

1^{er} problème :
Étude de quelques aspects mécaniques d'une roue de voiture

1^{ère} partie :
Équilibrage d'une roue de voiture

1.1 Étude cinétique

$$1.1.1 \quad \overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O'} + \overrightarrow{O'A} = \begin{vmatrix} e \vec{I}_0 \\ R \cos \theta \vec{J}_0 \\ R \sin \theta \vec{K}_0 \end{vmatrix}$$

$$1.1.2 \quad \overrightarrow{O'G} = \frac{mO'\vec{O}' + \Delta m O'\vec{A}}{m + \Delta m} = \frac{\Delta m}{m + \Delta m} \begin{vmatrix} e \vec{I}_0 \\ R \cos \theta \vec{J}_0 \\ R \sin \theta \vec{K}_0 \end{vmatrix}$$

$$1.1.3 \quad {}^R \vec{v}_A = \frac{d(O'\vec{O}' + O'\vec{A})}{dt/R} = R\dot{\theta} \begin{vmatrix} 0 \vec{I}_0 \\ -\sin \theta \vec{J}_0 \\ \cos \theta \vec{K}_0 \end{vmatrix}$$

$$1.1.4 \quad {}^R \vec{\sigma}_A(O') = \overrightarrow{O'A} \times \Delta m {}^R \vec{v}_A = \Delta m \begin{vmatrix} e \vec{I}_0 \\ R \cos \theta \vec{J}_0 \\ R \sin \theta \vec{K}_0 \end{vmatrix} \times R\dot{\theta} \begin{vmatrix} 0 \vec{I}_0 \\ -\sin \theta \vec{J}_0 \\ \cos \theta \vec{K}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R^2 \Delta m \dot{\theta} \vec{I}_0 \\ -eR \Delta m \dot{\theta} \cos \theta \vec{J}_0 \\ -eR \Delta m \dot{\theta} \sin \theta \vec{K}_0 \end{vmatrix}$$

1.1.5 le référentiel barycentrique R^* d'un système par rapport à R est un référentiel d'origine G - par commodité sinon il suffit que G soit fixe dans R^* - animé d'un mouvement de translation par rapport à R

relativement à R_0 , le référentiel barycentrique de la roue parfaite de centre O' est $R(O', X, Y, Z)$

1.1.6 le moment cinétique d'un système de centre d'inertie G, de masse m, en un point P par rapport à un référentiel R s'écrit :

$$\vec{L}_{P/R} = \vec{L}^* + \overrightarrow{PG} \times m\vec{v}(G/R)$$

$$1.1.7 \quad {}^R \vec{\sigma}_R(O') = J_{O'X} \dot{\theta} \vec{I}_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta} \vec{I}_0 \\ 0 \vec{J}_0 \\ 0 \vec{K}_0 \end{vmatrix}$$

$$1.1.8 \quad {}^R \vec{\sigma}(O') = {}^R \vec{\sigma}_R(O') + {}^R \vec{\sigma}_A(O') = \begin{vmatrix} R^2 \Delta m \dot{\theta} + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta} \vec{I}_0 \\ -eR \Delta m \dot{\theta} \cos \theta \vec{J}_0 \\ -eR \Delta m \dot{\theta} \sin \theta \vec{K}_0 \end{vmatrix}$$

1.2 Étude dynamique

1.2.1 $R_{Y0} = 0$

1.2.2 deux solides en liaison pivot d'axe $O'X$ ne peuvent effectuer qu'un mouvement de rotation l'un par rapport à l'autre tel que $\omega(1/2) // O'X$, la liaison est parfaite s'il n'y pas de frottement entre les deux solides càd $C_X = C_{X0} = 0$

1.2.3 – dans un réf Galiléen : $m_{tot}\vec{a}(G) = \vec{F}_{ext}$

– dans un réf non Galiléen : $m_{tot}\vec{a}'(G) = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie}(G) + \vec{F}_{ic}(G)$

1.2.4 $\frac{d\vec{L}_O}{dt/R_0} = \vec{M}_O(ext)$ avec O fixe dans R_0

pour un réf R' non Galiléen $\frac{d\vec{L}'_O}{dt/R'} = \vec{M}_O(ext) + \vec{M}_O(I.E) + \vec{M}_O(I.E)$ avec O fixe dans R'

