

## CENTRALE PC 2001 – PHYSIQUE I

### Partie I – Etude thermodynamique d'un jouet : l'oiseau buveur

#### I.A – Pourquoi le dichlorométhane monte-t-il dans le tube ?

I.A.1)

a)  $v_V$  (resp.  $v_L$ ) est le volume massique du dichlorométhane sous forme vapeur (resp. liquide).

L'approximation  $v_L \ll v_V$  est valable si on est loin du point critique.

$$b) v_V \approx \frac{RT_0}{Mp_{VS}(T_0)}, \left( \frac{dp_{VS}}{dT} \right)_{T_0} \approx \frac{l_V}{T_0 v_V} \approx \frac{l_V Mp_{VS}(T_0)}{RT_0^2}$$

$$\text{soit } \left( \frac{dp_{VS}}{dT} \right)_{T_0} \approx \frac{406.10^3 \times 85.10^{-3} \times 4,1.10^4}{8,31 \times (293)^2} \approx 1,98.10^3 \text{ Pa.K}^{-1}$$

I.A.2)

a) D'après la condition d'équilibre d'un liquide incompressible :

$$p_{VS1} = p_{VS2} + \mu g h_{eq}.$$

$$\text{Or : } p_{VS2} = p_{VS}(T_0 - \theta) \approx p_{VS}(T_0) - \theta \left( \frac{dp_{VS}}{dT} \right)_{T_0} = p_{VS1} - \theta \left( \frac{dp_{VS}}{dT} \right)_{T_0},$$

$$\text{donc : } \boxed{h_{eq} = \frac{\theta}{\mu g} \left( \frac{dp_{VS}}{dT} \right)_{T_0}}.$$

b) Le liquide atteint le réservoir du haut si :

$$\theta > \frac{\mu g L}{\left( \frac{dp_{VS}}{dT} \right)_{T_0}} = \frac{1,3.10^3 \times 10 \times 3.10^{-2}}{1,98.10^3} = 0,20 \text{ K}$$

#### I.B – Pourquoi le récipient supérieur reste-t-il froid ?

$$I.B.1) \Delta H = (\Delta H)_{\text{dichloro}} + (\Delta H)_{\text{eau}} = -\mu c_P \Delta V_f \theta + l_{Ve} \Delta m_e.$$

I.B.2) Le système évolue de manière adiabatique et sous pression extérieure constante donc  $\Delta H = 0$ . Ainsi :

$$\Delta m_e = \frac{\mu c_P \Delta V_f \theta}{l_{Ve}} = \frac{1,3.10^3 \times 1,010^3 \times 0,1.10^{-4} \times 0,4}{2,6.10^6} = 2.10^{-6} \text{ kg},$$

$$\Delta V_e = \frac{\Delta m_e}{\mu_e} = \frac{2.10^{-6}}{10^3} = 2.10^{-9} \text{ m}^3.$$

$\frac{\Delta V_e}{S} = 2.10^{-5} \text{ m} = 20 \mu\text{m}$  est très inférieure à l'épaisseur du feutre imbibé d'eau.

I.B.3)  $W_{\text{poids}} \sim \mu \Delta V_f g L = 1,3.10^3 \times 0,1.10^{-4} \times 10 \times 3.10^{-2} \simeq 4.10^{-3} \text{ J}$  que l'on

doit comparer à  $(\Delta H)_{\text{eau}} = l_{Ve} \Delta m_e = 2,6.10^6 \times 10^{-7} = 0,26 \text{ J}$ . L'erreur commise en négligeant le travail du poids est de l'ordre de 1%.

