

I.1) Conducteur mobile dans \vec{B} stationnaire : induction dans le barreau mobile. Rq : on néglige partout le champ magnétique propre du circuit. Alors f.é.m. $e = -vBD$ (circuit orienté par $+\vec{e}_z$), intensité $I = \frac{e}{R+R'} = -\frac{vBD}{R+R'}$. Alors

$U_{AB} = V_A - V_B = -RI = \frac{R}{R+R'}vBD$. On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ (puisque $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$) et donc, en supposant \vec{E} uniforme dans le barreau mobile, on y a $\vec{E} = \frac{R}{R+R'}vB\vec{e}_y$ (en toute rigueur on ne peut déterminer ainsi que la composante y du champ).

I.2) La force qui met les électrons (libres) en mouvement est la force de Lorentz $\vec{F} = -e(\vec{E} + (\vec{v} + \vec{u}) \wedge \vec{B})$ où \vec{u} est la vitesse relative des électrons libres par rapport au barreau (en fait le terme en $\vec{u} \wedge \vec{B}$ ne contribue pas à proprement parler à la *mise en mouvement*). La force *totale* qui s'exerce sur un électron inclut aussi les actions exercées par le réseau d'ions, force qui peut être modélisée par $-\frac{m}{\tau}\vec{u}$ où τ est le temps de relaxation du conducteur et m la masse d'un électron. D'où $\vec{f} = -e(\vec{E} + (\vec{v} + \vec{u}) \wedge \vec{B}) - \frac{m}{\tau}\vec{u}$. Est-ce vraiment ce qui est attendu ??

I.3) Le conducteur étant neutre, on a $\vec{J} = -Ne\vec{u}$ (N étant la densité particulière des électrons libres). Par ailleurs, l'intensité étant stationnaire, $\vec{f} = \vec{0}$. D'où $\vec{u} = -\frac{e\tau}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{u} \wedge \vec{B})$. Et donc $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{u} \wedge \vec{B})$, avec $\sigma = \frac{Ne^2\tau}{m}$. \vec{J} est nécessairement selon \vec{e}_y , $\vec{v} \wedge \vec{B}$ l'est aussi ; $\vec{u} \wedge \vec{B}$ est selon \vec{e}_x et donc on s'aperçoit que \vec{E} a nécessairement, outre une composante selon \vec{e}_y , une composante selon \vec{e}_x (le champ de Hall). Cette dernière composante est négligeable dans un métal, de même donc que le terme en $\vec{u} \wedge \vec{B}$. Et donc la loi d'Ohm s'écrit $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. (Peut-être suffisait-il de la donner).

I.4) $I = -2 \text{ mA}$; $\vec{E} = +0,2 \text{ (V.m}^{-1}\text{)} \vec{e}_y$; $\vec{v} \wedge \vec{B} = -0,4 \text{ (V.m}^{-1}\text{)} \vec{e}_y$.

II.1.a) $\vec{f}_p = -\overrightarrow{\text{grad}}P$

II.1.b) Voir cours.

II.1.c) $\vec{f}_B = \vec{J} \wedge \vec{B} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} = \sigma B(E - Bv)\vec{e}_x$

II.1.d) $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \vec{e}_x + \sigma B(E - Bv)\vec{e}_x$. Tous les autres termes que $\overrightarrow{\text{grad}}P$ sont selon \vec{e}_x , donc $\overrightarrow{\text{grad}}P$ aussi, ce qui veut dire que P est indépendante de y et de z .

II.2.a) Ecoulement stationnaire donc $P(x)$ et $\vec{v} = v(z)\vec{e}_x$. D'où $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{0}$, et l'équation du mouvement projetée sur x donne $\frac{dP}{dx} = \eta \frac{d^2v}{dz^2} + \sigma B(E - Bv)$. Le membre de gauche ne dépend que de x , celui de droite que de z ; c'est donc une constante : $\frac{dP}{dx} = K$.

