

Étude d'un guide d'ondes électromagnétiques

1^{ère} partie :

Modèle de conducteur métallique-Conducteur parfait

1.1 Effet de peau

1.1.1 en régime harmonique $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \times i\omega$

$$\text{soit } r = \frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}|} = \frac{|\frac{i\omega}{\mu_0 c_0^2} \vec{E}|}{|\sigma \vec{E}|} = \frac{\omega}{\sigma \mu_0 c_0^2}$$

A.N : $r = 9.1 \cdot 10^{-9} \ll 1$ donc $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligé devant $\mu_0 \vec{j}$

1.1.2 (M-A) se simplifie $\overrightarrow{rot} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$

1.1.3 l'onde incidente et réfléchiée étant de pulsation ω , la relation de passage à la surface du conducteur ne sera vérifiée pour un instant quelconque que si l'onde transmise est de même pulsation $\omega' = \omega$

1.1.4 le système {onde incidente + conducteur} est invariant par translation selon Ox et Oy donc \vec{E}_t ne dépend que de z (l'onde transmise est plane)

par l'équation (M-G) $div \vec{E}_t = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ on obtient $\frac{dE_{tz}}{dz} = 0$ en excluant les solutions qui ne se propagent pas de z (il faut temps+espace), il vient $\vec{E}_t = E_{tx} \vec{u}_x + E_{ty} \vec{u}_y$

la relation de passage, en $z=0$, du champ électrique permet d'écrire que $E_i \vec{u}_y + E_r \vec{u}_y - \vec{E}_t = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{z}$ donne, par projection, $\vec{E}_t = E_t(z) \vec{u}_y$

1.1.5 à l'intérieur du conducteur, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$div \vec{E}_t = 0$$

$$div \vec{B}_t = 0$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{B}_t = \mu_0 \sigma \vec{E}_t$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{E}_t = -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t}$$

donc :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot} \vec{E}_t) = \overrightarrow{grad} \underbrace{div \vec{E}_t}_{=0} - \Delta \vec{E}_t = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$$

or $\vec{E}_t(M, t) = \vec{E}_t(M) \exp -i\omega t$ soit :

$$\Delta \vec{E}_t(M) \exp -i\omega t = \mu_0 \sigma (-i\omega) \vec{E}_t(M) \exp -i\omega t \Rightarrow \Delta \vec{E}_t(M) + i\mu_0 \sigma \omega \vec{E}_t(M) = \vec{0}$$

1.1.6 on a $\Delta \equiv \frac{d^2}{dz^2}$, par projection sur \vec{u}_y du résultat 1.1.5, il vient :

$$\frac{d^2 E_t(z)}{dz^2} + i\mu_0 \sigma \omega E_t(z) = 0$$

soit : $k_t^2 = i\mu_0 \sigma \omega$

1.1.7 on a $i = (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^2$ donc on peut écrire $\underline{k}_t = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} (i + 1)$

d'où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$

1.1.8 la solution de l'équation (5) s'écrit :

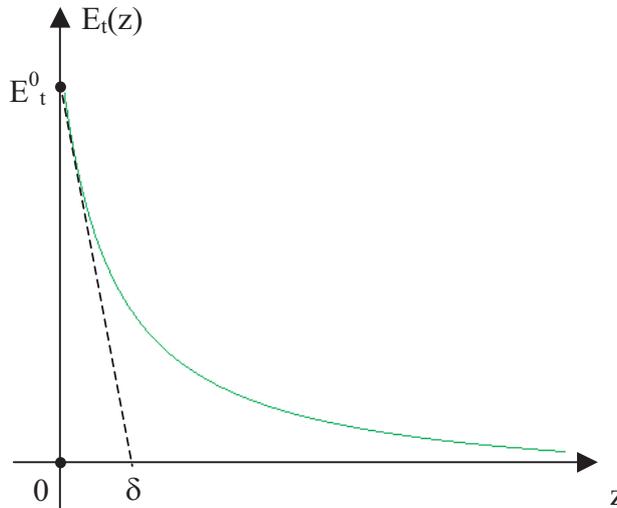
$$\underline{E}_t(z) = \underline{A} \exp i \underline{k}_t z + \underline{B} \exp -i \underline{k}_t z = \underline{A} \exp \frac{i-1}{\delta} z + \underline{B} \exp \frac{-i+1}{\delta} z$$