#### I.C – Pourquoi l'eau s'évapore-t-elle ?

I.C.1)  $G$  est minimale à l'équilibre.

$$I.C.2) \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_{T,P} = n_a RT \ln \left( \frac{xp}{p_{VSe}} \right).$$

La dérivée de  $G$  s'annule pour :

$$x_{eq} = \frac{p_{VSe}}{p} = \frac{2,5.10^3}{1,0.10^5} = 0,025.$$

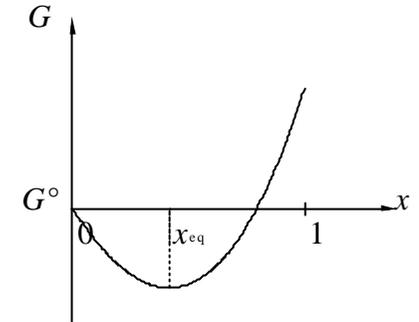
C'est un minimum : l'équilibre est stable.

I.C.3) L'eau peut s'évaporer tant que

$$x < x_{eq}.$$

I.C.4) A l'intérieur de la cloche,  $x$

augmente au fur et à mesure que l'eau s'évapore. L'oiseau cesse d'osciller lorsque  $x = x_{eq}$ .



#### I.D – L'oiseau buveur vu comme un moteur ditherme

I.D.1)  $W_{\text{poids}} = -\Delta E_{p,\text{poids}} = 0$  au cours d'un cycle.

I.D.2)

a) Loi de Coulomb :  $|F| = fN = fmg$ .  $F\vec{u}_y$  est de sens opposé à la vitesse de glissement de l'axe par rapport à la gouttière :  $F > 0$  si  $\alpha$  augmente et  $F < 0$  si  $\alpha$  diminue.

$$b) \mathcal{M} = \left( \overrightarrow{OA} \wedge (-R_A \vec{u}_y) + \overrightarrow{OB} \wedge (R_B \vec{u}_y) + \overrightarrow{OC} \wedge (F \vec{u}_y + N \vec{u}_z) \right) \cdot \vec{u}_x = -rF$$

$$\mathcal{M} = \begin{cases} -fmg r & \text{lorsque } \alpha \text{ croit de } \alpha_m \text{ à } \alpha_M \\ +fmg r & \text{lorsque } \alpha \text{ décroît de } \alpha_M \text{ à } \alpha_m \end{cases}$$

Voir le graphe à la page suivante (la flèche indique le sens de variation de  $\alpha$ ).

c) Travail des forces de frottement :

$$W = \int_{\text{cycle}} \mathcal{M} d\alpha$$

$$= -2fmgr(\alpha_M - \alpha_m) = -2.10^{-4} \text{ J}$$

C'est l'aire du cycle représenté sur le graphe ci-contre. Ce travail est résistant. I.D.3) 1<sup>er</sup> principe pour l'oiseau sur un cycle :

$$\Delta U = 0 = Q_C + Q_F + W$$

avec  $Q_C > 0$ ,  $W < 0$  et  $Q_F < 0$  (« point de vue de l'oiseau »). D'où :

$$Q_C = -Q_F - W = \Delta ml_V + 2fmgr(\alpha_M - \alpha_m) = 0,2602 \text{ J.}$$

Le rendement de ce moteur est :  $\rho = \frac{-W}{Q_C} = 7,69.10^{-4}$ .

I.D.4) Le rendement de Carnot d'un moteur réversible qui travaillerait avec une source chaude de température  $T_C = T_0$  et une source froide de température

$$T_F = T_0 - \theta \text{ serait : } \rho_C = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{T_0 - \theta}{T_0} = \frac{\theta}{T_0} = \frac{0,4}{293} = 1,37.10^{-3}.$$

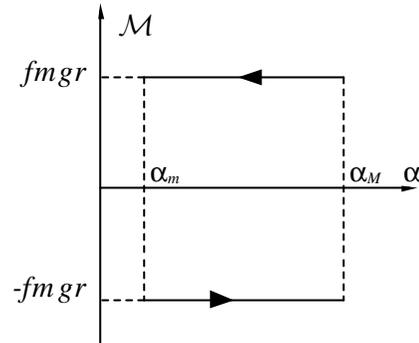
Le rendement d'un moteur réversible étant maximal, il est normal que  $\rho < \rho_C$ .

