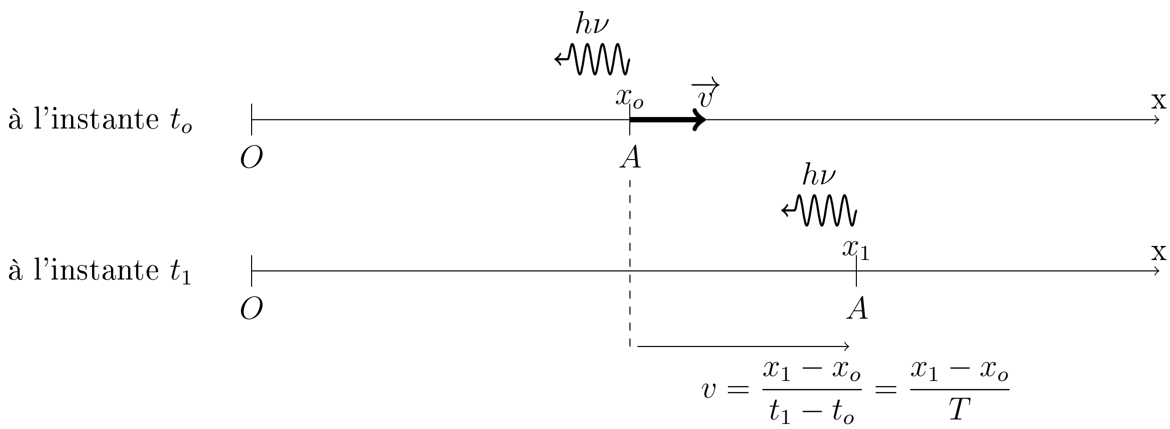
La dynamique de l'univers

Mohamed Afekir (*cpgeafek@gmail.com*)
École Royale de l'Air
CPGE - Marrakech

1 Hubble: l'Univers est en expansion

1) Effet Doppler classique (non relativiste) et déplacement vers le rouge

1- a)



La 1^{re} impulsion:

- est émise par A à l'instant t_o et arrive en 0 à l'instant $T_1 = \frac{x_o}{c} + t_o$

La 2^{me} impulsion:

- est émise par A à l'instant t_1 et arrive en 0 à l'instant $T_2 = \frac{x_1}{c} + t_1$

La durée séparant les deux impulsions successives:

- émises par A est: $T = t_1 - t_o$
- reçues en O est: $T' = T_2 - T_1 = T + \frac{v}{c}T$

Soit:

$$\boxed{T' = T\left(1 + \frac{v}{c}\right)}$$

1- b)

$$\lambda = cT \qquad \text{et} \qquad \lambda' = cT' \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\lambda' = \lambda\left(1 + \frac{v}{c}\right)}$$

1- c)

$$\boxed{z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}}$$

z est, alors, directement relié à la vitesse v de la galaxie.

2) La constante de Hubble H_o

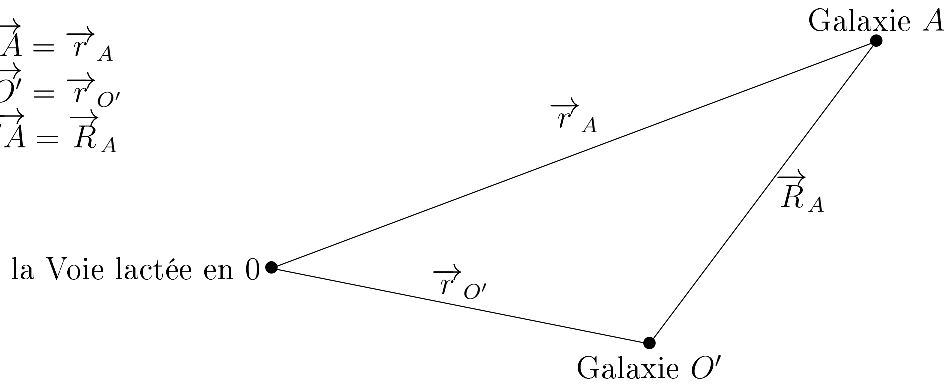
2- a) La dimension de H_o est l'inverse d'un temps: $[H_o] = T^{-1}$.