II.2.b) La résolution de l'équation différentielle en $v(z)$: $\eta \frac{d^2v}{dz^2} + \sigma B(E - Bv) = K$, compte tenu de $v(\pm d) = 0$, donne

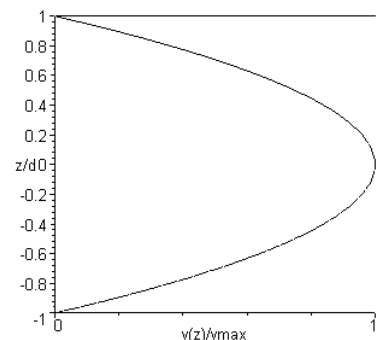
$$v(z) = \frac{\sigma BE - K}{\sigma B^2} \left(1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{H_a z}{d}\right)}{\text{ch}(H_a)} \right)$$

$$\text{II.2.c)} \quad v^{\text{moy}} = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d v(z) dz = \frac{\sigma BE - K}{\sigma B^2} \left(1 - \frac{\text{th}(H_a)}{H_a} \right)$$

$$\text{II.2.d)} \quad \text{Pour } H_a \ll 1, \text{ un D.L.2 en } H_a \text{ de } v(z) \text{ donne } v(z) = \frac{\sigma BE - K}{\sigma B^2} \frac{H_a^2}{2} \left(1 - \frac{z^2}{d^2} \right) :$$

profil parabolique (le dessin est fait pour $\sigma BE > K$).

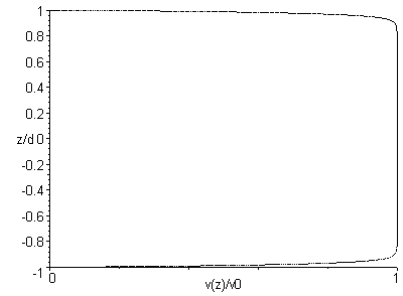
II.2.e) Pour $H_a \gg 1$, $\text{ch}\left(\frac{H_a z}{d}\right) \approx \frac{e^{H_a \frac{|z|}{d}}}{2}$ et $\text{ch}(H_a) \approx \frac{e^{H_a}}{2}$, d'où la forme voulue avec



$\delta = \frac{d}{H_a}$ et $v_0 = \frac{\sigma B E - K}{\sigma B^2}$. On voit donc que dans ce cas, $v_0 \approx v^{\text{moy}}$. v_0 étant aussi

la vitesse maximale, on en déduit que la vitesse est dans ce cas quasi uniforme (voir allure question suivante).

II.2.f) $H_a \approx 1500$; $\delta \approx 6,9 \mu\text{m}$. Voir allure ci-contre (pour le cas $\sigma B E > K$ et pour laquelle H_a n'a été pris égal qu'à 50 pour des raisons de lisibilité : $1/H_a$ est l'épaisseur caractéristique relative des zones de fort gradient de vitesse au contact des parois solides).

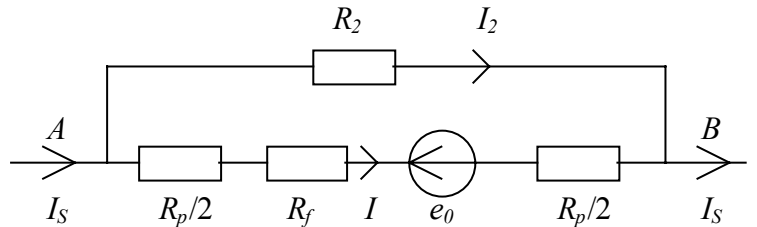


III.1.a) $K = \frac{dP}{dx} = \sigma B(E - Bv_0)$. Si $E > Bv_0$, (et avec $B > 0$), alors $\frac{dP}{dx} > 0$; on peut utiliser le système comme pompe.

III.1.b) Erreur d'unité dans l'énoncé ($\text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ pour Q). $E = E_y = 1 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $v_0 = \frac{Q}{lD}$, et donc $K = 2,88 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}$. D'où $\Delta P = 1,15 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

III.1.c) $J \vec{e}_y = \sigma(E \vec{e}_y + v_0 \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_z)$, donc $J = \sigma(E - v_0 B)$. Or $J = \frac{I}{LD}$ et $E = \frac{V_A - V_B}{l}$. D'où $V_A - V_B = e_0 + R_f I$ avec $e_0 = lv_0 B$ et $R_f = \frac{l}{\sigma LD}$.

III.1.d) Attention, énoncé quelque peu ambigu : il semble que les points A et B ne sont plus les mêmes qu'à la question précédente. Je propose alors le diagramme ci-contre. Ce n'est sans doute pas ce qui était attendu ; d'autres solutions (moins correctes ?) peuvent donc être proposées : des différences existeront alors avec cette solution dans la suite de cette partie III.



