

Première partie régime statique

1.1. Dipôle électrostatique

1.1.1. Moment dipolaire électrique

$$\vec{p}_o = +q\overrightarrow{NP} = +qa\vec{u}_z$$

L'unité du moment dipolaire électrique est : $C.m$ (ou D : Debye tel que $1D = 1/3 \times 10^{-29} C.m$).

1.1.2. Potentiel électrostatique créé par la charge $+q$

$$V_+(M) = \frac{+q}{4\pi\epsilon_o\|\overrightarrow{PM}\|} + C^{te}$$

1.1.3. Potentiel électrostatique $V(M)$ créé par les deux charges

$$\begin{aligned} V(M) = V_+(M) + V_-(M) &= \frac{+q}{4\pi\epsilon_o\|\overrightarrow{PM}\|} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_o\|\overrightarrow{NM}\|} \\ &= \frac{+q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|} - \frac{1}{\|\overrightarrow{NM}\|} \right) \end{aligned}$$

1.1.4. On utilise le système de coordonnées sphérique (r, θ, φ) de M . La base sphérique associée est $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi) \quad \text{et} \quad V(M) = V(r, \theta, \varphi)$$

- La distribution de charges étant invariante par rotation de φ autour de l'axe Oz , donc $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$ ne dépendent pas de φ . Soit :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \vec{E}(r, \theta) = E_r(r, \theta)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta)\vec{u}_\varphi \\ \text{et} \quad V(M) &= V(r, \theta) \end{aligned}$$

- Le plan $\Pi(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de charges, $\vec{E}(M)$ appartient à $\Pi(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et, donc, perpendiculaire à \vec{u}_φ . Soit :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta$$

1.1.5. Potentiel

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PM}\| &= \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} - ra \cos \theta} \underset{r \gg a}{\simeq} r \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \\ \|\overrightarrow{NM}\| &= \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} + ra \cos \theta} \underset{r \gg a}{\simeq} r \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

Soit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{qa \cos \theta}{r^2} = \frac{p_o \cos \theta}{4\pi\epsilon_o r^2}$$

1.1.6. Champ

$$\vec{E}(M) = -\text{grad}V(M) \Rightarrow \begin{cases} E_r(r, \theta) = -\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} \\ E_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} \end{cases}$$

Soient :

$$\boxed{E_r(r, \theta) = \frac{p_o \cos \theta}{4\pi\epsilon_o r^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_\theta(r, \theta) = \frac{2p_o \sin \theta}{4\pi\epsilon_o r^3}}$$

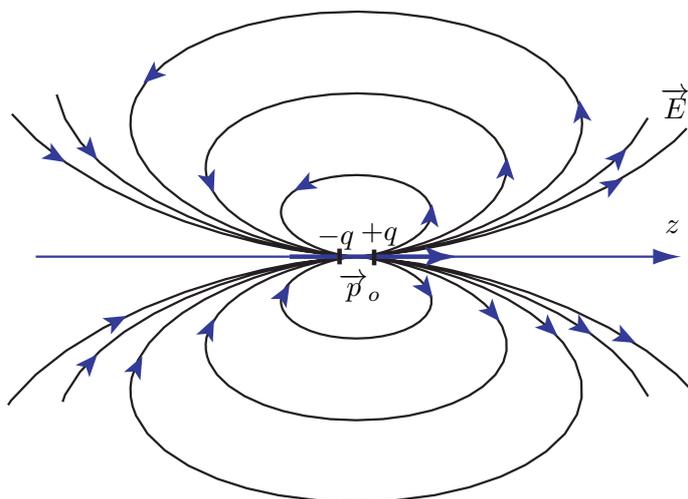
1.1.7. Équation des lignes de champ Une ligne de champ est une courbe en tout point duquel le champ est y tangent.

Soit

$$d\vec{OM} \wedge \vec{E}(M) = \vec{0} \Rightarrow \frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} \Rightarrow r(\theta) = K \sin^2 \theta$$

K est une constante homogène à une distance.

1.1.8. Allure des lignes de champ



- Une ligne de champ électrique n'est jamais fermée (\vec{E} est à circulation conservative).
- Les lignes de champ électrique diverge d'une charge positive et converge vers une charge négative.