2- b)

$$H_o = 70\,km.s^{-1}.Mpc^{-1} = \frac{70 \times 10^{-6}}{3,09 \times 10^{16}}\,s^{-1} = 2,3 \times 10^{-18}\,s^{-1}$$

3) On considère deux galaxies A et O' en présence de la Voie lactée centrée en O.

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{r}_A$$
$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{r}_{O'}$$
$$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{R}_A$$



La loi de Hubble s'écrit (par rapport à 0):

- pour la galaxie A

$$\underline{\overrightarrow{v}_A = H_o \overrightarrow{r}_A}$$

- pour la galaxie O'

$$\underline{\overrightarrow{v}_{O'} = H_o \overrightarrow{r}_{O'}}$$

On note par $\mathcal{R}_o$ le repère lié à O et par $\mathcal{R}'$ le repère lié à O'; la loi de composition du mouvement appliquée à la galaxie A dans $\mathcal{R}_o$ et $\mathcal{R}'$ permet d'écrire:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}_{A/\mathcal{R}_o} &= \overrightarrow{v}_{A/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{v}_{O'/\mathcal{R}_o} \\
\overrightarrow{v}_A &= \overrightarrow{v}_{A/O'} + \overrightarrow{v}_{O'} \\
\underline{\overrightarrow{v}_{A/O'}} &= \overrightarrow{v}_A - \overrightarrow{v}_{O'} \\
&= H_o \overrightarrow{r}_A - H_o \overrightarrow{r}_{O'} \\
&= H_o \left(\overrightarrow{r}_A - \overrightarrow{r}_{O'}\right) \\
&= \underline{H_o \overrightarrow{R}_A}
\end{aligned}$$

$\boxed{\overrightarrow{v}_{A/O'} = H_o \overrightarrow{R}_A}$: la loi de *Hubble* est, alors, compatible avec le *principe cosmologique.*

4) $r(t) = a(t)\chi$ et $v = H(t)r(t)$

$$v = \frac{dr(t)}{dt} = \chi\frac{da(t)}{dt} = \frac{r(t)}{a(t)}\frac{da(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H(t) = \frac{1}{a(t)}\frac{da(t)}{dt} = \frac{d\ln a(t)}{dt} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}}$$

2 Evolution du paramètre d'échelle $a(t)$ en cosmplogie newtonienne

5) Gravitation newtonienne

Les équations locales:

$$\begin{aligned}
\mathtt{div}\,\overrightarrow{g} &= -4\pi G\rho(\overrightarrow{r}) \\
\overrightarrow{\mathtt{rot}}\,\overrightarrow{g} &= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

6) Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la galaxie A, de masse m (soumise sous l'action de la force gravitationnel $\overrightarrow{f}_g$), dans le référentiel centré sur la Voie lactée O:

$$m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = \overrightarrow{f}_g = -G\frac{mM_O}{r^3(t)}\overrightarrow{r}(t) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -\frac{GM_O}{r^3(t)}\overrightarrow{r}(t) = -\frac{4}{3}G\pi\rho\overrightarrow{r}(t)}$$

$$\overrightarrow{r}(t) = a(t)\overrightarrow{\chi} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\overrightarrow{r}}(t) = \ddot{a}(t)\overrightarrow{\chi} = -\frac{4}{3}G\pi\rho a(t)\overrightarrow{\chi}$$

Soit:

$$\boxed{\ddot{a}(t) = -\frac{4}{3}G\pi\rho a(t)} \tag{1}$$

7) La masse M_r:

$$M_r = \frac{4}{3}\pi\rho(t)r^3(t)$$

Mais cette masse se conserve (*pas d'évolution dans le temps*): $M_r(t) = M_r(t_o)$; soit:

$$\rho(t)r^3(t) = \rho(t_o)r^3(t_o) \qquad \Rightarrow \qquad \rho(t)a^3(t) = \rho_o a_o^3 \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\rho(t) = \rho_o\left(\frac{a_o}{a(t)}\right)^3}$$