$|\underline{E}_t(z)|$ doit être fini pour $z \rightarrow +\infty$ (très loin dans le conducteur) donc $\underline{B} \equiv 0$
donc :

$$\underline{E}_t(z) = \underline{A} \exp \frac{i-1}{\delta} z = E_t^0 \exp -i\varphi \exp \frac{i-1}{\delta} z$$

avec $E_t^0 > 0$

1.1.9 le module de $\underline{E}_t(z)$ s'écrit $E_t(z) = |\underline{E}_t(z)| = E_t^0 \exp -\frac{1}{\delta} z$



δ caractérise la distance d'atténuation du champ à l'intérieur du conducteur. (au bout de 5δ le champ est quasi-nul)

1.1.10 A.N : $\delta = 2 \cdot 10^{-5} m$

1.1.11 on a : $\vec{E}_t(M, t) = E_t^0 \exp -i\varphi \exp i \underline{k}_t z \exp -i\omega t \vec{u}_y = E_t^0 e^{i(k_t z - \omega t - \varphi)} \vec{u}_y$

qui est une onde plane (atténuée), donc l'équation de MAXWELL-FARADAY donne :

$$\vec{B}_t(M, t) = \frac{\underline{k}_t \vec{u}_z \times \vec{E}_t(M, t)}{\omega} = -\frac{(1+i)}{\omega \delta} E_t^0 \exp(-z/\delta) e^{i(z/\delta - \omega t - \varphi)} \vec{u}_x$$

1.2 Modèle de conducteur parfait

1.2.1 en hautes fréquences $\omega \rightarrow +\infty$ on a $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \rightarrow 0^+$

1.2.2 à l'intérieur du conducteur parfait : $z > 0$ et $\delta \rightarrow 0^+$

donc

$$|\vec{E}_t| \sim \exp(-z/\delta) \equiv 0$$

ainsi que

$$|\vec{B}_t| \sim \frac{\exp(-z/\delta)}{\delta} \equiv 0$$

1.2.3 d'après l'énoncé $\rho \equiv 0$ et on a :

$$|\vec{j}| = \sigma |\underline{E}_t| \sim \frac{\exp(-z/\delta)}{\delta^2} \equiv 0$$

1.2.4 un éventuel excès de charges ou un courant sera à la surface du conducteur parfait.

1.2.5 on a :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \rho_s / \varepsilon_0 \vec{n}$$

et

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \times \vec{n}$$

soit les quatres relations :

continuité de la composant tangentielle de \vec{E} : $E_{2t} = E_{1t}$

continuité de la composant normale de \vec{B} : $B_{2n} = B_{1n}$

discontinuité de la composant normale de \vec{E} : $E_{2n} - E_{1n} = \rho_s / \varepsilon_0$

discontinuité de la composant tangentielle de \vec{B} : $B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 j_s$

1.2.6 pour un conducteur parfait $\vec{E}_1 \equiv \vec{0}$ et $\vec{B}_1 \equiv \vec{0}$, siot :

$$E_{2t} = 0, B_{2n} = 0, E_{2n} = \rho_s / \varepsilon_0 \text{ et } B_{2t} = \mu_0 j_s$$

1.2.7 $\forall \rho_s, j_s$ on aura :

continuité de la composant tangentielle de \vec{E} : $E_{2t} = 0$

continuité de la composant normale de \vec{B} : $B_{2n} = 0$

2^{ème} partie :

Structure de l'onde électromagnétique à l'intérieur d'un guide d'ondes rectangulaire