1.2. Dipôle magnétostatique

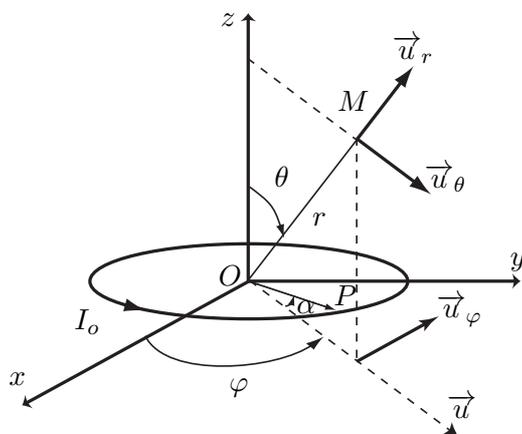


Figure 1-bis

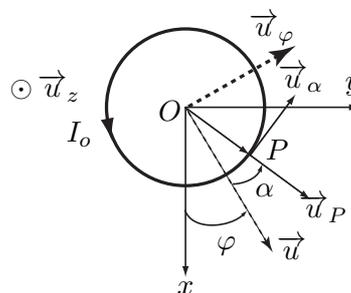


Figure 2-bis

1.2.1.

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(r, \theta, \varphi)$$

Le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ (contrairement au champ $\vec{B}(M)$) est un vrai vecteur, il appartient à l'élément de symétrie de la distribution de courant.

- Le plan contenant l'axe Oz et le point M , défini par $\phi = \text{constante}$, est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. est, donc, $\vec{A}(M)$ perpendiculaire à ce plan et par conséquent collinéaire au vecteur \vec{u}_ϕ :

$$\vec{A}(M) = A(r, \theta, \phi) \vec{u}_\phi$$

- La distribution de courant est invariante par rotation de φ autour de l'axe Oz , donc $\vec{A}(M)$ est indépendant de φ :

$$\vec{A}(M) = A(r, \theta) \vec{u}_\phi$$

1.2.2. En utilisant la figure 2-bis :

$$\vec{u}_P = \cos \alpha \vec{u} + \sin \alpha \vec{u}_\phi \quad \text{et} \quad \vec{u}_\alpha = -\sin \alpha \vec{u} + \cos \alpha \vec{u}_\phi$$

$$\vec{OP} = b \vec{u}_P = b(\cos \alpha \vec{u} + \sin \alpha \vec{u}_\phi) \quad \text{et} \quad d\vec{\ell} = b(-\sin \alpha \vec{u} + \cos \alpha \vec{u}_\phi) d\alpha$$

$$d\vec{\ell} = bd\alpha \vec{u}_\alpha$$

1.2.3. Potentiel vecteur

$$\begin{aligned} \vec{A}(M) = A(r, \theta, \phi) \vec{u}_\phi \quad \Rightarrow \quad A(r, \theta, \phi) &= \vec{A}(M) \cdot \vec{u}_\phi = \oint_{\text{spire}} d\vec{A}_P(M) \cdot \vec{u}_\phi \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \oint_{\text{spire}} \frac{d\vec{\ell} \cdot \vec{u}_\phi}{PM} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \oint_{\text{spire}} \frac{d\ell \cos \alpha}{PM} \end{aligned}$$

En utilisant la figure 1-bis :

$$\vec{PM} = \vec{OM} - \vec{OP} = r \vec{u}_r - b \vec{u}_P$$

$$PM^2 = r^2 + b^2 - 2rb \vec{u}_r \cdot \vec{u}_P$$

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_z + \sin \theta \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_r \cdot \vec{u}_P = \sin \theta \vec{u} \cdot \vec{u}_P = \sin \theta \cos \alpha$$

$$\text{Approximation dipolaire :} \quad \frac{1}{PM} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{b^2}{r^2} - 2\frac{b}{r} \sin \theta \cos \alpha \right]^{-1/2} \underset{r \gg b}{\simeq} \frac{1}{r} \left[1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \alpha \right]$$

Le potentiel vecteur :

$$\begin{aligned} \vec{A}(M) = A(r, \theta, \phi) \vec{u}_\phi &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \left[\frac{b^2 \sin \theta}{r} \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha + \frac{b^2 \sin \theta}{r^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \right] \vec{u}_\phi \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{b^2 \sin \theta}{r^2} \times \pi \vec{u}_\phi \end{aligned}$$

Soit :

$$A(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_o \sin \theta}{r^2} \vec{u}_\phi$$

avec $m_o = \pi b^2 I_0$: moment dipolaire magnétique. Son unité est : $A.m^2$.