8) L'équation(1) et la question 7) donnent:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}(t) &= -\frac{4}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a^2(t)} \\
\dot{a}(t)\ddot{a}(t) &= -\frac{4}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a^2(t)}\dot{a}(t) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{a}^2(t)\right) &= \frac{4}{3}G\pi\rho_o a_o^3\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a(t)}\right)
\end{aligned}$$

soit:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{a}^2(t) - \frac{4}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a(t)}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{a}^2(t) - \frac{4}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a(t)} \text{ est une constante du mouvement}$$

ou:

$$\boxed{\dot{a}^2(t) - \frac{8}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a(t)} = K}$$

<u>Interprétation</u>: multiplions les deux termes de l'égalité par $\frac{1}{2}m\chi^2$;

$$\frac{1}{2}m\chi^2\dot{a}^2(t) - \frac{1}{2}m\chi^2\frac{8}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a(t)} = \frac{1}{2}m\chi^2 K$$

$$r(t) = a(t)\chi \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2(t)}_{E_c} \underbrace{- \frac{4}{3}Gm\pi\frac{\rho_o r_o^3}{r(t)}}_{E_p} = \underbrace{\frac{1}{2}m\chi^2 K}_{E_m}$$

$E_c = \frac{1}{2}m\dot{r}^2(t)$: énergie cinétique de la galaxie.

$E_p = -\frac{4}{3}Gm\pi\frac{\rho_o r_o^3}{r(t)} = -\frac{GM_o m}{r(t)}$: énergie potentielle de la galaxie; avec $M_o = \frac{4}{3}\pi r_o^3\rho_o$.

$E_m = \frac{1}{2}m\chi^2 K$ ne peut être que l'énergie mécanique de la galaxie; avec $K > 0$, < 0 ou nulle.

- si $K < 0$; $E_m < 0$: la galaxie est dans un état *lié* et l'expansion s'arrête! (*modèle elliptique de l'Univers*).
- si $K > 0$; $E_m > 0$: la galaxie est dans un état *libre* et l'expansion se poursuit! (*modèle hyperbolique de l'Univers*).
- si $K = 0$; $E_m = 0$: la galaxie est dans un état *libre* et l'expansion se poursuit! (*modèle parabolique de l'Univers*).

9) La constante $K = K(t) = K(t_o)$, donc:

$$\dot{a}^2(t) - \frac{8}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a(t)} = \dot{a}^2(t_o) - \frac{8}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a(t_o)} = \dot{a}^2(t_o) - \frac{8}{3}G\pi\rho_o a_o^2$$

Or $\quad H(t) = \dfrac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad \Rightarrow \quad H_o = \dfrac{\dot{a}_o}{a_o}$

$$\dot{a}^2(t) - \frac{8}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a(t)} = a_o^2 H_o^2 - \frac{8}{3}G\pi\rho_o a_o^2 = a_o^2\left[H_o^2 - \frac{8}{3}G\pi\rho_o\right]$$

L'équation s'écrit, alors:

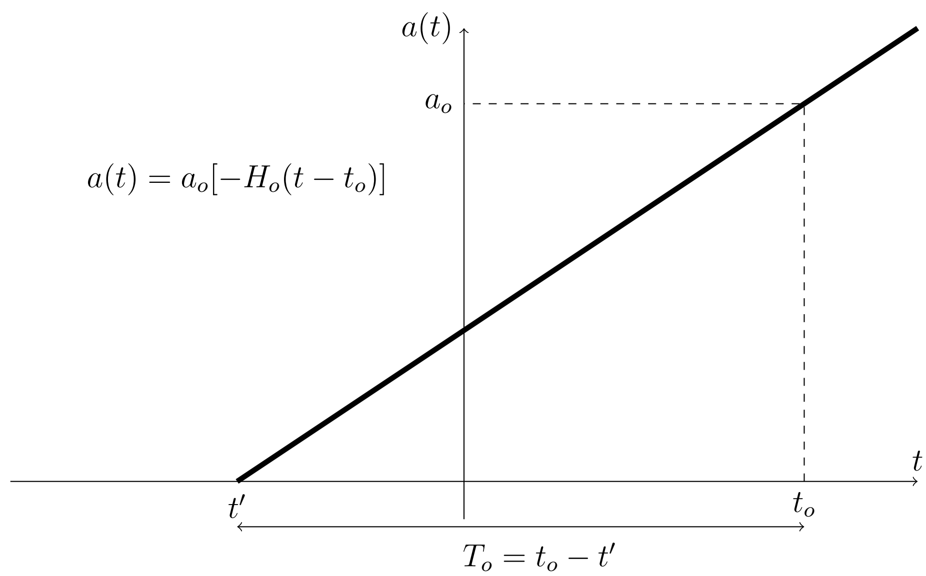
$$\boxed{\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{8}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a^3} = \frac{a_o^2}{a^2}\left[H_o^2 - \frac{8}{3}G\pi\rho_o\right]} \qquad (3)$$