I.D.5) D'après le 2<sup>ème</sup> principe appliqué à l'oiseau sur un cycle :

$$\Delta S = 0 = S_c + \frac{Q_F}{T_0 - \theta} + \frac{Q_C}{T_0},$$

$$\text{d'où } S_c = -\left(\frac{Q_F}{T_0 - \theta} + \frac{Q_C}{T_0}\right) = -\left(\frac{-0,26}{292,6} + \frac{0,2602}{293}\right) = 5,3.10^{-7} \text{ J.K}^{-1}.$$

L'entropie créée  $S_c$  est non nulle, ce qui traduit l'irréversibilité du fonctionnement de l'oiseau (irréversibilité due notamment aux frottements).



## Partie II – Etude mécanique d'un jouet simulant la marche à pied

### II.A – Modélisation de la marche sur un plan horizontal

#### II.A.1)

a) Vecteur rotation instantané du solide (jambe + pied)(1) :  $\vec{\omega} = \dot{\theta}_1 \vec{u}_y$ .

Vitesse du point de contact :

$$\vec{v}_{I_1} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \vec{CI}_1 = V\vec{u}_x + (\dot{\theta}_1 \vec{u}_y) \wedge (-R\vec{u}_z) = (V - R\dot{\theta}_1)\vec{u}_x.$$

Condition de non glissement :  $\vec{v}_{I_1} = \vec{0} \Leftrightarrow V = R\dot{\theta}_1$ .

b) D'où :  $\theta_1(t) = \frac{V}{R}t + \theta_1(t=0) = \frac{V}{R}t - \alpha_0$ .

c) Pour avoir  $\theta_1(t = \tau_0) = \alpha_0$  il faut que :  $2\alpha_0 = \frac{V\tau_0}{R}$ .

#### II.A.2)

a) On se place dans le référentiel lié au jouet en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire de translation rectiligne uniforme de vitesse  $V\vec{u}_x$ . Ce référentiel est galiléen.

Dans ce référentiel le mouvement du système (jambe + pied) (2) est une rotation autour de l'axe fixe  $Cy$ . Ce système est soumis à son poids  $m'g$  appliqué en son centre d'inertie  $G_2$  et à des actions de liaisons dont le moment par rapport à l'axe  $Cy$  est nul puisqu'il n'y a pas de frottement. Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe  $Cy$  pour le système (jambe + pied)

(2) s'écrit :  $J'\ddot{\theta}_2 = -m'ga \sin \theta$  ou  $\ddot{\theta}_2 = -\omega_2^2 \sin \theta_2$

b) Petites oscillations :  $\ddot{\theta}_2 \simeq -\omega_2^2 \theta_2 \Rightarrow \theta(t) = A \cos(\omega_2 t) + B \sin(\omega_2 t)$ .

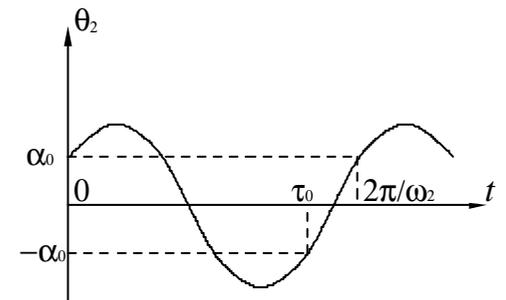
Les conditions initiales donnent les constantes  $A$  et  $B$  :

$$\theta_2(t) = \alpha_0 \cos(\omega_2 t) + \frac{V}{R\omega_2} \sin(\omega_2 t).$$

Amplitude des oscillations :

$$\theta_{2\max} = \sqrt{\alpha_0^2 + \left(\frac{V}{R\omega_2}\right)^2}.$$

c) La figure ci-contre illustre le fonctionnement du jouet : à l'instant  $\tau_0$  la jambe (2) passe en



$\theta_2(\tau_0) = -\alpha_0$  avec une vitesse angulaire positive (égale à la vitesse initiale).  
Ainsi :