1.2.4.

- Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant : le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ appartient à ce plan et, donc, perpendiculaire à \vec{u}_ϕ .
- La distribution du courant est invariante par rotation de φ autour de l'axe Oz : le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ est, donc, indépendant de φ .

D'où :

$$\vec{B}(M) \cdot \vec{u}_\phi = 0 \quad \text{et} \quad B(M) = B(r, \theta)$$

1.2.5. Relation entre $\vec{A}(M)$ et $\vec{B}(M)$:

$$\vec{B}(M) = \text{rot } \vec{A}(M)$$

1.2.6. Composantes de $\vec{B}(M)$:

$$\text{rot } \vec{A}(M) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \vec{u}_\theta \Rightarrow \begin{cases} B_r(r, \theta) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} \\ B_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \end{cases}$$

soient : $B_r(r, \theta) = \frac{\mu_o 2m_o \cos \theta}{4\pi r^3}$ et $B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_o m_o \sin \theta}{4\pi r^3}$

1.2.7. Les expressions de $\vec{A}(M)$ et $\vec{B}(M)$ établies respectivement en §1.2.3. et §1.2.6. sont similaires à celles $V(M)$ et $\vec{E}(M)$ établies respectivement en §1.1.5. et §1.1.6. moyennant la transposition suivante :

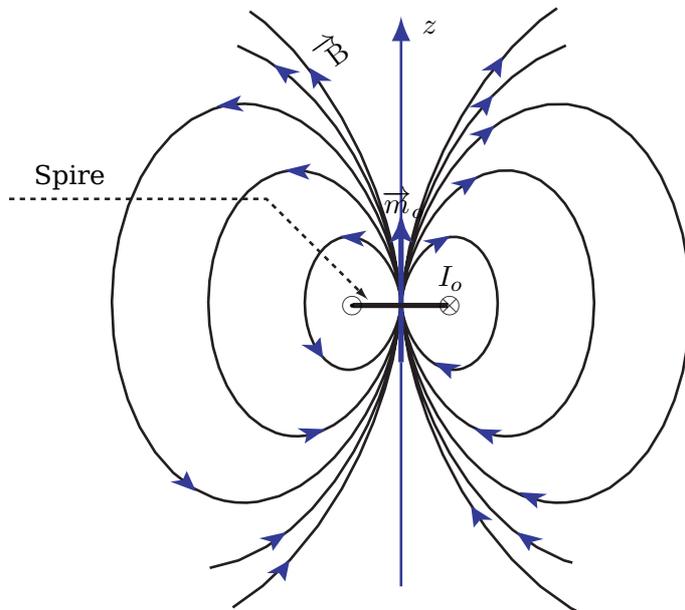
$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_o} &\longleftrightarrow \frac{\mu_o}{4\pi} \\ \vec{p}_o &\longleftrightarrow \vec{m}_o \end{aligned}$$

1.2.8. Lignes de champ loin du dipôle

$$d\vec{OM} \wedge \vec{B}(M) = \vec{0} \Rightarrow \frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} \Rightarrow r(\theta) = C \sin^2 \theta$$

C est une constante homogène à une distance.

1.2.9. Allure des lignes de champ



- Une ligne de champ magnétique est une ligne fermée (\vec{B} est à circulation non conservative).
- Pour les lignes de champ électrique, Voir § 1.1.8.

Deuxième partie Régime variable

2.1. Dipôle électrique oscillant.

2.1.1. intérêts

- ▶ le concept permet de modéliser l'émission des ondes hertziennes par des antennes (rectilignes dans le cas électrique)...
- ▶ le concept permet, aussi, de modéliser l'émission de la lumière par un gaz de faible densité (modèle de l'électron élastiquement lié)...

2.1.2. moment dipolaire

$$\vec{p}(t) = +q\vec{OP} = +qz\vec{u}_z = +qa \cos(\omega t)\vec{u}_z = p_o \cos(\omega t)\vec{u}_z$$

$$\vec{E}(M, t) = \frac{p_o}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2(1 + jkr)\cos\theta\vec{u}_r + (1 - jkr - (kr)^2)\sin\theta\vec{u}_\theta] \exp(-j(\omega t - kr))$$

et

$$\vec{B}(M) = -j\frac{\mu_0\omega p_o}{4\pi r^2}(1 - jkr)\sin\theta \exp(-j(\omega t - kr))\vec{u}_\varphi$$

k étant le vecteur d'onde associé à l'onde électromagnétique rayonnée. On pose $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$.