10) Univers vide $\rho_o = 0$:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{a_o^2}{a^2}H_o^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{a} = a_o H_o$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a(t) = a_o - a_o H_o(t - t_o)}$$

$$a(t') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t' = -\frac{1}{H_o} + t_o}$$



L'age actuel d'un Univers vides est:

$$\boxed{T_o = t_o - t' = \frac{1}{H_o}}$$

Application numérique:

$$\boxed{T_o = 1,40 \times 10^{10}\, ans}$$

Interprétation: A l'instant t', la galaxie A et la voie Lactée O étaient confondues. C'est à cet "*date*" que commençait l'expansion!

11) L'Univers ne peut pas être en expansion si et seulement si $E_m < 0$. (Cf. question 8)) soit:

$$H_o^2 - \frac{8\pi G\rho_o}{3} < 0 \qquad \text{ou} \qquad \rho_o > \boxed{\rho_c = \frac{3H_o^2}{8\pi G}}$$

Application numérique:

$$\boxed{\rho_c = 9,2 \times 10^{-27}\, kg.m^{-3}}$$

Commentaire: L'équivalent de ρ_c en termes de masse volumique ou concentration de nucléons est:

$$\frac{\rho_c}{m_p} = 5,5 \text{ nucléons (protons et neutrons) par mètre cube}$$

Valeur très faible; l'Univers présente, alors, plus d'espace vide!!

12) Univers critique: $\rho_o = \rho_c$, l'équation de Friedmann-Lemaître s'écrit;

$$\begin{aligned}
\dot{a}^2 = \frac{8}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a} \quad &\Rightarrow \quad \dot{a} = \sqrt{\frac{8}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a}da = \sqrt{\frac{8}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a}}dt \\
\rho_o = \rho_c = \frac{3H_o^2}{8\pi G} \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{a}da = \sqrt{H_o^2 a_o^3}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}a^{3/2} = \sqrt{H_o^2 a_o^3}t + Cte \\
\frac{2}{3}a^{3/2} &= \sqrt{H_o^2 a_o^3}t + \frac{2}{3}a_o^{3/2} - \sqrt{H_o^2 a_o^3}t_o \\
&= \frac{2}{3}a_o^{3/2} + H_o a_o^{3/2}(t - t_o)
\end{aligned}$$

Soit l'évolution de $a(t)$:

$$\boxed{a(t) = a_o\left(1 + \frac{3}{2}H_o(t - t_o)\right)^{2/3}}$$

L'age $T_{univers}$ de de cet Univers est:

$$\begin{aligned}
T_{univers} &= t_o - t" \qquad \text{telle que} \qquad a(t") = 0 \qquad \text{ou} \qquad t" = t_o - \frac{2}{3H_o} \\
&= \frac{2}{3H_o} \\
&= \frac{2}{3}T_o
\end{aligned}$$

Application numérique:

$$\boxed{T_{univers} = 9,3 \times 10^9\, ans}$$

13) Coordonnées réduites:

$$\tau = H_o t \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tau}{dt} = H_o \quad \text{et} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = H_o \frac{dx}{d\tau}$$

$$\rho_o = \Omega_o \rho_c = \frac{3\Omega_o H_o^2}{8\pi G} \quad \Rightarrow \quad \frac{8\pi G}{3}\rho_o = \Omega_o H_o^2$$

$$a = x a_o \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\dot{x}^2}{x^2} = \frac{H_o^2}{x^2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{a_o^2}{a^2} = \frac{1}{x^2}$$

L'équation de Friedmann-Lemaître s'écrit, alors:

$$\boxed{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \frac{\Omega_o}{x} = 1 - \Omega_o}$$

14)

14- a) La constante K de la question 8) s'écrit (*en fonction des coordonnées réduites*):

$$K = a_o^2\left(H_o^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_o\right) = a_o^2 H_o^2 (1 - \Omega_o)$$

- L'Univers est ouvert pour $K \geqslant 0$ ou $\Omega_o \leqslant 1$; c'est le cas pour $\Omega_o = 0$, $\Omega_o = 0,5$ et $\Omega_o = 1$.
- L'Univers est fermé pour $K < 0$ ou $\Omega_o > 1$; c'est le cas pour $\Omega_o = 3$.
- Pour l'interprétation Cf. la question 8) .

