2007 Mines-Ponts Filère PC

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Dans ce corrigé, nous notons les vecteurs en gras (sans flèche), par exemple **g**, et les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{z}}$.

CORDE PESANTE ET VIBRANTE

A:ÉTUDE CINÉMATIQUE D'UN MOUVEMENT BIDIRECTIONNEL

Première expérience

□ 1 - $z(G_1) = \frac{1}{m_T}\int_A^B \mu z'(M)dz'$. La contribution de A à C est nulle, il reste $z(G_1) = \frac{1}{m_T}\int_0^z \mu z' dz'$, avec $m_T = \mu L$, donc $\boxed{z(G_1) = \frac{1}{2}\frac{z^2}{L}}$.

□ 2 - On dérive cette expression par rapport au temps, en utilisant $\dot z = v_0$ Il vient $\dot z(G_1) = \frac{1}{L} z\ \dot z = \frac{v_0}{L} z$, puis

$\boxed{\ddot z(G_1) = \frac{v_0^2}{L} = \text{cste}}$.

□ 3 - De la même façon $z(G_2) = \frac{1}{2}\frac{z^2}{L}$ et cette fois $\dot z = - v_0$, ce qui donne $\dot z(G_2) = -\frac{v_0}{L} z$, puis

$\boxed{\ddot z(G_2) = \frac{v_0^2}{L} = \ddot z(G_1)}$.

□ 4 - Dans le premier cas, G_1 monte avec une vitesse qui augmente, dans le deuxième cas, G_2 descend avec une vitesse qui diminue. Donc $\mathbf{a}(G_1) = \mathbf{a}(G_2)$.
Le point C (c'est le point de l'espace, pas celui de la corde qui est immobile ni celui de la table lui aussi immobile) de la corde se déplace horizontalement à la même vitesse (en norme) que l'extrémité B le fait verticalement, donc à la vitesse v_0 constante. $\boxed{\text{L'accélération de } C \text{ est donc nulle}}$.

Seconde expérience

□ 5 - La composante selon $\hat{\mathbf{z}}$ de l'accélération de B est $- g$ = cste, donc: $\dot z(B) = - g\,t + \dot z(B,t=0) = - g\,t$, puis $z(B) = -\frac{1}{2} g\,t^2 + z(B,t=0) = -\frac{1}{2} g\,t^2 + L$. B atteint la table pour $t = \tau$ et $z(B) = 0$, ce qui donne $\boxed{\tau = \sqrt{\frac{2L}{g}}}$.

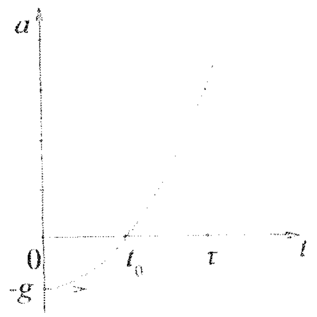
$\tau = \sqrt{\frac{2x24X10^{-1}}{10}}$ donc $\boxed{\tau = 0{,}69 \text{ s}}$.

□ 6 - $z(G) = \frac{1}{2}\frac{z^2}{L}$ avec $z = z(B) = L - \frac{1}{2} g\,t^2$, $\dot z = - g\,t$.

Donc $\mathbf{AG} = \frac{1}{2L}(L - \frac{1}{2} g\,t^2)^2\ \hat{\mathbf{z}}$. En dérivant par rapport au temps, on obtient $\mathbf{v}(G) = -\frac{g}{L}(L\,t - \frac{1}{2} g\,t^3)\ \hat{\mathbf{z}}$, puis

$\mathbf{a}(G) = - g\left(1-\frac{3g}{2L}t^2\right)\ \hat{\mathbf{z}}$, ou $\boxed{\mathbf{a}(G) = -g\left(1-3\frac{t^2}{\tau^2}\right)\ \hat{\mathbf{z}}}$.

De plus $v(t) = - g\left(t-\frac{t^3}{\tau^2}\right)$.



