Corrigé Mines MP physique 2

Premier problème : l'extinction des dinosaures

Première partie

1. On utilise la relation $T_o = \frac{2\pi a}{T_o}$, on obtient $v_o = 29{,}9.10^3 \text{ m.s}^{-1}$.

2. Le théorème du centre de masse appliqué à la terre permet d'établir : $GM_S = v_o^2 a$

3. On traduit :
   - La conservation de l'énergie : $\frac{1}{2}mv^2_{min} - \frac{GM_S m}{d_{max}} = \frac{1}{2}mv^2_{max} - \frac{GM_S m}{d_{min}}$
   - la conservation du moment cinétique : $v_{min} d_{max} = v_{max} d_{min}$

   On obtient alors :

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2ad_{max}}{d_{min}(d_{min} + d_{max})}} \quad \text{et} \quad v_{min} = \sqrt{\frac{2ad_{min}}{d_{max}(d_{min} + d_{max})}}$$

4. - Pour pouvoir envisager un impact de C sur la terre, on doit avoir $d_{min} \le a$.

   - On déduit $v_{max} \ge v_o\sqrt{\frac{2d_{max}}{(d_{max} + a)}} \approx \sqrt{2}\, v_o$ soit $v_{max} \ge 42{,}3.10^3 \text{ m.s}^{-1}$.

5. Soit v_r la vitesse relative de la terre et de C au moment de l'impact. On a la double inégalité :

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)v_o \le v_r \le \left(\sqrt{2} + 1\right)v_o \text{ soit } 12{,}4.10^3 \le v_r \le 72{,}2.10^3 \quad \text{en m.s}^{-1}.$$

Deuxième partie

6. On peut penser à des techniques utilisant la spectrométrie de masse.

7. On peut choisir une couche K/T d'épaisseur e de l'ordre de 3 mm par exemple. La masse de la couche K/T est égale à $\rho_T 4\pi R_T^2 e$ soit environ $8{,}5.10^{15}$ kg. La proportion de Iridium dans cette couche est donc de l'ordre de 6.10^{-8}; soit 60 fois plus que celle usuellement mesurée dans la croûte terrestre. Cette proportion est par contre comparable à celle des astéroïdes. L'argument paraît donc séduisant…

8. On traduit l'équilibre de la colonne d'air de hauteur h et de section πr_c^2 sous l'action des actions volumique et surfacique. On obtient la relation $m_a g = P_o \pi r_c^2$ où m_a représente la masse de la colonne d'air.

   Ainsi : $m_a = \frac{P_o \pi r_c^2}{g} \approx 3{,}2.10^{12} \text{ kg}$.

9. Soit v_1 la vitesse initiale de la comète.
   - **<u>En l'absence d'atmosphère</u>**, on aurait une vitesse finale v_f au niveau de la terre que l'on peut déterminer en écrivant la conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh \quad \text{ce qui donne} \quad \frac{\Delta E_c}{E_c} = \frac{2gh}{v_1^2} \approx 3.10^{-3}.$$

   la variation relative de la vitesse s'écrit :

$$\frac{v_f - v_1}{v_1} = \sqrt{\left(1 + \frac{2gh}{v_1^2}\right)} - 1 \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta v}{v_1} \approx \frac{gh}{v_1^2} \approx 1{,}5.10^{-3}.$$

- **Avec l'atmosphère**, la vitesse finale vaut v_f'. D'après l'énoncé,

$$\frac{v_f' - v_1}{v_1} = 0{,}99\left(\sqrt{\left(1 + \frac{2gh}{v_1^2}\right)} - 1\right), \text{ soit } \frac{\Delta v'}{v_1} \approx 0{,}99\frac{\Delta v}{v_1}$$

La variation de l'énergie cinétique de la comète s'écrit $\Delta E'_c = \frac{1}{2}mv_f'^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \approx 0{,}99mgh$ puisque $2gh << v_1^2$.