14- b) L'expansion de l'Univers fermé ($\Omega_o = 3$) après qu'il ait atteint son maximum , commence par s'inverser et l'Univers tend à s'*effondre* sur lui-même après à peu près trois fois l'instant présent ($a = 0$: *Big Crunch*)!!!
Après le maximum d'expansion, le paramètre d'échelle varie de la même façon qu'avant le maximum mais de signe opposé (*évolution symétrique*): tous ce passe comme si l'Univers se reconstruit comme dans le passé!

14- c) On pourra penser qui c'est à cause de la gravité que l'expansion de l'Univers ralentie à cause d'une dominance de la matière et donc de l'attraction gravitationnelle!

14- d) La figure est un réseau de courbes correspondantes à différentes valeurs de $\Omega_o = \dfrac{\rho_o}{\rho_c}$.
Chacune de ces courbes prennent comme point de "*départ*" aux instants différentes: l'age de l'univers dépend, alors, de ρ_o; l'age décroît avec ρ_o, on peut l'estimer par:

$$T_{univers}^{est} = \underbrace{T_o}_{ageactuel} \times \underbrace{f(\rho_o)}_{\text{fonction de } \rho_o} \quad !!$$

3 De quoi est constitué l'Univers

3- 1 La matière baryonique et la matière noire

15) $\Omega_M = 0,05 + 0,26 = 0,31 < 1$: il s'agit d'un Univers *ouvert*!

16) L'équation de Friedmann-Lemaître:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \underbrace{\frac{8}{3}G\pi\frac{\rho_o a_o^3}{a^3}}_{\frac{8\pi G}{3}\rho \quad \text{question } 7)} = \underbrace{\frac{a_o^2}{a^2}\left[H_o^2 - \frac{8}{3}G\pi\rho_o\right]}_{\frac{K}{a^2} \quad \text{question } 8)}$$

D'où:

$$\boxed{\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3}G\pi\rho + \frac{K}{a^2}} \qquad (5)$$

3- 2 Influence de la matière relativiste et du rayonnement sur l'équation de Friedmann-Lemaître

$$u = \rho c^2 = (\rho_M + \rho_R)c^2$$

4 Thermodynamique de l'Univers

17)

- 1^r principe de la thermodynamique: $dU = \delta Q - PdV$. U énergie interne de l'Univers.
- évolution adiabatique (*pas d'échange d'énergie thermique*): $\delta Q = 0$

$$\frac{dU}{dr} \qquad \text{et} \qquad -P\frac{dV}{dr}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{et} \qquad U = uV = \frac{4}{3}\pi r^3 u$$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2u + r^3\frac{du}{dr}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi 3r^2$$

Soit:

$$3r^2u + r^3\frac{du}{dr} = -3Pr^2$$

ou:

$$\boxed{\frac{du}{dr} + \frac{3}{r}(u+P) = 0}$$

18) L'équation précédente pourra s'écrire:

$$du + \frac{3}{r}dr(u+P) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{du}{dt} + \frac{3}{r}\frac{dr}{dt}(u+P) = 0$$

$$r(t) = a(t)\chi \qquad \text{et} \qquad u = \rho c^2$$

Soit;

$$c^2\frac{d\rho}{dt} + \frac{3}{a}\frac{da}{dt}(\rho c^2 + P) = 0$$

ou:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \frac{3}{a}\frac{da}{dt}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0} \qquad (6)$$

19)

$$\rho_M(t) = \rho_o \left(\frac{a_o}{a}\right)^3 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\rho}_M(t) = \rho_o a_o^3 \left[-3\frac{\dot{a}}{a^4}\right] = \frac{\rho_o a_o^3}{a^3}\left[-3\frac{\dot{a}}{a}\right]$$

$$\boxed{\dot{\rho}_M(t) = -3\rho_M \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}}$$