2.1.3.

- ▷ $r \gg a$: approximation dipolaire (on s'intéresse aux actions à grandes distance par rapport aux dimensions caractéristiques du dipôle).
- ▷ $\lambda \gg a$: approximation de mouvements non relativiste (on se place dans le cadre de la mécanique classique où $v_{max} = a\omega \ll c$).

2.1.4. kr représente le terme de propagation de l'onde rayonnée !!

2.1.5.

- Symétrie : le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ (contenant l'axe Oz) est un plan de symétrie de la distribution. Donc $\vec{E}(M, t)$ appartient à ce plan et $\vec{B}(M, t)$ est perpendiculaire à ce plan.

$$\vec{E}(M, t) // (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) // \vec{u}_\varphi$$

- Invariance : la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe Oz . $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ ne dépendent que de r et de θ .

L'expression du champ électromagnétique est en accord avec la symétrie du problème.

2.1.6. régime quasi-stationnaire : Dans cette approximation on néglige le phénomène de propagation : $\frac{r}{c} \ll T = \frac{2\pi}{\omega}$ ou $r \ll \lambda$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \gg r \Rightarrow kr \ll 1 \quad \text{ce qui donne :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}(M, t) = -j\frac{\mu_0\omega p_o}{4\pi r^2} \sin\theta \exp(-j(\omega t - kr))\vec{u}_\varphi \\ \vec{E}(M, t) = \frac{p_o}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta) \exp(-j(\omega t - kr)) \end{array} \right.$$

2.1.7. régime stationnaire : pas de dépendance temporelle ($\omega = 0$ et $k = 0$)

$$\vec{E}(M, t) = \frac{p_o}{4\pi\epsilon_o r^3} [2\cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta]$$

et

$$\vec{B}(M) = \vec{0}$$

On retrouve le cas d'un dipôle électrostatique !

2.1.8. zone de rayonnement

Zone de rayonnement : c'est la zone de l'espace autour du dipôle à l'intérieur de laquelle on tient compte de la propagation.

Condition ¹ : $r \gg \lambda$

Conséquence : $kr \gg 1$ ou $k^2 r^2 \gg kr \gg 1$

2.1.9. champ électromagnétique rayonné

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}(M) = -\frac{\mu_o \omega^2 p_o}{4\pi r c} \sin\theta \exp(-j(\omega t - kr)) \vec{u}_\varphi \\ E_r(M, t) = -j\omega \frac{p_o}{4\pi\epsilon_o c r^2} \cos\theta \exp(-j(\omega t - kr)) \\ E_\theta(M, t) = -\omega^2 \frac{p_o}{4\pi\epsilon_o c^2 r} \sin\theta \exp(-j(\omega t - kr)) \end{array} \right.$$

2.1.10. L'amplitude $\mathcal{E}_m(r, \theta)$ du champ électrique, en un point M :

$$\frac{|E_r|}{|E_\theta|} = \frac{c}{r\omega} \cotan\theta = \frac{1}{rk} \cotan\theta \ll 1 \quad \Rightarrow \quad |E_r| \ll |E_\theta|$$

soit :

$$\mathcal{E}_m(r, \theta) = \omega^2 \frac{p_o}{4\pi\epsilon_o c^2 r} \sin\theta$$

2.1.11. Tracer, dans un plan $\varphi = \text{constante}$, le diagramme polaire du champ électrique (graphe $r(\theta)$ défini par une valeur déterminée de la norme de $\vec{E}(M)$). Commenter.

2.1.12. Le rapport $\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|} = \frac{1}{\mu_o \epsilon_o c} = c$. On a en plus :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}(M, t)}{c}$$

La structure locale de l'onde émise par le dipôle est, donc, celle d'une *onde plane transversale*. Le plan d'onde est tangent à la sphère, de rayon r et de centre O .

Cette approximation permet d'utiliser des détecteurs à surfaces planes. Ces détecteurs seront placés de telle sorte que la direction de l'onde rayonnée sera normale à leurs surfaces. L'information ainsi détectée (*localement*) est celle de l'onde électromagnétique émise par une source *très éloignée*.