2.1 Onde transverse électrique TE

2.1.1 à l'intérieur du guide sans charges, ni courants volumiques , $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$\text{div} \vec{E} = 0$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\underbrace{\text{div} \vec{B}}_0) - \Delta \vec{B} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})}{\partial t} = -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

soit : l'équation de D'alambert

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

par projection sur \vec{u}_z , il vient :

$$\Delta B_z - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0$$

or

$$B_z = B_{0z}(x, y) e^{i(k_g z - \omega t)}$$

soit :

$$\frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2\right) B_{0z} = 0$$

2.1.2 on a : $\underline{B}_{0z}(x, y) = (\underline{A}_1 \cos \alpha x + \underline{A}_2 \sin \alpha x)(\underline{B}_1 \cos \beta y + \underline{B}_2 \sin \beta y)$ est solution si elle vérifie l'équation de propagation 2.1.1

on a : $\frac{\partial^2 \underline{B}_{0z}}{\partial x^2} = -\alpha^2 \underline{B}_{0z}$ et aussi $\frac{\partial^2 \underline{B}_{0z}}{\partial y^2} = -\beta^2 \underline{B}_{0z}$

donc, la condition s'écrit : $(-\alpha^2 - \beta^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2) \underline{B}_{0z} = 0$

comme l'onde TE n'est pas transverse magnétique donc $\underline{B}_{0z} \neq 0$

soit la relation demandée :

$$k_g^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \alpha^2 - \beta^2$$

2.1.3 MAXWELL-FARADAY s'écrit :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{E}_{0x} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{E}_{0y} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ 0 \end{vmatrix} = +i\omega \begin{vmatrix} \underline{B}_{0x} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{B}_{0y} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{B}_{0z} e^{i(k_g z - \omega t)} \end{vmatrix} \implies \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ ik_g \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{E}_{0x} \\ \underline{E}_{0y} \\ 0 \end{vmatrix} = i\omega \begin{vmatrix} \underline{B}_{0x} \\ \underline{B}_{0y} \\ \underline{B}_{0z} \end{vmatrix}$$

de même MAXWELL-AMPERE s'écrit :

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \implies \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{B}_{0x} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{B}_{0y} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{B}_{0z} e^{i(k_g z - \omega t)} \end{vmatrix} = \frac{-i\omega}{c_0^2} \begin{vmatrix} \underline{E}_{0x} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{E}_{0y} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ 0 \end{vmatrix} \implies \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ ik_g \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{B}_{0x} \\ \underline{B}_{0y} \\ \underline{B}_{0z} \end{vmatrix} = \frac{-i\omega}{c_0^2} \begin{vmatrix} \underline{E}_{0x} \\ \underline{E}_{0y} \\ 0 \end{vmatrix}$$

par projection de M-A sur \vec{u}_x on a :

$$\frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y} - ik_g \underline{B}_{0y} = \frac{-i\omega}{c_0^2} \underline{E}_{0x}$$

et par projection de M-F sur \vec{u}_y , pour éliminer \underline{B}_{0y} , on a :

$$ik_g \underline{E}_{0x} = i\omega \underline{B}_{0y}$$

On en déduit :

$$\underline{E}_{0x} = \frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2} \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y}$$

2.1.4 de même par projection de M-A sur \vec{u}_y on a :

$$ik_g \underline{B}_{0x} - \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x} = \frac{-i\omega}{c_0^2} \underline{E}_{0y}$$

et par projection de M-F sur \vec{u}_x , pour éliminer \underline{B}_{0x} , on a :

$$-ik_g \underline{E}_{0y} = i\omega \underline{B}_{0x}$$

On en déduit :

$$\underline{E}_{0y} = \frac{-i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2} \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x}$$

2.1.5 tenant compte de 2.1.2, on a :

$$\begin{cases} \underline{E}_{0x} = \frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2} \beta (\underline{A}_1 \cos \alpha x + \underline{A}_2 \sin \alpha x)(-\underline{B}_1 \sin \beta y + \underline{B}_2 \cos \beta y) \\ \underline{E}_{0y} = \frac{-i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2} \alpha (-\underline{A}_1 \sin \alpha x + \underline{A}_2 \cos \alpha x)(\underline{B}_1 \cos \beta y + \underline{B}_2 \sin \beta y) \end{cases}$$

2.1.6 d'après 1.2.7 en $x = 0$ ou $x = a$, on aura $\underline{E}_{0y}(x = 0, y) = 0$ et $\underline{E}_{0y}(x = a, y) = 0$
de même en $y = 0$ ou $y = b$, on aura $\underline{E}_{0x}(x, y = 0) = 0$ et $\underline{E}_{0x}(x, y = b) = 0$
donc

$$\underline{E}_{0y}(x = 0, y) = 0 \implies \underline{A}_2 = 0$$

car y est quelconque entre 0 et b .