S'il l'on néglige la variation d'énergie interne de la comète on peut supposer que $0{,}01\Delta E_P$ se retrouve sous la forme d'énergie cinétique associée à l'air expulsé. De la relation $\frac{1}{2}m_a v_a^2 = 0{,}01\,mgh$, on déduit un ordre de grandeur de la vitesse v_a des molécules d'air : $v_a = 3.10^3\ m.s^{-1}$. On constate que cette vitesse est tout de même inférieure à celle de la comète…

10. L'énergie cinétique E_{ca} communiquée par la comète à l'atmosphère vaut : $E_{ca} = 0{,}01mgh \approx 1{,}47.10^{19}\ J$

    L'énergie cinétique E_{ci} initiale de la comète vaut : $E_{ci} = \frac{1}{2}mv_1^2 \approx 2.10^{23}$ J .

    Ainsi $\frac{E_{ca}}{E_{ci}} \approx 3.10^{-5}$. Le freinage par l'atmosphère est donc faible.

11. L'énergie nécessaire à la vaporisation de l'eau vaut $h_e\rho_o\pi r_c^2 L_v \approx 7{,}2.10^{19}\ J.$ Ce qui représente $1{,}5.10^{-4}$ de l'énergie cinétique initiale. La perte est également faible. On découvre donc que " les fluides " absorbent une énergie très faible devant l'énergie cinétique de la comète.

Troisième partie

12.
    - Si l'on note t_c la durée de la combustion, la puissance P s'écrit : $P = \frac{0{,}9 * \frac{1}{2}mv_1^2}{t_c} \approx 1{,}25.10^{20}\ W.$
    - La puissance par unité de surface : $\Phi = \frac{P}{4\pi(R_T + h)^2} \approx \frac{P}{4\pi R_T^2} \approx 2{,}4.10^5\,W.m^{-2}$

13. On évalue le flux solaire surfacique moyen grâce à l'équation bilan : $\Phi_S 4\pi a^2 = \sigma T_S^4 4\pi R_S^2$; ce qui donne :

    $\Phi_S = \sigma T_S^4 \frac{R_S^2}{a^2} \approx 1300\ W.m^{-2}$.

    On note bien que $\Phi_S << \Phi$. Pendant quelques heures, le bilan énergétique de la terre est déterminé par l'explosion de la comète.

14. La puissance d'une tranche de centrale nucléaire est de l'ordre de 10^9 W. La puissance mise en jeu dans ce processus de collision est donc très importante.

15. On traduit l'équilibre (!) radiatif de la terre :
    - La puissance émise vaut $\sigma T_e^4 4\pi R_T^2$,
    - La puissance reçue vaut $4\pi\left(R_T + h\right)^2 \frac{\Phi}{2}$, le facteur 2 traduit le fait que l'émission se fait également vers l'espace.

Le bilan donne bien la relation : $T_e \approx \left(\frac{\Phi}{2\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{h}{2R_T}\right)$. Il ne semble pas indispensable, compte tenu de la qualité du modèle, de tenir compte du terme en $\frac{h}{2R_T}$.

L'application numérique donne $T_e \approx 1200\,K$.

Cette valeur n'est sans doute qu'une évaluation grossière. Mais il y probablement eu un " flash thermique " de grande ampleur capable de causer des importantes modifications (incendies…)…alors pourquoi pas d'expliquer la disparition des dinosaures.

Second problème : Ondes guidées en surface.

Première partie

16. Un milieu peut être localement neutre et comporter des charges fixes et des charges mobiles. Il peut donc y avoir une densité de courant volumique non nulle.

17. $\mathrm{div}\vec{E}=0$, $\mathrm{div}\vec{B}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}=\mu_o\vec{j}+\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

18.

- On néglige le courant de déplacement $\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ devant le courant de conduction $\vec{j}$.
- On peut évaluer le rapport de l'amplitude du courant de déplacement sur celle du courant de conduction par l'expression $\frac{\varepsilon_o\omega}{\gamma}$.
- Pour pouvoir négliger le courant de déplacement, il faut une fréquence $f << \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_o}$. Ce qui donne f << 10^{18} Hz pour le cuivre et f << $5{,}4.10^{6}$ Hz pour le silicium.
- Ce rapport vaut : 10^{-9} pour le cuivre à la fréquence de 1 GHz et 185 pour le silicium à la fréquence de 1 GHz.
- On pourra donc négliger le courant de déplacement dans le cas du cuivre mais pas dans le cas du silicium.