20)

$$\frac{d\rho_M}{dt} + \frac{3}{a}\frac{da}{dt}\left(\rho_M + \frac{P_M}{c^2}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{\rho}_M(t) = -3\rho_M \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{P_M = 0}$$

5 Le rayonnement et la matière relativiste

21) Considérons un gaz parfait monoatomique constitué de N atomes d'énergie cinétique individuelle ε_c. L'énergie interne du gaz est:

$$U = N < \varepsilon_c >= uV \qquad \text{avec} \qquad < \varepsilon_c >= \frac{3}{2}k_B T \qquad (\textit{théorème de l'équipartition de l'énergie})$$

d'où:

$$PV = nRT \qquad \text{et} \qquad N = n\mathcal{N}_a \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{3}{2}\frac{N}{V}k_B T = \frac{3}{2}\frac{n\mathcal{N}_a}{V}k_B T = \frac{3}{2}\frac{nRT}{V} = \frac{3}{2}P$$

$$\boxed{u = \frac{3P}{2} \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{2u}{3}}$$

22) ρ_{em} vérifie l'équation:

$$\dot{\rho}_{em} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_{em} + \frac{P_{em}}{c^2}\right) = 0 \qquad \text{avec} \qquad P_{em} = \frac{\rho_{em} c^2}{3}$$

soit;

$$\frac{d\rho_{em}}{\rho_{em}} = -4\frac{da}{a} \qquad \Rightarrow \qquad \rho_{em}(t)a^4(t) \text{ est une constante du temps}$$

$$\rho_{em}(t)a^4(t) = \rho_{em}(t_o)a^4(t_o) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\rho_{em}(t) = \rho_{emo}\left(\frac{a_o}{a}\right)^4}$$

23) La densité:

$$\rho = \rho_M + \rho_R \qquad \text{avec} \qquad \rho_M(t) = \rho_{Mo}\left(\frac{a_o}{a}\right)^3 \qquad \text{et} \qquad \rho_R(t) = \rho_{Ro}\left(\frac{a_o}{a}\right)^4$$

L'équation de Friedmann-Lemaître:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8}{3}G\pi\rho + \frac{K}{a^2} \\
\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8}{3}G\pi(\rho_M + \rho_R) + \frac{K}{a^2} \\
\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8}{3}G\pi\left[\rho_{Mo}\left(\frac{a_o}{a}\right)^3 + \rho_{Ro}\left(\frac{a_o}{a}\right)^4\right] + \frac{K}{a^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3}G\pi\left(\frac{a_o}{a}\right)^3\left[\rho_{Mo} + \rho_{Ro}\left(\frac{a_o}{a}\right)\right] + \frac{K}{a^2}}$$

24) L'expansion de l'univers sera ralentie si la vitesse $v = \dot{r}(t)$ d'expansion **diminue**! ou $\ddot{r}(t) < 0$. Il en est de même pour $\dot{a}(t)$ et $\ddot{a}(t)$ respectivement.
De l'équation précédente, on en déduit:

$$\dot{a}^2 = \frac{8G\pi a_o^3}{3}\left[\frac{\rho_{Mo}}{a} + \frac{\rho_{Ro}a_o}{a}\right] + K \qquad \Rightarrow \qquad 2\ddot{a} = -\frac{8G\pi a_o^3}{3}\left[\frac{\rho_{Mo}}{a^2} + 2\frac{\rho_{Ro}a_o}{a^3}\right]$$

On remarque que $\ddot{a}(t)$ est **négative** ($a(t)$ est **concave**). Donc, $\dot{a}(t)$ (*et par conséquence la vitesse* $v(t)$) **décroît**! L'expansion de l'Univers en question est toujours ralentie.