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_2} - \frac{2}{\omega_2} \arcsin\left(\frac{\alpha_0}{\theta_{2\max}}\right).$$

$\left(\frac{2}{\omega_2} \arcsin\left(\frac{\alpha_0}{\theta_{2\max}}\right)\right)$  est le temps nécessaire pour aller de  $-\alpha_0$  à  $+\alpha_0$ , et en tenant compte de II.A.2.b) et II.A.1.c) :

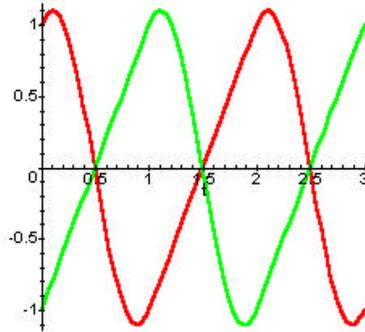
$$\omega_2 \tau_0 = 2\pi - 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4/(\omega_2 \tau_0)^2}}\right)$$

La solution numérique de cette équation est bien  $\omega_2 \tau_0 \approx 4$ . Alors :

$$\theta_{2\max} = \alpha_0 \sqrt{1 + 4/(\omega_2 \tau_0)^2} \approx \alpha_0 \sqrt{1,25} \approx 1,1 \alpha_0.$$

II.A.3) La demi-période des oscillations de la jambe libre est  $\pi/\omega_2 \approx \tau_0 \pi/4 < \tau_0$ , ce qui est du reste clair sur la figure du II.A.2.c).

Ci-contre le tracé de  $\theta_1(t)/\alpha_0$  (en vert) et  $\theta_2(t)/\alpha_0$  (en rouge) en fonction de  $t/\tau_0$ . Les raccords entre les portions de sinus et de segment de droite sont de classe  $C^1$  (continuité de la vitesse angulaire).



II.A.4)

a)  $\vec{P} = m\vec{v}_C + m'\vec{v}_{G_1} + m'\vec{v}_{G_2}$ ,

avec pour  $i=1$  ou  $2$

$$\vec{v}_{G_i} = \vec{v}_C + (\dot{\theta}_i \vec{u}_y) \wedge \overrightarrow{CG_i} = (V - a\dot{\theta}_i \cos \theta_i) \vec{u}_x + (-a\dot{\theta}_i \sin \theta_i) \vec{u}_y$$

donc

$$\vec{P} = \left[ (m + 2m')V - m'a(\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \right] \vec{u}_x - m'a(\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \vec{u}_z.$$

Si on suppose  $0 < t < \tau_0$  (donc  $\dot{\theta}_1 = V/R = \text{cste}$ ) et si on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et leurs dérivées successives :

$$\vec{P} \simeq \left[ (m + 2m' - m' \frac{a}{R})V - m'a\dot{\theta}_2 \right] \vec{u}_x \quad \text{d'où} \quad \frac{d\vec{P}}{dt} \simeq -m'a\ddot{\theta}_2 \vec{u}_x = m'a\omega_2^2 \theta_2(t) \vec{u}_x,$$

d'après l'équation différentielle de II.A.2.a).

b) Actions extérieures subies sur le système (jouet) pour  $0 < t < \tau_0$  : son poids

$(m + 2m')\vec{g}$ , l'action de contact  $\vec{F}_1$ . L'action

de contact  $\vec{F}_2$  n'existe pas puisqu'il n'y a pas contact entre la jambe (2) et le sol :

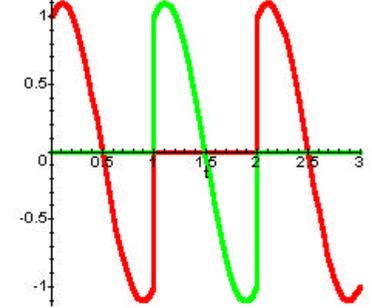
$$N_2 = T_2 = 0.$$

Théorème de la résultante cinétique pour le système (jouet) dans le référentiel lié au sol :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = (m + 2m')\vec{g} + \vec{F}_1 \quad \text{d'où} :$$

$$N_1 = (m + 2m')g \quad \text{et} \quad T_1 = m'a\omega_2^2 \theta_2(t)$$

Ci-dessus le tracé de  $T_1(t)/(m'\omega_2^2\alpha_0)$  (en rouge) et  $T_2(t)/(m'\omega_2^2\alpha_0)$  (en vert) en fonction de  $t/\tau_0$ .