1. En télécommunication : $\lambda \simeq 1\text{cm}$ à 1m ; En optique : $\lambda \simeq 0,4$ à $0,8\mu\text{m}$

2.1.13. vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_e$:

$$\vec{\Pi}_e = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{avec, en notation réelle, :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}(M, t) = \frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} p_o \sin\theta \cos(\omega t - kr + \pi) \vec{u}_\varphi \\ \vec{E}(M, t) = \frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} p_o \sin\theta \cos(\omega t - kr + \pi) \vec{u}_\theta \end{array} \right.$$

$$\text{soit : } \boxed{\vec{\Pi}_e = \left(\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 \frac{p_o^2 \sin^2 \theta}{\mu_0 c r^2} \cos^2(\omega t - kr) \vec{u}_r}$$

Valeur moyenne $\langle \vec{\Pi}_e \rangle_t$:

$$\boxed{\langle \vec{\Pi}_e \rangle_t = \left(\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 \frac{p_o^2 \sin^2 \theta}{2\mu_0 c r^2} \vec{u}_r}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi}_e \rangle_t &= \left(\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 \frac{p_o^2 \sin^2 \theta}{2\mu_0 c r^2} \vec{u}_r \\ &= \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{p_o \omega^2 \sin \theta}{r} \right)^2 \vec{u}_r \\ &= \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(p_o \omega \times \frac{2\pi c}{\lambda r} \times \sin \theta \right)^2 \vec{u}_r \\ &= \frac{1}{8} \frac{1}{\epsilon_0 c} \left(\frac{p_o \omega \sin \theta}{\lambda r} \right)^2 \vec{u}_r \end{aligned}$$

d'où :

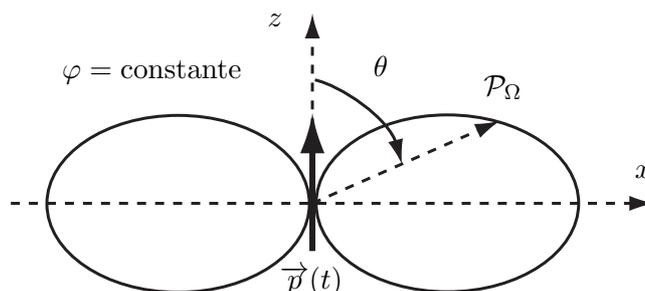
$$\langle \vec{\Pi}_e \rangle_t = \frac{\mu_0 c}{8} \left(I_m a \frac{\sin \theta}{\lambda r} \right)^2 \vec{u}_r$$

avec $I_m = \frac{\omega p_o}{a}$.

On relie la décroissance en $1/r^2$ du vecteur de Poynting au caractère sphérique de l'onde électromagnétique rayonnée à grande distance.

2.1.14. La fonction angulaire de la puissance rayonnée

$$\mathcal{P}_\Omega(\theta, \varphi) = \frac{\langle \Pi_e \rangle}{\langle \Pi_e \rangle_{max}} = \sin^2 \theta$$



Le rayonnement est nul suivant la direction de $\vec{p}(t)$ et maximal suivant toute direction perpendiculaire au moments dipolaire $\vec{p}(t)$ (directions contenues dans le plan xOy).

2.1.15. Puissance électromagnétique $\langle \mathcal{P}_e \rangle$ rayonnée dans tout l'espace: c'est le flux de la valeur moyenne du vecteur de Poynting à travers la surface sphérique (S) de centre O et de rayon r .

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \oiint_{(S)} \langle \vec{\Pi}_e \rangle_t \cdot d\vec{S} \quad ; \quad d\vec{S} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \frac{\mu_0 c}{8} \left(\frac{I_m a}{\lambda} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta d\varphi = \frac{\mu_0 c}{3} \left(\frac{I_m a}{\lambda} \right)^2 \pi$$

$$\mathcal{E}_m(r) = \frac{\omega^2 p_o}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} = \frac{\omega a I_m \mu_0}{4\pi r} = \frac{\mu_0 c a I_m}{2r \lambda} \Rightarrow \frac{a I_m}{\lambda} = \frac{2}{\mu_0 c} r \mathcal{E}_m(r)$$

soient :

$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \frac{\mu_0 c}{3} \left(\frac{I_m a}{\lambda} \right)^2 \pi$	ou	$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \frac{4\pi}{3\mu_0 c} r^2 \mathcal{E}_m^2(r)$
--	----	--