6 L'énergie noire

6- 1 Mesure du paramètre d'accélération

$$a(t) = a_o\left(1 + H_o(t - t_o) - \frac{q_o}{2}H_o^2(t - t_o)^2 + ...\right) \qquad \text{avec} \qquad q_o = -\frac{\ddot{a}_o a_o}{\dot{a}_o^2}$$

25)

25-a)

$$\boxed{A_nA_{n+1} = -a(t)d\chi} \quad ; \quad (d\chi < 0)$$

25-b)

$$A_nA_{n+1} = cdt \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{-a(t)d\chi = cdt}$$

25-c)

$$d\chi = -\frac{cdt}{a(t)} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\chi_A}^{0} d\chi = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{cdt}{a(t)} = -\chi_A$$

d'où:

$$\boxed{\chi_A = \int_{t_1}^{t_2}\frac{cdt}{a(t)}} \qquad (8)$$

26) Déplacement vers le rouge d'une source lointaine

26-a) χ_A est la coordonnée de la source, qui est supposée au repos dans l'espace:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2}\frac{dt}{a(t)}$$

On ajoute aux deux termes de l'égalité l'intégrale $\displaystyle\int_{t_2}^{t_1+\delta t_1}\frac{dt}{a(t)}$:

$$\int_{t_2}^{t_1+\delta t_1}\frac{dt}{a(t)} + \int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2}\frac{dt}{a(t)} + \int_{t_2}^{t_1+\delta t_1}\frac{dt}{a(t)}$$
$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1}\frac{dt}{a(t)} = \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2}\frac{dt}{a(t)}$$

Par hypothèse, le paramètre d'échelle $a(t)$ n'a pas le temps de varier entre t_1 et $t_1 + \delta t_1$ ou entre t_2 et $t_2 + \delta t_2$. On en déduit:

$$\frac{1}{a(t_1)}\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} dt = \frac{1}{a(t_2)}\int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} dt \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_2}{a(t_2)}}$$

26-b)

$$c\delta t_1 = \lambda \qquad \text{et} \qquad c\delta t_2 = \lambda' \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\lambda}{a(t_1)} = \frac{\lambda'}{a(t_2)}}$$

26-c)

$$\frac{\lambda}{a(t_1)} = \frac{\lambda'}{a(t_2)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{a(t_2)}{a(t_1)}}$$

d'où
le résultat!
càd même facteur de dilatation

26-d) $E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$ et $E' = h\nu' = \dfrac{hc}{\lambda'}$. Entre les instants t_o et t_1:

$$\boxed{\frac{E'}{E} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{a(t_1)}{a(t_o)}}$$

26-e) $E = uV = \dfrac{4}{3}\pi\chi^3 a^3 u \qquad \Rightarrow \qquad E \propto a^3 u$. Toujours entre les instants t_o et t_1:

$$\frac{E'}{E} = \frac{a(t_o)u_o}{a(t_1)u} = \frac{a(t_1)}{a(t_o)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{u = u_o\left(\frac{a_o}{a}\right)^4}$$

Résultat similaire à celui vérifié par ρ dans la question 22).

26-f) Entre les instants t_o et t_1:

$$z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\lambda} - 1 = \frac{a_o}{a(t_1)} - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{1 + z = \frac{a_o}{a(t_1)}} \qquad (9)$$

27)

27-a)

- A émet N photons d'énergie moyenne $\overline{E}$ entre les instants t_1 et $t_1 + \delta t_1$: soit pendant δt_1. L'énergie rayonnée par A:
$$E_{ray} = N\overline{E}$$
- La luminosité L est la puissance totale rayonnée par A: c'est l'énergie rayonnée par A pendant δt_1. Alors:
$$\boxed{L = \frac{E_{ray}}{\delta t_1} = \frac{N\overline{E}}{\delta t_1}}$$

27-b)

- La luminosité L' reçue en O:
$$L' = \frac{N\overline{E}'}{\delta t_2}$$
- La puissance p_s par unité de surface reçue en O:
$$\boxed{p_s = \frac{L'}{4\pi R^2} = \frac{N\overline{E}'}{4\pi R^2 \delta t_2}}$$
- Par ailleurs: $R = a(t_2)\chi_A$, $\dfrac{\overline{E}'}{\overline{E}} = \dfrac{a(t_1)}{a(t_2)}$ et $\dfrac{\delta t_1}{a(t_1)} = \dfrac{\delta t_2}{a(t_2)}$; d'où:
$$\boxed{p_s = \frac{La^2(t_1)}{4\pi a^4(t_2)\chi_A^2}}$$