d) Le glissement sera évité seulement si à tout instant  $|T_i| \leq fN_i$  soit si

$$f \geq \frac{m'}{m + 2m'} \frac{a\omega_2^2 \theta_{2\max}}{g}.$$

Appliquons le modèle à la marche d'un être humain : en prenant

$$m = 2m' = 35\text{kg}, \quad a = 0,5\text{m}, \quad \tau_0 = 1\text{s}, \quad \omega_2 = 4/\tau_0 = 4\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}, \quad \theta_{2\max} = 0,22\text{rad},$$

on trouve la condition  $f \geq 0,044$ .

e) Le graphe de la question II.A.4.c) ne décrit que de manière très grossière l'action de contact dans le cas de la marche d'un être humain. Il est étonnant et, semble-t-il contraire à l'expérience commune, que la force tangentielle soit dirigée vers l'arrière au moment où le pied se lève.

II.A.5)

a) Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au système (jouet) sur une période :  $\Delta E_c = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$ . La variation d'énergie cinétique  $\Delta E_c$  est nulle puisque le jouet retrouve le même état cinétique. Le travail des forces extérieures comprend :

- le travail du poids  $W_{\text{poids}} = -\Delta E_{p,\text{poids}} = 0$  pour la même raison
- le travail des forces de contact qui est nulle en raison du non glissement

Ainsi :  $W_{\text{ext}} = 0$  et  $W_{\text{int}} = \Delta E_c - W_{\text{ext}} = 0$ .

b) Dans la réalité le jouet perd de l'énergie mécanique à cause des frottements internes et de l'inélasticité des chocs entre les pieds et le sol (cf partie suivante). Il ne peut donc marcher à vitesse constante sur un plan horizontal. Sur un plan incliné descendant les pertes d'énergie peuvent être compensées par le travail du poids.

c) Dans le cas de l'être humain, les actions mécaniques intérieures fournissent un travail positif.

## II.B – Modélisation de l'entretien de la marche sur un plan incliné descendant

II.B.1) a) Le vecteur vitesse de C à l'instant  $t_k^-$  est

$$\begin{aligned}\vec{v}_C(t_k^-) &= \Omega_k^- \vec{u}_y \wedge \overrightarrow{P_{k-1}C} \\ &= \Omega_k^- \vec{u}_y \wedge (R \sin \alpha_0 \vec{u}_x + R \cos \alpha_0 \vec{u}_z) = R \Omega_k^- (\cos \alpha_0 \vec{u}_x - \sin \alpha_0 \vec{u}_z)\end{aligned}$$

Il est orthogonal à, dirigé vers le bas, et sa norme est  $v_C(t_k^-) = R \Omega_k^-$ .

Composante suivant  $\vec{u}_y$  du moment cinétique du jouet au point  $P_k$  :

$$\begin{aligned}\sigma_k^- &= \vec{u}_y \cdot \left( \overrightarrow{P_k C} \wedge m \vec{v}_C(t_k^-) \right) \\ &= \vec{u}_y \cdot \left[ R(-\sin \alpha_0 \vec{u}_x + \cos \alpha_0 \vec{u}_z) \wedge m R \Omega_k^- (\cos \alpha_0 \vec{u}_x - \sin \alpha_0 \vec{u}_z) \right] \\ &= m R^2 \Omega_k^- \cos(2\alpha_0)\end{aligned}$$

b)  $\vec{v}_C(t_k^+) = \Omega_k^+ \vec{u}_y \wedge \overrightarrow{P_k C} = R \Omega_k^+ (-\cos \alpha_0 \vec{u}_x - \sin \alpha_0 \vec{u}_z)$