19. On établit de manière classique la relation : $\Delta\vec{E}=\gamma\mu_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, si l'on se place en notation complexe : on a : $\Delta\vec{E}=\frac{2i}{\delta^2}\vec{E}$.

20.

- Dans ce cas, le champ électrique n'est fonction que de x et t. l'équation précédente s'écrit : $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}=\frac{2i}{\delta^2}\vec{E}$.

  Ce qui donne $\vec{E}=\overrightarrow{E_o}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp i\left(\omega t-\frac{x}{\delta}\right)+\overrightarrow{E_o}'\exp\left(\frac{x}{\delta}\right)\exp i\left(\omega t+\frac{x}{\delta}\right)$.

  On impose $\overrightarrow{E_o}'=\vec{0}$ pour éviter les divergences lorsque x augmente. Ce qui donne finalement :

  $\vec{E}=\overrightarrow{E_o}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp i\left(\omega t-\frac{x}{\delta}\right)$.

- Cette onde se propage suivant le sens des x positifs. Le terme en $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$ traduit le phénomène d'atténuation.

  l'onde a une amplitude notable sur une épaisseur de l'ordre de δ appelée épaisseur de peau.
- Pour le cuivre elle est de l'ordre de $6{,}7.10^{-5}$ m à 1 MHz.

21. L'approximation des conducteurs parfaits consiste à supposer que la conductivité est infinie donc que l'épaisseur de peau est nulle. Il s'agit d'un cas limite idéal.

Seconde partie

22. **Dans la zone II**, on utilise l'équation : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .On obtient :

$$E_{ox}(x) = \frac{kc^2}{\omega\varepsilon_r}B_o(x)\ ,\ E_{oy}(x) = 0\ ,\ E_{oz}(x) = -\frac{ic^2}{\omega\varepsilon_r}\frac{dB_o(x)}{dx}$$

Dans la zone I, on utilise l'équation : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .On obtient :

$$E_{ox}(x) = \frac{kc^2}{\omega}B_o(x)\ ,\ E_{oy}(x) = 0\ ,\ E_{oz}(x) = -\frac{ic^2}{\omega}\frac{dB_o(x)}{dx}$$

23. **Dans la zone I**, on établit : $\frac{d^2B_o(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)B_o(x) = 0$.

Dans la zone II, on établit : $\frac{d^2B_o(x)}{dx^2} + \left(\frac{\varepsilon_r\omega^2}{c^2} - k^2\right)B_o(x) = 0$.

24. **Dans la zone I**, $B_o(x) = B_I\exp(-\alpha x)$, à l'aide de la question 23, on montre la relation : $k^2 = \alpha^2 + \frac{\omega^2}{c^2}$

Dans la zone II, $B_o(x) = B_{II}\cos(\beta x + \Phi)$, à l'aide de la question 23, on montre la relation : $k^2 = -\beta^2 + \frac{\varepsilon_r\omega^2}{c^2}$.

On combine ces deux relations et on établit la relation (R1) : $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{(\varepsilon_r - 1)\omega^2}{c^2}$

25. **Analogie** : dans la zone II, on a bien le guidage d'une onde électromagnétique comme dans un guide d'onde à parois métalliques. On note aussi que si $\vec{B}$ est transverse, $\vec{E}$ ne l'est pas.

Quelques différences :
- dans la zone I, on aurait un métal parfait.
- dans la zone I, on aurait un champ électromagnétique nul. Ici, dans le vide, il s'amortit mais n'est pas nul.

Troisième partie

26. On admet que les relations étudiées dans le cours sont toujours valables pour le champ magnétique. A l'interface vide - milieu isolant, les courants surfaciques sont nuls car le milieu est non conducteur. La composante tangentielle du champ magnétique est donc continue. La fonction $B_o(x)$ est donc continue en x = a.