et

$$\underline{E}_{0x}(x, y = 0) = 0 \implies \underline{B}_2 = 0$$

car x est quelconque entre 0 et a .

soit :

$$\underline{B}_{0z}(x, y) = \underline{A}_1 \underline{B}_1 \cos \alpha x \cos \beta y$$

comme l'onde TE n'est pas transverse magnétique donc $\underline{B}_{0z} \neq 0 \implies \underline{A}_1 \neq 0$, et $\underline{B}_1 \neq 0$
et puis

$$\underline{E}_{0y}(x = a, y) = 0 \implies \underline{A}_1 \underline{B}_1 \sin \alpha a = 0 \implies \alpha = m\pi/a$$

avec $m \in \mathbb{N}$ et

$$\underline{E}_{0x}(x, y = b) = 0 \implies \underline{A}_1 \underline{B}_1 \sin \beta b = 0 \implies \beta = n\pi/b$$

avec $n \in \mathbb{N}$, d'où :

$$\underline{B}_{0z}(x, y) = \underline{A}_1 \underline{B}_1 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

2.1.7 il vient :

$$\begin{cases} \underline{E}_{0x} = -\frac{i\omega}{c_0^2 - k_g^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \underline{A}_1 \underline{B}_1 \cos \alpha x \sin \beta y \\ \underline{E}_{0y} = -\frac{-i\omega}{c_0^2 - k_g^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \underline{A}_1 \underline{B}_1 \sin \alpha x \cos \beta y \end{cases}$$

donc :

$$\underline{A}_{mn} = \frac{-i\omega}{c_0^2 - k_g^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \underline{A}_1 \underline{B}_1$$

et

$$\underline{B}_{mn} = \frac{i\omega}{c_0^2 - k_g^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \underline{A}_1 \underline{B}_1$$

2.1.8 d'après 2.1.2 :

$$k_g^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

donc :

$$k_{g,mn} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}$$

pour une onde progressive vers les $z > 0$:

$$k_{g,mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} > 0$$

2.1.9 il y a propagation si $k_{g,mn}$ est réel c-à-d :

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} > \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \implies \omega > \omega_c = \pi c_0 \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

Le guide est un filtre passe-haut des ondes TE, de fréquence de coupure $\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$
Si $\nu < \nu_c$ alors $k_g = i|k_g|$, il y aura atténuation de l'onde le long du guide car le terme de phase
 $e^{i(k_g z - \omega t)} = \exp(-|k_g|z) e^{-i\omega t}$

2.1.10 dans le guide, on a :

$$\lambda_{g,mn} = \frac{2\pi}{k_{g,mn}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}}$$

dans le vide $\lambda = \frac{2\pi c_0}{\omega}$ donc :

$$\lambda_{g,mn} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}}$$

2.2 Onde transverse magnétique TM

2.2.1 si $m = 0$ et $n \neq 0$, on aura : $k_{g,mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}$, le dénominateur dans l'expression de l'onde

$$TM_{mn} \text{ est non nul : } \omega^2 - c_0^2 k_{g,mn}^2 = \left(\frac{\pi n c_0}{a}\right)^2 \neq 0$$

il reste donc, $m = 0$:

$$TM_{mn} \begin{cases} E_{0x,mn} = 0 \\ E_{0y,mn} = 0 \\ E_{0z,mn} = 0 \end{cases}$$

ce qui absurde!

de même si $m \neq 0$ et $n = 0$, donc pour que l'onde TM_{mn} existe il faut à la fois $n \neq 0$ et $m \neq 0$

2.3 Sélection des modes de propagation par le guide d'ondes

2.3.1 :

$$TE_{10} \implies \nu_{c10} = \frac{c_0}{2a} = 6,56 \text{ GHz}$$

$$TE_{01} \implies \nu_{c01} = \frac{c_0}{2b} = 14,8 \text{ GHz}$$

$$TE_{11} \implies \nu_{c11} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 16,2 \text{ GHz}$$

$$TM_{11} \implies \nu_{c11} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 16,2 \text{ GHz}$$

$$TE_{20} \implies \nu_{c20} = \frac{c_0}{a} = 13,1 \text{ GHz}$$

2.3.2 d'après 2.1.9 il faut avoir :

$$6,56 \text{ GHz} \leq \nu < 14,8 \text{ GHz}$$

ainsi les modes TE_{01} , TE_{11} et TM_{11} ne peuvent pas se propager dans le guide car $\nu < \nu_{cmn}$.