On a
$$\begin{cases} I_S = I + I_2 \\ V_A - V_B = R_1 I + e_0 \\ V_A - V_B = R_2 I_2 \end{cases}$$
 d'où l'on tire

$I_S = -\frac{e_0}{R_1} + (V_A - V_B) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$. Par ailleurs $\Delta P = KL = \sigma B(E - Bv_0)L$, avec $E = \frac{e_0 + R_f I}{l}$ (ATTENTION c'est ici

qu'intervient l'ambiguïté évoquée : on ne prend en compte que la ddp aux bornes de R_f et e_0), $e_0 = lv_0 B$, et I tiré des relations ci-dessus. On arrive finalement à $\Delta P = \frac{B}{D(R_1 + R_2)} \left[R_2 I_S - \frac{B}{D} Q \right]$. Ne pas « voir » le problème concernant les points A et B conduit bien sûr à un résultat différent.

III.1.e) L'étude de la fonction $\Delta P(B)$ est facile ; ΔP atteint effectivement un maximum (si $I_S > 0$) pour

$$B = B^{\text{max}} = \frac{DR_2 I_S}{2Q} ; \text{ ce maximum vaut } \Delta P^{\text{max}} = \frac{(R_2 I_S)^2}{4Q(R_1 + R_2)}.$$

III.1.f) $B^{\text{max}} = 0,67 \text{ T}$; $\Delta P^{\text{max}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Que penser du fait que ce ΔP^{max} est inférieur au ΔP du III.1.b ???? Une rapide estimation, à vérifier, semble indiquer qu'au III.1.b, I était de l'ordre de 46000 A alors qu'ici il ne serait de l'ordre « que » de 5000 A, ce qui expliquerait le résultat....

III.2.a) $e_0 = -(R_1 + R_{\text{ext}})I$, d'où l'on tire $I = -\frac{lv_0 B}{R_1 + R_{\text{ext}}}$.

III.2.b) On a toujours $\Delta P = KL = \sigma B(E - Bv_0)L = \frac{\sigma B L R_f I}{l}$, ce qui donne maintenant $\Delta P = -\frac{B^2 v_0 l}{(R_1 + R_{\text{ext}})D} < 0$. Ce

dispositif est un générateur électrique. La puissance mécanique reçue par le fluide est $P_{\text{méca}} = -Q \Delta P = \frac{(Bv_0 l)^2}{R_1 + R_{\text{ext}}}$.

III.2.c) $\rho = \frac{R_{\text{ext}} I^2}{P_{\text{méca}}} = \frac{R_{\text{ext}}}{R_1 + R_{\text{ext}}}$. Les seules « pertes » sont celles par effet Joule dans R_1 ; sinon la conversion d'énergie (mécanique vers électrique) est parfaite.

III.2.d) $I = -12500 \text{ A}$; $\rho = 67\%$.

III.2.e) On place un dispositif du type du 2) (générateur électrique) sur le circuit primaire ; la puissance électrique produite sert à alimenter une pompe du type du 1) sur le circuit secondaire, pour en assurer la circulation. Intérêt : aucune pièce mécanique : pas d'usure ?

IV.1) On a $\vec{B}_i(x,t)$. Comme on est en régime permanent, il varie avec x et t en $e^{j(\omega t - kx)}$. Par raison de symétrie, il est dirigé selon \vec{e}_z . On pose donc $\vec{B}_i = B_{z0}^i e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_z$. L'équation de Maxwell-Ampère donne alors, dans l'ARQP, $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}_i + \vec{B}^0) = \mu_0 \vec{J}$. Mais $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}^0 = \vec{0}$ (les sources de \vec{B}^0 ne sont pas dans le milieu). D'où $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_i = \mu_0 \vec{J}$. Ce qui nous amène à $B_{z0}^i = \frac{\mu_0}{jk} J_0$, ou, ce qui est la même chose, $B_z^i = \frac{\mu_0}{jk} J_y$.

IV.2) $\vec{B}_t = \left(B_0 + \frac{\mu_0}{jk} J_0 \right) e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_z$. L'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t}$ mène alors à $\vec{E} = u_B \left(B_0 - j \frac{\mu_0}{k} J_0 \right) e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_y$.