27-c) De la relation $p_s = \dfrac{L}{4\pi d_L^2}$ on en déduit:

$$\boxed{d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi p_s}}}$$

la connaissance de p_s et de L permet, alors, de déterminer d_L

Expression de la distance de luminosité d_L:

$$p_s = \frac{La^2(t_1)}{4\pi a^4(t_2)\chi_A^2} = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_L = \frac{a^2(t_2)\chi_A}{a(t_1)}}$$

Entre t_o et t_1:

$$d_L = \frac{a_o^2\chi_A}{a(t_1)} \quad \text{et} \quad 1+z = \frac{a_o}{a(t_1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_L = (1+z)a_o\chi_A}$$

Des deux expressions:

$$\boxed{\frac{d_L}{1+z} = a_o\chi_A = R(t_o)} \quad \text{et} \quad 1+z = \frac{a_o}{a(t_1)} = \frac{R(t_o)}{R(t_1)} \quad \text{ou} \quad \boxed{R(t_1) = \frac{d_L}{(1+z)^2}}$$

On conclut que la connaissance de d_L et de *redshift* z de A permettent de déterminer les distances $R(t_1)$ et $R(t_o)$.

6- 2 La constante cosmologique et l'énergie noire

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \qquad (10)$$

28) La constante cosmologique

28-a) La dimension de la constante cosmologique Λ est l'inverse d'une surface; soit $[\Lambda] = L^{-2}$.

28-b) L'équation (10):

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \\
&= \frac{8\pi G}{3}\left[\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}\right] + \frac{K}{a^2} \\
&= \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda) + \frac{K}{a^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}}$$

28-c) Densité d'énergie:

$$\boxed{u_\Lambda = \rho_\Lambda c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}}$$

29) L'énergie noire

29-a) La densité $u_\Lambda = \rho_\Lambda c^2 = \dfrac{\Lambda c^4}{8\pi G}$ d'énergie est indépendante du temps: l'énergie noire ne se dilue pas!

29-b) Les coordonnées réduites de densités de masse:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \frac{\Lambda c^2}{3H_o^2} \quad ; \quad \Omega_M = \frac{8\pi G}{3H_o^2}\rho_{Mo}\left(\frac{a_o}{a}\right)^3 \quad ; \quad \Omega_R = \frac{8\pi G}{3H_o^2}\rho_{Ro}\left(\frac{a_o}{a}\right)^4$$

L'équation (10):

$$\begin{aligned}
\frac{\dot a^2}{a^2} &= \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \\
&= \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_M + \rho_R + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}\right] + \frac{K}{a^2} \\
&= \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{Mo}\left(\frac{a_o}{a}\right)^3 + \rho_{Ro}\left(\frac{a_o}{a}\right)^4 + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}\right] + \frac{K}{a^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot a^2 &= \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{Mo}\left(\frac{a_o^3}{a}\right) + \rho_{Ro}\left(\frac{a_o^4}{a^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}a^2\right] + K \\
2\ddot a &= \frac{8\pi G}{3H_o^2}\left[-\rho_{Mo}\left(\frac{a_o^3}{a^2}\right) - 2\rho_{Ro}\left(\frac{a_o^4}{a^3}\right) + 2\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}a\right] H_o^2 \\
&= H_o^2 a\left[-\Omega_M - 2\Omega_R + 2\Omega_\Lambda\right]
\end{aligned}$$

à l'instant présent; $\quad 2\ddot a_o = H_o^2 a_o\left[-\Omega_M - 2\Omega_R + 2\Omega_\Lambda\right]$

L'expansion de l'Univers est accéléré à l'instant présent si et seulement si:

$$-\Omega_M - 2\Omega_R + 2\Omega_\Lambda > 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{2\Omega_\Lambda > \Omega_M + 2\Omega_R}$$

Au terme de la densité de masse:

$$2\rho_\Lambda > \rho_M + 2\rho_R$$

Si on envisage un Univers vide ($\rho_M = 0$ et $\rho_R = 0$):

$$\rho_\Lambda > 0 \quad \text{et} \quad \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda > 0}$$

29-c) La densité de masse $\rho_\Lambda = \dfrac{\Lambda c^2}{8\pi G}$ est indépendante du temps!. D'après l'équation (6) de la question 18):

$$\rho_\Lambda + \frac{P_\Lambda}{c^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}}$$

29-d) $\ddot a$ étant *positif* (et, donc l'*accélération*); l'interaction est, alors, *répulsive*!