2.1.16. Résistance de rayonnement

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \frac{R_e}{2} I_m^2 = \frac{\mu_0 c}{3} \left(\frac{I_m a}{\lambda} \right)^2 \pi = \frac{2\mu_0 c}{3} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 \pi \frac{I_m^2}{2}$$

soit :

$R_e = \frac{2\mu_0 c}{3} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 \pi$

2.1.17. Application numérique

$\langle \mathcal{P}_e \rangle (r = 10 \text{ km}) = \frac{1}{9} \times 10^9 \text{ W}$	et	$\langle \mathcal{P}_e \rangle (r = 1000 \text{ km}) = \frac{1}{9} \times 10^{37} \text{ W}$
---	----	--

2.2. Dipôle magnétique oscillant

2.2.1. Il faut se placer dans la zone stationnaire où $\lambda \gg r$.

2.2.2. Dans la limite $kr \ll 1$, on est dans le cadre de l'ARQS :

$$\begin{aligned} \vec{A}(M, t) &= \gamma \frac{\sin \theta}{r^2} \exp(-j(\omega t - kr)) \vec{u}_\theta \\ &= \frac{\mu_0 m_o \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \exp(-j(\omega t - kr)) \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

Soit : $\gamma = \frac{\mu_0 m_o}{4\pi} = \frac{\mu_0 I_o b^2}{4}$.

2.2.3.

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0 m_o \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \exp(-j(\omega t - kr)) \vec{u}_\varphi$$

2.2.4.

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \perp \vec{u}_\varphi$ est un plan d'anti-symétrie pour la distribution de courant : la champ $\vec{E}(M, t)$ est perpendiculaire à ce plan. Donc, $\vec{E}(M, t)$ est suivant \vec{u}_φ . Soient :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 m_o}{4\pi r c} \omega^2 \sin \theta \exp(-j(\omega t - kr)) \vec{u}_\varphi \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 m_o}{4\pi r c^2} \omega^2 \sin \theta \exp(-j(\omega t - kr)) \vec{u}_\theta$$

2.2.5.

$$\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|} = c$$

La structure locale de l'onde émise par le dipôle est, donc, celle d'une onde plane transversale.

En utilisant la transposition utilisée en §1.2.7., on retrouve le résultat analogue au champ électromagnétique rayonné par le dipôle électrique oscillant.

2.2.6. Vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_m$:

$$\vec{\Pi}_m = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{avec, en notation réelle, :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 m_o}{4\pi r c^2} \omega^2 \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\varphi \\ \vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 m_o}{4\pi r c} \omega^2 \sin \theta \cos(\omega t - kr + \pi) \vec{u}_\theta \end{array} \right.$$

$$\text{soit : } \quad \vec{\Pi}_m = \left(\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c} \right)^2 \frac{m_o^2 \sin^2 \theta}{\mu_0 c r^2} \cos^2(\omega t - kr) \vec{u}_r$$

Valeur moyenne $\langle \vec{\Pi}_m \rangle_t$:

$$\langle \vec{\Pi}_m \rangle_t = \left(\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c} \right)^2 \frac{m_o^2 \sin^2 \theta}{2\mu_0 c r^2} \vec{u}_r$$

2.2.7. Puissance moyenne $\langle \mathcal{P}_m \rangle$ rayonnée dans tout l'espace: c'est le flux de la valeur moyenne du vecteur de Poynting à travers la surface sphérique (S) de centre O et de rayon r .

$$\langle \mathcal{P}_m \rangle = \oiint_{(S)} \langle \vec{\Pi}_m \rangle_t \cdot d\vec{S} \quad ; \quad d\vec{S} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

$$\langle \mathcal{P}_m \rangle = \left(\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c} \right)^2 \frac{m_o^2}{2\mu_0 c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{\mu_0 \omega^2}{4c} \right)^2 \frac{m_o^2}{2\mu_0 c}$$

$$\text{soient : } \quad \langle \mathcal{P}_m \rangle = \left(\frac{m_o^2 \mu_0}{12\pi c^3} \right) \omega^4 \quad \text{ou} \quad \langle \mathcal{P}_m \rangle = \left(\frac{4}{3} \mu_0 c \pi^5 I_o^2 \right) \frac{b^4}{\lambda^4} = \frac{1}{2} R_o I_o^2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^4$$

$$R_o = \frac{8}{3} \mu_0 c \pi^5 = 307,6 \text{ k}\Omega$$

2.3. Comparaison

2.3.1. En utilisant le résultat de la question §2.1.15. :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \frac{\mu_0 \pi}{3c} I_o^2 \ell^2 f^2$$