IV.3) Loi d'Ohm $\vec{J} = \sigma (\vec{E} + v \vec{e}_x \wedge \vec{B}_t)$. En projection sur y , cela donne après calculs $J_0 = \frac{\sigma u_B (1-G)}{1 + j R_m (1-G)} B_0$, ou, ce qui est la même chose, $J_y = \frac{\sigma u_B (1-G)}{1 + j R_m (1-G)} B_0^0$.

IV.4) On reporte dans l'expression de E_y pour arriver à $E_y = \frac{u_B}{1 + j R_m (1-G)} B_0^0$.

IV.5) $P_{\text{elec}} = \langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle$, où \vec{J} et \vec{E} sont les grandeurs réelles. Avec les grandeurs complexes utilisées jusqu'ici, P_{elec} peut s'écrire $P_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{J} \cdot \vec{E}^*)$. Après calculs cela donne $P_{\text{elec}} = \frac{\sigma u_B^2 B_0^2 (1-G)}{2 [1 + R_m^2 (1-G)^2]}$.

IV.6) L'équation du mouvement du fluide s'écrit $\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{J} \wedge \vec{B}_t$ (on suppose que la vitesse est constante, et que $H_a \gg 1$ de manière à pouvoir ne pas prendre en compte les forces de viscosité). D'où $-\overrightarrow{\text{grad}} P = -\vec{J} \wedge \vec{B}_t$. Et donc $\vec{f} = \langle -\overrightarrow{\text{grad}} P \rangle = -\frac{1}{2} \text{Re}[\vec{J} \wedge \vec{B}_t^*] = \frac{B_0^2 \sigma u_B (G-1)}{2 [1 + R_m^2 (1-G)^2]} \vec{e}_x$. Faut-il comprendre la force moyenne « exercée par le fluide

extérieur à l'élément de volume considéré ? »... C'est ce que je fais là... Car sinon la force moyenne totale (en prenant en compte la force électromagnétique) est nulle, puisque l'accélération est nulle... Alors la densité volumique de puissance mécanique reçue en moyenne par le fluide est $P_{\text{meca}} = \langle -\overrightarrow{\text{grad}} P \cdot \vec{v} \rangle = \vec{f} \cdot \vec{v}$, puisque \vec{v} est constante. D'où

$$P_{\text{meca}} = \frac{B_0^2 \sigma u_B (G-1) v}{2 [1 + R_m^2 (1-G)^2]} = \frac{B_0^2 \sigma u_B^2 (G-1) G}{2 [1 + R_m^2 (1-G)^2]}$$

IV.7) $G < 1$ (c'est-à-dire $v < u_B$). Donc $P_{\text{elec}} > 0$ et $P_{\text{meca}} < 0$: le fluide reçoit de l'énergie sous forme électrique et en donne (au fluide extérieur ?) sous forme mécanique : ce dispositif est une pompe. On peut dire de manière imagée que, comme $u_B > v$, le champ « tire » le fluide. Le rendement est alors logiquement $r = \frac{P_{\text{meca}}}{P_{\text{elec}}} = -\frac{v}{u_B} = -G$. Je propose de prendre l'opposé (ou alors c'est pour P_{meca} qu'il fallait prendre l'opposé).

IV.8) $R_m = \mu_0 \frac{\sigma u_B}{k} = \mu_0 \frac{\sigma u_B^2}{\omega} = 130$; $r = -G = -90\%$ (là encore je propose de prendre l'opposé). Une tranche de fluide de longueur dx et de section S reçoit donc (algébriquement) la puissance mécanique moyenne $\frac{B_0^2 \sigma u_B (G-1) v}{2 [1 + R_m^2 (1-G)^2]} S dx$.

Cette puissance peut aussi s'écrire sous la forme $+P(x)Sv - P(x+dx)Sv = -Sv \frac{dP}{dx}$. Par identification, on trouve

$$\frac{dP}{dx} \text{ et ensuite } \Delta P = \frac{dP}{dx} L = \frac{B_0^2 \sigma u_B (1-G) L}{2 [1 + R_m^2 (1-G)^2]}. \text{ A.N. : } \Delta P = 9,6.10^4 \text{ Pa.}$$

IV.9) Si $G > 1$, échanges d'énergie de sens inversés : $P_{\text{elec}} < 0$ et $P_{\text{meca}} > 0$. On a un générateur électrique.