$$\begin{aligned}\sigma_k^+ &= \vec{u}_y \cdot \left( \overrightarrow{P_k C} \wedge m \vec{v}_C(t_k^+) \right) \\ &= \vec{u}_y \cdot \left[ R(-\sin \alpha_0 \vec{u}_x + \cos \alpha_0 \vec{u}_z) \wedge m R \Omega_k^+ (-\cos \alpha_0 \vec{u}_x - \sin \alpha_0 \vec{u}_z) \right] \\ &= m R^2 \Omega_k^+\end{aligned}$$

(ce résultat peut être écrit directement en remarquant que le jouet tourne autour de  $P_k y$ )

c)  $\sigma_k^+ = \sigma_k^-$  donc  $\Omega_k^+ / \Omega_k^- = \cos 2\alpha_0$ .

Cas limite : si  $\alpha_0 = 0$ ,  $\Omega_k^+ = \Omega_k^-$  puisqu'il n'y a pas de changement de pied.

II.B.2) a) Le système (jouet) est soumis à son poids et à une force de contact en  $P_k$ . Le poids est une force conservative d'énergie potentielle associée

$$\begin{aligned}E_{p,\text{poids}} &= -m \vec{g} \cdot \overrightarrow{P_k C} = -mg (\sin \beta \vec{u}_x - \cos \beta \vec{u}_z) \cdot (R \sin \theta \vec{u}_x + R \cos \theta \vec{u}_z) \\ &= mg R \cos(\theta + \beta)\end{aligned}$$

La force de contact ne travaille pas puisque le point de contact ne glisse pas. Le système (jouet) est donc conservatif.

L'énergie cinétique du système est :  $E_c = \frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$ .

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mg R \cos(\theta + \beta) = \text{constante} \Rightarrow \ddot{\theta} = \omega_0^2 \sin(\theta + \beta).$$

b) Si on suppose  $\theta$  et  $\beta$  petits  $\ddot{\theta} \simeq \omega_0^2 (\theta + \beta)$ . La solution de cette équation différentielle est :  $\theta(t) = A e^{\omega_0 t} + B e^{-\omega_0 t} - \beta$ .

c) Les constantes  $A$  et  $B$  sont déterminées par les conditions initiales :

$$- \theta(0) = A + B - \beta = -\alpha_0 \quad (1)$$

$$- \dot{\theta}(0) = \omega_0 (A - B) = \Omega_0 \quad (2).$$

d) Le régime est périodique de période  $\tau_0$  si :

$$- \theta(\tau_0) = A e^{\omega_0 \tau_0} + B e^{-\omega_0 \tau_0} - \beta = \alpha_0 \quad (3)$$

$$- \dot{\theta}(\tau_0) = \omega_0 (A e^{\omega_0 \tau_0} - B e^{-\omega_0 \tau_0}) = \frac{\Omega_0}{u} \quad (4)$$

Les équations (1) à (4) permettent de déterminer les paramètres  $A$ ,  $B$ ,  $\tau_0$  et  $\Omega_0$  d'un mouvement périodique ( $\alpha_0$  et  $\beta$  étant fixés par construction).

II.B.3) a) Si  $\beta = 0$ , il n'y a pas de pente donc le jouet n'avance pas et  $\Omega_{0c} = 0$ .

Si  $u = 0$ , le jouet ne repart pas après un choc et on a bien  $\Omega_{0c} = 0$ . Si  $u \rightarrow 1$ , les chocs ne dissipent aucune énergie, la vitesse angulaire ne fait que croître et  $\Omega_{0c} \rightarrow \infty$ .

b)  $0 < u < 1$  donc  $u^{2k} \rightarrow 0$  si  $k \rightarrow \infty$ . Ainsi la formule donnée montre qu'après un grand nombre de choc la vitesse angulaire tend vers  $\Omega_{0c}$  quelle que soit la valeur de  $\Omega_0$ . Le régime périodique est donc stable.