2.3.2. En utilisant le résultat de la question §2.2.7. :

$$\langle \mathcal{P}_m \rangle = \frac{8\mu_0 \pi^5}{3c^3} I_o^2 \ell^4 f^4$$

2.3.3. Application numérique:

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = 4487,21 \times 10^{-7} \text{ W} \quad ; \quad \langle \mathcal{P}_m \rangle = 15,51 \times 10^{-20} \text{ W} \quad ; \quad \eta = \frac{8}{c^2} \pi^4 \ell^2 f^2 = 345,64 \times 10^{-8}$$

Troisième partie

Application : réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait

3.1. L'équation de propagation du champ électrique

$$\Delta \vec{E}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{E}_i(M, t) = -k_i^2 \vec{E}_i(M, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}_i(M, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}_i(M, t) \quad \Rightarrow \quad k_i = \frac{\omega_i}{c}$$

3.2. L'onde incidente est polarisée rectilignement selon \vec{u}_y et se propage suivant \vec{u}_x .

3.3. Champ magnétique

$$\vec{B}_i(M, t) = \frac{\vec{u}_x \times \vec{E}_i(M, t)}{c} = \frac{E_o}{c} \exp(-j(\omega_i t - k_i x)) \vec{u}_z$$

3.4. Un conducteur ohmique est le siège d'une dissipation par effet Joule ; le conducteur sera considéré parfait si cette dissipation est négligeable, donc, si la conductivité est très élevée.

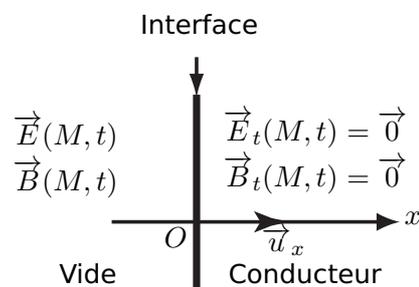
3.5.

Soit $[\vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t)]$ le champ électromagnétique de l'onde résultante dans la partie vide.

σ et \vec{j}_s désignent, respectivement, la densité surfacique de charges et de courant sur l'interface vide-conducteur.

$$\vec{E}(x = 0, t) = -\frac{\sigma}{\epsilon_o} \vec{u}_x$$

$$\vec{B}(x = 0, t) = -\mu_o \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x$$



3.6. Sous l'effet du champ électrique incident $\vec{E}_i(M, t)$, les électrons de la surface conductrice sont mis en mouvement forcé à la pulsation ω (celle de l'onde incidente) ce qui engendre l'apparition (par induction) d'un courant surfacique qui crée à son tour un champ électrique électromagnétique (onde réfléchi) $\vec{E}_r(M, t)$ et $\vec{B}_r(M, t)$.

3.7. *Relation de passage en $x = 0$: L'OPPM est transverse électromagnétique et sa direction de propagation est u_x , d'où :

$$\vec{E}(x = 0, t) = \vec{E}_i(x = 0, t) + \vec{E}_r(0 = X, t) = \vec{0} = \vec{E}_o \exp -j\omega_i t + \vec{E}_{or} \exp j\omega_r t$$

$$\vec{E}(x = 0, t) = \vec{E}_i(x = 0, t) + \vec{E}_r(0 = X, t) = \vec{0} = \vec{E}_o \exp -j\omega_i t + \vec{E}_{or} \exp j\omega_r t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_r = \omega_i \\ \vec{E}_o = -\vec{E}_{or} \end{cases}$$

L'onde incidente se propage suivant la direction des x croissant, alors que celle réfléchie se propage suivant la direction des x décroissants : $\vec{k}_i = -\vec{k}_r = k_i \vec{u}_x$.