2.3.3 on a : $v_\varphi = \frac{\omega'}{k_g}$, à la pulsation $\omega' = 2\pi\nu'$, donc :

$$v_\varphi(TE_{10}) = \frac{\omega'}{\sqrt{\frac{\omega'^2}{c_0^2} - \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{0}{b^2}\right)}} = 3,4 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_\varphi(TE_{20}) = \frac{\omega'}{\sqrt{\frac{\omega'^2}{c_0^2} - \pi^2\left(\frac{4}{a^2} + \frac{0}{b^2}\right)}} = 8,6 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

les deux vitesses de phases sont tel que : $v_\varphi(TE_{20}) > v_\varphi(TE_{10}) > c_0$, car la phase de l'onde en physique n'est ni matière ni énergie!

2.3.4 le mode TE_{20} est plus rapide que TE_{10} , le signal formé par combinaison des deux modes sera déformé à la sortie du guide, car $v_\varphi(TE_{20}) \approx 2v_\varphi(TE_{10})$

3^{ème} partie :

Guide d'ondes monomode TE_{10}

3.1 Sélection du mode du travail

3.1.1 un guide d'onde est un filtre passe-haut vis à vis d'un mode (m, n) donc pour sélectionner un seul mode il faut choisir la fréquence du générateur d'onde (ex : klystron) entre les deux premières fréquences de coupure ainsi d'après 2.3.1 :

$$\nu_{min} = inf(\nu_{mn}) = \nu_{10} = \frac{c_0}{2a}$$

et

$$\nu_{max} = inf(\nu_{01}, \nu_{11}, \nu_{20}) = \nu_{20} = \frac{c_0}{a}$$

3.1.2 on a :

$$\nu_{10} = 6,56 \text{ GHz} < \nu = 9.67 \text{ GHz} < 13.1 \text{ GHz} < \nu_{mn}$$

d'où le seul mode sélectionné est : TE_{10}

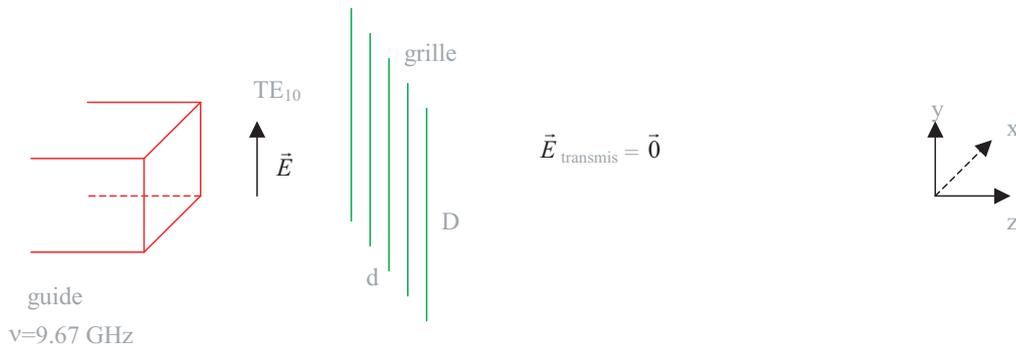
3.1.3 pour TE_{10} , $m = 1$ et $n = 0$, d'après 2.1.7 :

$$\begin{cases} \underline{E}_x = 0 \\ \underline{E}_y = \frac{i\omega a}{\pi} A_1 B_1 \sin(\frac{\pi x}{a}) \exp i(k_g z - \omega t) \\ \underline{E}_z = 0 \end{cases}$$

