{(s)} + \mathrm{C}_{6(s)} = \mathrm{LiC}_{6(s)}}$.

H4. En sommant les équations précédentes, $\boxed{\mathrm{Li}^+_{(aq)} + \mathrm{C}_{6(s)} + \mathrm{e}^- = \mathrm{LiC}_{6(s)}}$.

H5. Les sites octaédriques (disques gris) sont situés au centre de chaque arête, et au centre de la maille. La relation de contact entre atomes C selon les diagonales des faces s'écrit $a\sqrt{2} = 4R_C$. Les sites O peuvent contenir un atome Li de rayon maximal r_{max} tel qu'il y ait contact C-Li-C sur une arête :



$$R_C + 2r_{max} + R_C = a$$

En injectant la relation précédente,

$$\boxed{r_{max} = \frac{a}{2} - R_C = (\sqrt{2}-1)R_C = 29\ \text{pm}}$$

H6. On remarque que $R_{Li} > r_{max}$: **c'est impossible de faire un alliage d'insertion**. En réalité, **le graphite n'adopte pas une maille cfc**, mais une structure bidimensionnelle « en feuillets ».

H7. La désinsertion des ions Li^+ se traduit par $\boxed{\mathrm{LiCoO}_{2(s)} = \mathrm{Li}^+_{(aq)} + \mathrm{CoO}_{2(s)} + \mathrm{e}^-}$.

H8. On somme les demi-équations aux deux électrodes, en simplifiant les électrons et les ions Li^+ :

$$\boxed{\mathrm{LiCoO}_{2(s)} + \mathrm{C}_{6(s)} = \mathrm{LiC}_{6(s)} + \mathrm{CoO}_{2(s)}}$$

Partie I / Masse de la batterie

I1. Les demi-équations précédentes montrent que pour un ion Li^+ formé à une électrode puis consommé à l'autre, il y a un électron mis en jeu. 1 mole d'ions Li^+ correspondent donc à $\mathcal{N}_a$ électrons, de charge $e\mathcal{N}_a = \mathcal{F}$ en valeur absolue. La quantité de matière n dans une masse m d'ions Li^+ vaut $n = m/M_{Li}$. On en déduit la charge pour 1 gramme d'ions Li^+ :

$$\boxed{Q_{max} = \frac{m\mathcal{F}}{M_{Li}} = 1{,}390 \cdot 10^4\ \text{C}}$$

I2. La capacité de la batterie vaut

$$Cap = 2\ 675\ \text{mA.h} = 2\ 675 \times \frac{3\ 600}{1\ 000}\ \text{A.s} = 9{,}630 \cdot 10^3\ \text{C}$$

On en déduit la masse d'ions Li^+ dans la batterie :

$$\boxed{m = \frac{Cap}{Q_{max}} = 0{,}692\ 8\ \text{g}}$$

I3. Le lithium est **très rare, peu recyclable** et **les ressources sont limitées**. Il est extrait de minéraux dans des **mines très polluantes** dans des pays en voie de développement, avec défrichage massif des forêts qui gênent l'excavation...

I4. La puissance fournie par la batterie s'exprime $P = Ei$ avec $i = \delta q/\mathrm{d}t$. On obtient l'énergie $\mathcal{E}$ en intégrant P sur la durée de fonctionnement :

$$\boxed{\mathcal{E} = \int_0^{Cap} E\delta q = E\,Cap = 9{,}6 \text{ W.h}}$$

I5. La masse de la batterie s'obtient en divisant l'énergie $\mathcal{E}$ par l'énergie massique fournie :

$$\boxed{m_{\mathrm{b}} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{\text{massique}}} = 48 \text{ g : le résultat obtenu est crédible.}}$$

Partie J / Rendement

J1. On utilise la relation $\Delta_{\mathrm{r}}G = -\nu\mathcal{F}E$, avec $\nu = 1$ électron échangé. Par ailleurs, tous les constituants engagés dans l'équation-bilan sont solides ; chaque constituant est considéré pur, seul dans sa phase. On peut donc assimiler enthalpie libre et enthalpie libre standard de réaction :