3.8. Dans le cadre de la *mécanique non relativiste*, l'expression des champs électriques $\vec{E}'_i(M, t)$ mesurés dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$\vec{E}'(M, t) = \vec{E}(M, t) + \vec{v}_e \wedge \vec{B}(M, t)$$

où \vec{v}_e est la vitesse d'entraînement . Soient, avec $\vec{v}_e = \vec{v}$:

► Champ incident :

$$\begin{aligned} \vec{E}'_i(M, t) &= \vec{E}_i(M, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}_i(M, t) \\ &= \vec{E}_i(M, t) + v \vec{u}_x \wedge \frac{E_o}{c} \exp(-j(\omega_i t - k_i x)) \vec{u}_z \\ &= \vec{E}_i(M, t) - \frac{v}{c} E_o \exp(-j(\omega_i t - k_i x)) \vec{u}_y \\ &= \vec{E}_i(M, t) - \frac{v}{c} \vec{E}_i(M, t) \end{aligned}$$

► Champ réfléchi :

$$\begin{aligned} \vec{E}'_r(M, t) &= \vec{E}_r(M, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}_r(M, t) \\ &= \vec{E}_r(M, t) + v \vec{u}_x \wedge \frac{E_o}{c} \exp(-j(\omega_i t + k_i x)) \vec{u}_z \\ &= \vec{E}_r(M, t) - \frac{v}{c} E_o \exp(-j(\omega_i t + k_i x)) \vec{u}_y \\ &= \vec{E}_r(M, t) + \frac{v}{c} \vec{E}_r(M, t) \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{E}'_i(M, t) = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \vec{E}_i(M, t) \quad \text{et} \quad \vec{E}'_r(M, t) = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \vec{E}_r(M, t)$$

3.9.

$$X = vt$$

3.10. Relation de passage en $x = X$:

$$\vec{E}'_i(x = X, t) + \vec{E}'_r(x = X, t) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v}{c}\right) \exp[-j(\omega_i t - k_i X)] &= -r_a \left(1 + \frac{v}{c}\right) \exp[-j(\omega_r t + k_r X)] \\ \left(1 - \frac{v}{c}\right) \exp\left[-j\omega_i \left(1 - \frac{v}{c}\right) t\right] &= -r_a \left(1 + \frac{v}{c}\right) \exp\left[-j\omega_r \left(1 + \frac{v}{c}\right) t\right] \end{aligned}$$

soient :

$$f_r = f_i \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)} \quad \text{et} \quad r_a = -\frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}$$

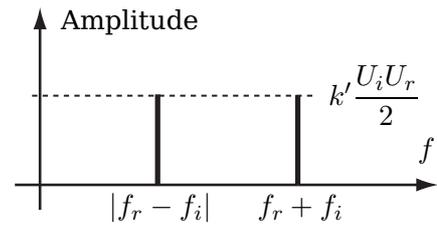
3.11.

$$f_r \approx f_i \left(1 - 2\frac{v}{c}\right) \quad \Delta f \approx \frac{|f_r - f_i|}{f_i} = \frac{2v}{c}$$

3.12.

3.12.1. spectre

$$\begin{aligned}
 u_s(t) &= k' \times u_r(t) \times u_i(t) \\
 &= k' \times U_i \times U_r \times \cos(2\pi f_r + \phi) \times \cos(2\pi f_i) \\
 &= k' \frac{U_i U_r}{2} [\cos(2\pi(f_r + f_i) + \phi) + \cos(2\pi(f_r - f_i) + \phi)]
 \end{aligned}$$

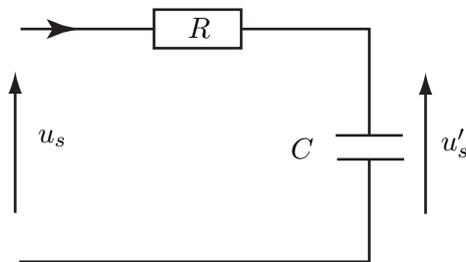


3.12.2. Le multiplieur un composant non linéaire !!!.

3.13. On utilise un filtre passe-bas. Le signal récupéré (après filtrage) est :

$$u'_s = k' \frac{U_i U_r}{2} \cos(2\pi(f_r - f_i) + \phi)$$

Exemple de filtre (*simple*) passe-bas :



Condition de fonctionnement :

$$|f_r - f_i| \ll \frac{1}{RC} \ll f_r + f_i$$

3.14. Application numérique

3.14.1.

$$\lambda = \frac{c}{f_i} =$$

3.14.2.

$$x \gg \lambda \Leftrightarrow x > 10 \frac{c}{f_i} = x_o$$

3.14.3.

$$\frac{\Delta f}{f_i} = 2 \frac{v_{voiture}}{c} \Rightarrow v_{voiture} = \frac{\Delta f}{2 f_i} c$$