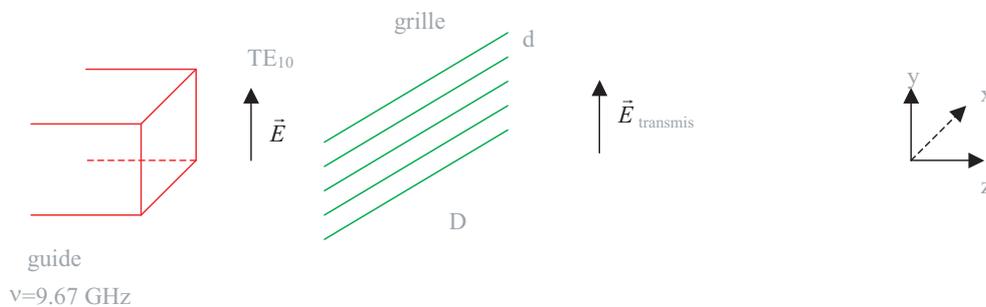
qui est une onde polarisée rectiligne selon Oy .

3.1.4 on a : $d < D$, la fréquence de coupure la plus basse de la grille (ensemble de guides) est donnée par : $\nu_c = \frac{c_0}{2D}$ qui doit être suffisamment faible ($\nu_c < 9.67 \text{ GHz}$)

cas 1 : $\vec{u}' // \vec{u}_y$



cas 2 : $\vec{u}' // \vec{u}_x$



la grille est un milieu anisotrope conducteur parfait selon \vec{u} et isolant parfait selon \vec{u}' .

la composante de \vec{E} selon \vec{u} sera absorbée (effet de peau). En fait le champ perd son énergie en créant un courant (mouvement des électrons) selon \vec{u} .

3.1.5 c'est la loi de Malus.

3.1.6 pour d suffisamment élevé le champ \vec{E} sera transmis quelque soit l'orientation de la grille car $\nu > \frac{c_0}{d} > \frac{c_0}{D}$.

la valeur critique d_c est donnée par :

$$d_c = \frac{c_0}{\nu} = 3.1 \text{ cm}$$

3.2 Mesure de la fréquence

3.2.1 fréquence-mètre et oscilloscope.

3.2.2 à une fréquence $\nu = 9.67 \text{ GHz}$, pour satisfaire l'ARQS la dimension r du circuit de mesure (fils de connexion) doit être : $r \ll c_0.T = 3.1 \text{ cm}$ ce qui est absurde !

3.2.3 on remplace $E(x, y, z, t) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t)$ dans l'équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

soit :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$$

3.2.4 les conditions aux limites sur les parois s'écrivent :

$$E(x=0, y, z) = 0 \quad ; \quad E(x=\ell_x, y, z) = 0$$

$$E(x, y=0, z) = 0 \quad ; \quad E(x, y=\ell_y, z) = 0$$

$$E(x, y, z=0) = 0 \quad ; \quad E(x, y, z=\ell_z) = 0$$

on en déduit : $k_x \ell_x = n_x \pi$; $k_y \ell_y = n_y \pi$ et $k_z \ell_z = n_z \pi$ tels que : $n_x n_y n_z \neq 0$ (sinon $E \equiv 0$)

3.2.5 on a d'après 3.2.3 : $\omega = c_0 \pi \sqrt{(\frac{n_x}{\ell_x})^2 + (\frac{n_y}{\ell_y})^2 + (\frac{n_z}{\ell_z})^2}$

la valeur minimale : $\omega_f = c_0 \pi \sqrt{(\frac{1}{\ell_x})^2 + (\frac{1}{\ell_y})^2 + (\frac{1}{\ell_z})^2}$

A.N : $\nu_f = \frac{\omega_f}{2\pi} = 10.3 \text{ GHz}$

3.2.6 En plaçant un détecteur de champ E dans la cavité, on distingue facilement :

$\nu < \nu_f(\ell)$, le détecteur mesurera $E = 0$.

$\nu > \nu_f(\ell)$, le détecteur mesurera $E \neq 0$.

il suffit de noter la valeur d'apparition du champ : $\nu = \frac{c_0}{2} \sqrt{2(\frac{1}{\ell_x})^2 + (\frac{1}{\ell})^2}$

3.2.7 on a : $\nu = \frac{c_0}{2} \sqrt{2(\frac{1}{\ell_x})^2 + (\frac{1}{\ell})^2} \Rightarrow \ell = 2.27 \text{ cm}$

3.3 Couplage du guide d'ondes à une charge

3.3.1 pour pouvoir dire que le conducteur occupe le demi-espace $z > L$, mais surtout pour ne pas faire intervenir l'onde qui sera réfléchi en $z = L + e$!