□ 7 - On note $a(t) = - g\left(1-3\frac{t^2}{\tau^2}\right)$. La vitesse de G présente un minimum lorsque $a(G)$ s'annule, donc pour $t_0 = \tau / \sqrt{3}$.

$t_0 = \sqrt{\frac{2L}{3g}} = \sqrt{\frac{2x24x10^{-1}}{3x10}}$ d'où: $\boxed{t_0 = 0{,}40 \text{ s}}$.

Immédiatement après $t = 0$, $v \approx 0$; si $t \to \tau$, $v \to 0$, donc puisque $v < 0$ au départ, il existe une valeur minimale de v, pour une date comprise entre 0 et τ.

$v_{min} = v(t = \tau/\sqrt{3})$, donc $v_{min} = \frac{-2L}{\tau\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{L}{\tau}$,$v_{min} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{24X10^{-1}}{0{,}69}$, donc $\boxed{v_{min} = -2{,}7 \text{ m.s}^{-1}}$.

B: ÉTUDE DYNAMIQUE DE LA CHUTE VERTICALE

□ **8** - Le principe fondamental de la dynamique (appelé dans la suite PFD) appliqué à la corde donne $m_T\,\mathbf{a}(G) = m_T\,\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{balance}\to\text{corde}}$.

Le PFD appliqué à la balance (on note ressort le système qui maintient l'équilibre de la balance) donne $\mathbf{0} = \mathbf{F}_{\text{corde}\to\text{balance}} + \mathbf{F}_{\text{ressort}}$, avec $\mathbf{F}_{\text{ressort}} = -\,\mathbf{P}_a$, où $\mathbf{P}_a$ est le poids apparent (indication de la balance).

Dans le cas d'une corde statique $\mathbf{a}(G) = \mathbf{0}$, on en déduit $\mathbf{P}_a = -\,\mathbf{F}_{\text{ressort}} = \mathbf{F}_{\text{corde}\to\text{balance}} = -\,\mathbf{F}_{\text{balance}\to\text{corde}} = m_T\,\mathbf{g}$.

Donc dans $\boxed{\text{le cas d'une corde statique, le poids apparent est le poids réel}}$

Dans cette expérience $\mathbf{a}(G) = -g\left(1-3\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)\hat{\mathbf{z}} = \left(1-3\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)\mathbf{g}$.

La masse de la corde sur la balance est $m(t) = \mu\,(L - z(t)) = \mu\,\dfrac{1}{2}\,g\,t^2$, avec $m_T = \mu\,L$, ce qui donne $m(t) = m_T\,\dfrac{t^2}{\tau^2}$.

Le PFD (principe fondamental de la dynamique) appliqué à la corde donne $m_T\,\mathbf{a}(G) = m_T\,\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{balance}\to\text{corde}}$.

En supposant encore l'équilibre de la balance: $\mathbf{0} = \mathbf{F}_{\text{corde}\to\text{balance}} + \mathbf{F}_{\text{ressort}}$, avec $\mathbf{F}_{\text{ressort}} = -\,\mathbf{P}_a$.

Donc $\mathbf{P}_a = m_T\,(\mathbf{g} - \mathbf{a}(G)) = m_T\,\mathbf{g}\left(1-\left(1-3\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)\right) = m_T\,\mathbf{g}\;3\dfrac{t^2}{\tau^2}$, d'où $\boxed{\mathbf{P}_a = 3\,m(t)\,\mathbf{g}}$.

□ **9** - La balance indique le poids total de la corde lorsque $m(t) = m_T$, donc pour $t_1 = \tau/\sqrt{3} = t_0$.

En effet, pour $t = t_0$, la vitesse de G est minimale, donc l'accélération de G est nulle: c'est comme en statique: $\mathbf{P}_a = m_T\,\mathbf{g}$.