27. On traduit en x = 0 , la continuité de la composante tangentielle du vecteur champ électrique. Elle se traduit par la relation : $E_{oz}(0^+) = 0$ soit $\left.\frac{dB_o(x)}{dx}\right|_{0^+} = 0$ .Ce qui donne $\Phi = 0$.

28. En x = a on traduit :

- la continuité de $B_o(x)$ soit : $B_I \exp(-\alpha a) = B_{II} \cos(\beta a)$.
- La continuité de la composante tangentielle du vecteur champ électrique :

$$\frac{dB_o(a^+)}{dx} = \frac{1}{\varepsilon_r}\frac{dB_o(a^-)}{dx} \text{ soit } \alpha B_I \exp(-\alpha a) = \frac{\beta}{\varepsilon_r} B_{II} \sin(\beta a)$$

29. Les équations précédentes n'ont pas de solution si $\beta a = 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

30. On combine les équations de la question 28 et on établit la relation (R2) :

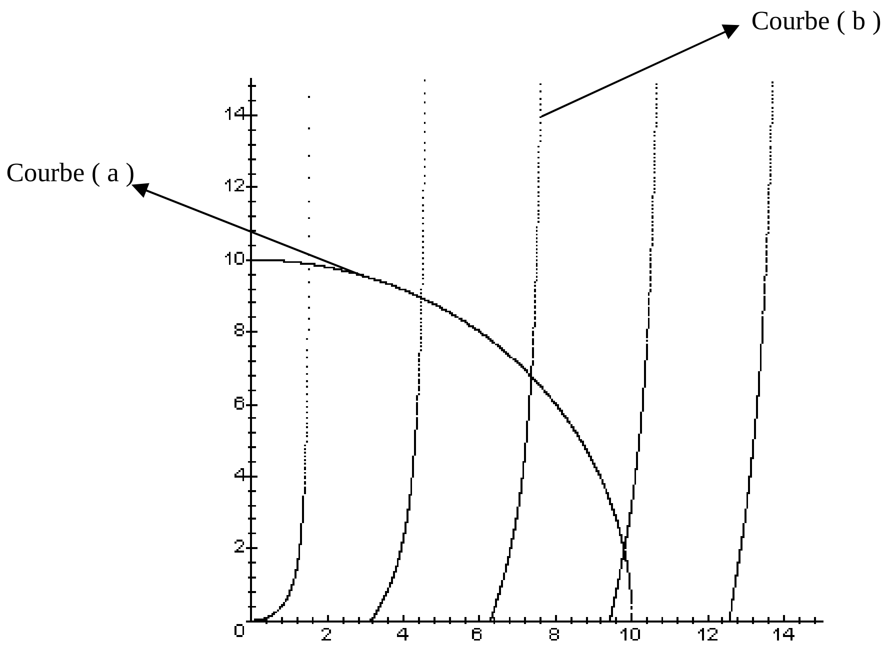
$$\beta \tan(\beta a) = \varepsilon_r \alpha \quad \text{(erreur d'énoncé)}$$

31. On pose $X = \beta a$ et $Y = \alpha a$, on obtient alors le système suivant :

$$X^2 + Y^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2}(\varepsilon_r - 1) \qquad \text{courbe (a)}$$

$$X \tan X = \varepsilon_r Y \qquad \text{courbe (b)}$$

On peut résoudre ce système graphiquement en se limitant à X et Y positifs.



Le nombre de solutions dépend du rayon du cercle : $\frac{\omega a}{c}\sqrt{(\varepsilon_r - 1)}$ donc de la pulsation. Il vaut $E\left(\frac{\omega a}{c\pi}\sqrt{(\varepsilon_r - 1)}\right) + 1$.

32. Un mode n est identifié par la donnée d'un couple (X_n, Y_n). Pour qu'il existe on doit avoir $E\left(\frac{\omega a}{c\pi}\sqrt{(\varepsilon_r - 1)}\right) + 1 \geq n$ donc à la limite on peut appeler la pulsation $\frac{\pi c(n-1)}{a\sqrt{(\varepsilon_r - 1)}}$ pulsation de coupure du mode n.

Pour un guide d'onde à parois métalliques, l'expression de la pulsation de coupure pour le mode n est $\frac{n\pi c}{a}$.