3.3.2 comme les ondes ici ne sont pas planes, on doit écrire (M-F) :

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

soit :

$$\vec{B}_i = -\frac{1}{-i\omega} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & 0 \\ 0 & & E_i^0 \sin \frac{\pi x}{a} \exp i(k_g z - \omega t) \\ ik_g & & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ E_i^0 \sin \frac{\pi x}{a} \exp i(k_g z - \omega t) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{k_g E_i^0}{\omega} \sin \frac{\pi x}{a} \exp i(k_g z - \omega t) \\ 0 \\ -i \frac{\pi E_i^0}{a\omega} \cos \frac{\pi x}{a} \exp i(k_g z - \omega t) \end{vmatrix}$$

de même :

$$\vec{B}_r = -\frac{1}{-i\omega} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ -ik_g \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_r^0 \sin \frac{\pi x}{a} \exp -i(k_g z + \omega t) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k_g \underline{E}_r^0}{\omega} \sin \frac{\pi x}{a} \exp -i(k_g z + \omega t) \\ 0 \\ -i \frac{\pi \underline{E}_r^0}{a\omega} \cos \frac{\pi x}{a} \exp -i(k_g z + \omega t) \end{vmatrix}$$

et finalement, puisque :

$$\exp -\frac{z}{\delta} \exp i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) = \exp i\left(\frac{1+i}{\delta} z - \omega t\right)$$

donc :

$$\vec{B}_t = -\frac{1}{-i\omega} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ i \frac{1+i}{\delta} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_t^0 \sin \frac{\pi x}{a} \exp i\left(\frac{1+i}{\delta} z - \omega t\right) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{(1+i)\underline{E}_t^0}{\delta\omega} \sin \frac{\pi x}{a} \exp -\frac{z}{\delta} \exp i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \\ 0 \\ -i \frac{\pi \underline{E}_t^0}{a\omega} \cos \frac{\pi x}{a} \exp -\frac{z}{\delta} \exp i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \end{vmatrix}$$

3.3.3 la continuité de la composante tangentielle $\vec{E} \cdot \vec{u}_y$ en $z = L$ s'écrit :

$$\vec{E}_i(x, y, L, t) \cdot \vec{u}_y + \vec{E}_r(x, y, L, t) \cdot \vec{u}_y = \vec{E}_t(x, y, L, t) \cdot \vec{u}_y$$

en simplifiant :

$$E_i^0 \exp ik_g L + \underline{E}_r^0 \exp -ik_g L = \underline{E}_t^0 \exp -\frac{L}{\delta} \exp i\frac{L}{\delta}$$

3.3.4 la plaque ayant une conductivité σ finie permet l'existence d'un courant volumique ce qui exclue celle d'un courant surfacique $\vec{j}_s = \vec{0}$.

la continuité de \vec{B} en $z = L$ s'écrit :

$$\vec{B}_i(x, y, L, t) + \vec{B}_r(x, y, L, t) = \vec{B}_t(x, y, L, t)$$

en simplifiant ($//\vec{u}_x$) :

$$-k_g E_i^0 \exp ik_g L + k_g \underline{E}_r^0 \exp -ik_g L = -\frac{1+i}{\delta} \underline{E}_t^0 \exp -\frac{L}{\delta} \exp i\frac{L}{\delta}$$

3.3.5 on en déduit que :

$$\underline{r} = \frac{k_g - \frac{1+i}{\delta}}{k_g + \frac{1+i}{\delta}} \exp -2ik_g L$$

$$\underline{t} = \frac{2k_g}{k_g + \frac{1+i}{\delta}} \exp ik_g L \exp \frac{1-i}{\delta} L$$