□ **10** - La partie de corde $[0,z']$ exerce une tension $T(z')\,\hat{\mathbf{z}}$ sur la partie $[z',z]$. Le PFD appliqué au morceau de corde compris entre z' et $z' + \mathrm{d}z'$, de vitesse constante $-\,\mathbf{v}_0$, donne

$\mathbf{0} = \mathrm{d}m\,\mathbf{a} = T(z')\,\hat{\mathbf{z}} - T(z'+\mathrm{d}z')\,\hat{\mathbf{z}} - \mu\,\mathrm{d}z'\,g\,\hat{\mathbf{z}}$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z'} = -\,\mu\,g$ et donc: $T(z') = -\,\mu\,g\,z' + \text{cste}$.

Or en $z' = 0$, $T(z' = 0) = 0$, donc: $T(z') = -\,\mu\,g\,z'$.

De plus en $z' = z = L - v_0\,t$, $-\,T(z')\,\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{F}$, d'où: $\mathbf{F} = \mu\,g\,z\,\hat{\mathbf{z}}$ et donc: $\boxed{\mathbf{F} = \mu\,(L - v_0 t)\,\mathbf{g}}$.

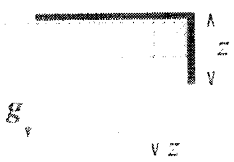
□ **11** - Le PFD appliqué à la corde s'écrit $m_T\,\mathbf{a}(G) = \mathbf{F} + m_T\,\mathbf{g} - \mathbf{P}_a$, donc $\mathbf{P}_a = \mathbf{F} + m_T\,\mathbf{g} - m_T\,\mathbf{a}(G)$.

Comme $\mathbf{v}(B) = -\,v_0\,\hat{\mathbf{z}}$, la question 2 donne $\mathbf{a}(G) = \dfrac{v_0^2}{L}\,\hat{\mathbf{z}}$. De plus $m_T = \mu\,L$, donc

$\mathbf{P}_a = -\,(\mu\,v_0\,t\,g + \mu\,v_0^2)\,\hat{\mathbf{z}}$.

Or le poids réel est $\mathbf{P}_{\text{réel}} = m(t)\,\mathbf{g} = -\,\mu\,v_0\,t\,g\,\hat{\mathbf{z}}$. On voit donc que la norme du poids apparent est plus grande que celle du poids réel et la différence vaut $\boxed{P_0 = \mu\,v_0^2}$ qui est bien une constante.

C: CHUTE BIDIRECTIONNELLE DE LA CORDE



□ **12** - À partir des forces exercées sur la corde, nous n'arrivons pas à établir une équation ayant pour solution l'expression de la question suivante. Nous utilisons une méthode énergétique.

À la date t, tous les points de la corde ont la même norme de vitesse qui vaut $\dot{z} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, donc l'énergie cinétique vaut $E_C = \dfrac{1}{2}\,m_T\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\,\mu\,L\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2$.

L'énergie potentielle vaut $E_P = -\,m_V\,g\,z(G_V) = -\,\mu\,z\,g\,\dfrac{1}{2}\,z = -\dfrac{1}{2}\,\mu\,g\,z^2$.

Comme la corde est parfaitement flexible et sans frottements, la puissance des actions intérieures est nulles, donc $0 = \dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mu\left(L\,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} - g\,z\,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$. Cette relation est vraie pour tout $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, donc: $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{g}{L}\,z = 0$.

□ **13** - En posant $\alpha = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$, la solution générale de l'équation est $z(t) = A\,\mathrm{ch}(\alpha\,t) + B\,\mathrm{sh}(\alpha\,t)$. De plus à $t = 0$, $z = 0$, donc $A = 0$, et $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = V_0$, donc $B = \dfrac{V_0}{\alpha}$. D'où $z(t) = \dfrac{V_0}{\alpha}\,\mathrm{sh}(\alpha\,t)$.

Pour une chute libre, $\dfrac{\mathrm{d}^2z_{CL}}{\mathrm{d}t^2} = g$, donc $\dfrac{\mathrm{d}z_{CL}}{\mathrm{d}t} = g\,t + V_0$ puis $z_{CL}(t) = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + V_0\,t$.