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{r}}G^\circ = -\mathcal{F}E = -3{,}5 \cdot 10^2 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

J2. Le lien entre entropie standard de réaction et enthalpie libre standard de réaction s'écrit

$$\Delta_{\mathrm{r}}S^\circ = -\left(\frac{\partial \Delta_{\mathrm{r}}G^\circ}{\partial T}\right)_P$$

Dans l'approximation d'Ellingham, on peut réécrire la dérivée comme

$$\Delta_{\mathrm{r}}S^\circ = -\frac{\Delta_{\mathrm{r}}G_2^\circ - \Delta_{\mathrm{r}}G_1^\circ}{T_2 - T_1} = \mathcal{F}\frac{E_2 - E_1}{T_2 - T_1}$$

À $T_1 = 280$ K, $E_1 = E_{\mathrm{ref}} + 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ V ; à $T_2 = 310$ K, $E_2 = E_{\mathrm{ref}} + 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ V. On en déduit

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{r}}S^\circ = -8{,}7 \text{ J.K}^{-1}\text{.mol}^{-1}}$$

J3. Avec la relation entre grandeurs standard de réaction $\Delta_{\mathrm{r}}G^\circ = \Delta_{\mathrm{r}}H^\circ - T\Delta_{\mathrm{r}}S^\circ$,

$$\Delta_{\mathrm{r}}H^\circ = \Delta_{\mathrm{r}}G^\circ + T\Delta_{\mathrm{r}}S^\circ$$

En l'appliquant par exemple à la température $T = 310$ K pour laquelle $E = 3{,}598\,5$ V,

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{r}}H^\circ = -\mathcal{F}E + T\Delta_{\mathrm{r}}S^\circ = -3{,}5 \cdot 10^2 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

J4. L'énergie chimique s'apparente à la variation d'enthalpie au cours de la durée de fonctionnement de la pile : $|\Delta H| = n|\Delta_{\mathrm{r}}H^\circ|$. Or, avec une masse $m = 0{,}692\ 8$ g d'ions Li^+,

$$n = \frac{m}{M_{\mathrm{Li}}} = 9{,}981 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

soit $|\Delta H| = 3{,}5 \cdot 10^4$ J. Par ailleurs, l'énergie électrique vaut $\mathcal{E} = 9{,}6$ W.h $= 3{,}5 \cdot 10^4$ J. On en déduit le rendement

$$\boxed{\eta = \frac{\mathcal{E}}{|\Delta H|} \approx 1 \text{ : le rendement est très proche de } 100\,\%.}$$

Partie K / Caractéristiques de l'électrolyte

K1. Un solvant protique est capable de **céder des protons** H^+. Exemple : $\mathbf{H_2O}$.

K2. La loi d'Arrhenius est donnée par

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\ln k}{\mathrm{d}T} = \frac{E_\mathrm{a}}{RT^2}}$$

avec k la constante de vitesse (son unité dépend de l'ordre de la réaction), T la température (en K), E_a l'énergie d'activation (en J.mol^{-1}), $R = 8{,}314$ J.mol^{-1}.K^{-1} la constante des gaz parfaits.

K3. Si la température augmente, k augmente : la vitesse de réaction est augmentée, mais cela n'inversera pas le sens spontané de la réaction : **la batterie ne se recharge pas**.

K4. On avait montré que $\Delta_\mathrm{r}H^\circ < 0$: la décharge est effectivement exothermique. En chauffant la batterie, d'après la relation de Van't Hoff

$$\frac{\mathrm{d}\ln K^\circ}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta_\mathrm{r}H^\circ}{RT^2}$$

l'équilibre est déplacé dans le sens endothermique donc celui de la charge. Bien que cette idée soit valable d'un point de vue thermodynamique, elle est probablement très peu efficace puisque $\Delta_\mathrm{r}G^\circ$ **ne dépend presque pas de la température** ($|\Delta_\mathrm{r}S^\circ|$ est faible).