3.3.6 on a :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) [\exp i(k_g z - \omega t) + \underline{r} \exp -i(k_g z + \omega t)] \vec{u}_y$$

or : $\underline{r} = r e^{i\psi}$ donc :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) [\exp i(k_g z - \omega t) + r \exp -i(k_g z + \omega t - \psi)] \vec{u}_y$$

soit :

$$\vec{E} = \Re e(\vec{E}) = E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) [\cos(k_g z - \omega t) + r \cos(k_g z + \omega t - \psi)] \vec{u}_y$$

3.3.7 on a :

$$r = |r| = \sqrt{\frac{(1 - k_g \delta)^2 + 1}{(1 + k_g \delta)^2 + 1}} \leq 1$$

3.3.8 par trigonométrie :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) [\cos(k_g z - \omega t) + r \cos(\psi - k_g z - \omega t)] \vec{u}_y \\ &= E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_y \left\{ \underbrace{[\cos(k_g z) + r \cos(\psi - k_g z)]}_{A(z)} \cos \omega t + \underbrace{[\sin(k_g z) + r \sin(\psi - k_g z)]}_{B(z)} \sin \omega t \right\} \\ &= E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_y \{A(z) \cos \omega t + B(z) \sin \omega t\} \\ &= E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_y \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \xi) \end{aligned}$$

tel que : $\tan \xi(z) = B/A$

il vient :

$$\vec{E} = \underbrace{E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sqrt{1 + r^2 + 2r \cos(2k_g z - \psi)}}_{\text{amplitude}} \cos(\omega t - \xi) \vec{u}_y$$

l'onde dans le guide possède une amplitude qui dépend de z , ceci s'explique par la superposition de deux ondes : incidente et réfléchie.

3.3.9 un ventre correspond à E_{max} donc :

$$\cos(2k_g z_V - \psi) = 1 \Rightarrow 2k_g z_V - \psi = 2\pi n \Rightarrow z_V = \frac{2\pi n + \psi}{2k_g} = n \frac{\lambda_g}{2} + \frac{\psi}{2k_g}$$

avec n un entier.

un noeud correspond à E_{min} donc :

$$\cos(2k_g z_N - \psi) = -1 \Rightarrow 2k_g z_N - \psi = \pi + 2\pi n \Rightarrow z_N = \frac{2\pi(n + 1/2) + \psi}{2k_g} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_g}{2} + \frac{\psi}{2k_g}$$

avec n un entier.

la distance entre deux noeuds consécutifs : $\Delta = |z_N(n + 1) - z_N(n)| = \frac{\lambda_g}{2}$

3.3.10 on a :

$$\tau = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \sqrt{\frac{1 + r^2 + 2r}{1 + r^2 - 2r}} = \frac{1 + r}{1 - r} > 1$$

qui s'inverse en :

$$r = \frac{\tau - 1}{\tau + 1}$$

qui permet la mesure de r à partir de celle du $T.O.S$

3.3.11 $\lambda_g = 2\Delta = 4.22 \text{ cm}$, on calcule pour le mode TE_{10} d'après les données de la partie 3.3 :

$$k_g = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = 149 \text{ m}^{-1} \approx \frac{2\pi}{\lambda_g} , \text{ les deux valeurs sont en accord.}$$

3.3.12 on a d'après 3.3.7 :

$$r = \sqrt{\frac{(1 - k_g \delta)^2 + 1}{(1 + k_g \delta)^2 + 1}} \approx \sqrt{\frac{(1 - 2k_g \delta) + 1}{(1 + 2k_g \delta) + 1}} = \sqrt{\frac{1 - k_g \delta}{1 + k_g \delta}} \approx \sqrt{(1 - k_g \delta)(1 - k_g \delta)} = 1 - k_g \delta$$

$$\text{donc : } \delta = \frac{1-r}{k_g}$$

3.3.13 A.N :

$$\tau = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \sqrt{\frac{A_{max}}{A_{min}}} = 44.4$$

$$r = \frac{\tau - 1}{\tau + 1} = 0.96$$

$$\delta = \frac{1 - r}{k_g} = 2.96 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma = \frac{2}{\mu_0 \delta^2 \omega} = 300 \text{ S.m}^{-1}$$

$$k_g \delta = 0.04 \ll 1$$

l'hypothèse est assez vérifiée.

fin du corrigé