On peut comparer les deux expressions pour des dates petites telles que $\alpha t << 1$. dans ce cas,

$z(t) \approx \dfrac{V_0}{\alpha}\left(\alpha t + \dfrac{1}{6}(\alpha t)^3\right) = V_0 t + \dfrac{1}{6} V_0 \alpha^2 t^3$. Donc $z(t) - z_{CL}(t) \approx -\dfrac{1}{2} g t^2 + \ldots$

Les deux courbes ont la même allure au départ (même tangente), puis $z_{CL}(t)$ augmente un peu plus vite que $z(t)$.

□ **14** - La partie AC est de longueur $L - z$ (et homogène de masse $m_H = \mu (L - z)$), donc $\mathbf{AG_H} = \dfrac{1}{2}(L - z)\,\hat{\mathbf{x}}$. De plus $\mathbf{OA} = z\ \hat{\mathbf{x}}$, donc $\mathbf{OG_H} = \dfrac{1}{2}(L - z)\,\hat{\mathbf{x}} + z\ \hat{\mathbf{x}}$, soit $\boxed{\mathbf{OG_H} = \dfrac{1}{2}(L + z)\,\hat{\mathbf{x}}}$.

La partie CB est de longueur z (et homogène de masse $m_V = \mu z$), donc $\mathbf{AG_V} = \dfrac{1}{2} z\,\hat{\mathbf{z}}$. De plus $\mathbf{OC} = L\ \hat{\mathbf{x}}$, donc

$\boxed{\mathbf{OG_V} = L\ \hat{\mathbf{x}} + \dfrac{1}{2} z\,\hat{\mathbf{z}}}$.

□ **15** - $\mu L\,\mathbf{OG} = \mu (L - z)\,\mathbf{OG_H} + \mu z\,\mathbf{OG_V}$. La projection sur $\hat{\mathbf{x}}$ donne $L X = (L - z)\dfrac{1}{2}(L + z) + z L$, celle sur $\hat{\mathbf{z}}$ donne $L Z = z\dfrac{1}{2} z$, donc $\boxed{X = z + \dfrac{1}{2L}(L^2 - z^2) \text{ et } Z = \dfrac{z^2}{2L}}$. Ce dernier résultat est bien le même que celui de la question 1. Est-ce une parabole ?? NON

Lorsque z tend vers L, on voit qualitativement que G tend vers le milieu de AB, et que l'asymptote est verticale.

□ **16** - Tous les points ayant la même norme de vitesse $\dot{z}$, l'énergie cinétique est $\boxed{E_T = \dfrac{1}{2} m_T \dot{z}^2 = \dfrac{1}{2}\mu L \dot{z}^2}$.

□ **17** - $E_c(P) = \dfrac{1}{2} m_T v(G)^2 = \dfrac{1}{2}\mu L\left(\dot{X}^2 + \dot{Z}^2\right)$, avec $\dot{X} = \dot{z}\left(1 - \dfrac{z}{L}\right)$ et $\dot{Z} = \dot{z}\dfrac{z}{L}$, d'où

$\boxed{E_c(P) = \dfrac{1}{2}\mu L \dot{z}^2\left(1 + 2\dfrac{z}{L} + 2\dfrac{z^2}{L^2}\right)}$.

□ **18** - $E_c^{(H)} = \dfrac{1}{2} m_H v(G_H)^2 = \dfrac{1}{2}\mu \dot{z}^2\ \dfrac{1}{4}(L - z)$ et $E_c^{(V)} = \dfrac{1}{2} m_V v(G_V)^2 = \dfrac{1}{2}\mu z \dot{z}^2\ \dfrac{1}{4}$.

□ **19** - $E_T - [E_c^{(H)} + E_c^{(V)} + E_c(P)] = \dfrac{1}{2}\mu \dot{z}^2\left(-\dfrac{L}{4} + 2z - 2\dfrac{z^2}{L}\right) \neq 0$.

Cette différence correspond à l'énergie cinétique de rotation de la corde autour de G.