1.2.5 R est en translation rectiligne non uniforme par rapport à R_0 donc il est non Galiléen , le bilan des efforts extérieurs est alors :

– action du bras mobile réduite au couple \vec{C}

– poids total $(m + \Delta m)\vec{g}$ s'appliquant en G

– inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}(G) = -(m + \Delta m)\vec{a}_e(G)(R/R_0) = -(m + \Delta m)\vec{a}(O'/R_0)$ s'appliquant en G (car R est en translation par rapport à R_0)

– inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic}(G) = \vec{0}$ car $\vec{\omega}(R/R_0) = \vec{0}$

– action du dispositif imposant la rotation réduite au couple $\vec{\Gamma}(t)$

1.2.6 le TRD appliqué dans R non Galiléen au système

{roue complète $(m + \Delta m)$ + bras (masse négligeable)}

$(m + \Delta m)\vec{a}(G/R) = \vec{R}_{bati \rightarrow bras} + (m + \Delta m)\vec{g} - (m + \Delta m)\vec{a}(O'/R_0)$

1.2.7 le TRD projeté sur \vec{J}_0 s'écrit donc : $(m + \Delta m)\frac{\Delta m}{(m + \Delta m)}(R \cos \theta)'' = -(m + \Delta m)\ddot{Y}_0(t)$

or $\dot{\theta} = \omega$ soit $\ddot{\theta} = 0$ et $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ d'où

$$\ddot{Y}_0(t) = \frac{\Delta m}{(m + \Delta m)} R \omega^2 \cos(\omega t + \theta_0)$$

1.2.8 le TMC dans R appliqué à la roue complète en O' s'écrit

$$\frac{d^R \vec{\sigma}(O')}{dt/R} = \vec{C} + \vec{\Gamma}(t) + \vec{O}'\vec{G} \times (m + \Delta m)\vec{g} - \vec{O}'\vec{G} \times (m + \Delta m)\vec{a}(O'/R_0)$$

1.2.9 le TMC projeté sur \vec{I}_0 s'écrit ,tenant compte de $\theta = \omega t$:

$$0 = \Gamma(t) - \Delta m g R \cos \theta + \Delta m^2 R \sin \theta \ddot{Y}_0(t)$$

$$\implies \Gamma(t) = g R \Delta m \cos \omega t - \frac{(R \omega \Delta m)^2}{m + \Delta m} \cos \omega t \sin \omega t$$

1.3 Applications

1.3.1 (1) s'intègre une fois en $\dot{Y}_0(t) = \frac{\Delta m}{(m + \Delta m)} R \omega \sin \omega t + C t e$

or à $t = 0$ on a $\dot{Y}_0(0) = 0 = C t e$ soit $\dot{Y}_0(t) = \frac{\Delta m}{(m + \Delta m)} R \omega \sin \omega t$

qui s'intègre en $Y_0(t) = -\frac{\Delta m}{(m + \Delta m)} R \cos \omega t + C t e'$, or à $t = 0$ on a $Y_0(0) = 0$

donc $Y_0(t) = \frac{\Delta m}{(m + \Delta m)} R (1 - \cos \omega t)$, mouvement oscillatoire harmonique à la pulsation ω autour de la valeur moyenne $\frac{\Delta m}{(m + \Delta m)} R$ d'amplitude $Y_{0max} = 2 \frac{\Delta m}{(m + \Delta m)} R$

1.3.2 $\varphi_{max} \approx \tan \varphi_{max} = \frac{Y_{0max}}{D} = \frac{2R\Delta m}{D(m + \Delta m)}$

1.3.3 pour une roue parfaite $\Delta m = 0$ soit $Y_{0max} = 0$ et $\varphi_{max} = 0$

1.3.4 $\frac{dY_{0max}}{d\Delta m} = \frac{2Rm}{(m + \Delta m)^2} > 0$ et $\frac{d\varphi_{0max}}{d\Delta m} = \frac{2Rm}{D(m + \Delta m)^2} > 0$

si $\Delta m \nearrow \implies Y_{0max} \nearrow$ et $\varphi_{0max} \nearrow$

1.3.5 le défaut sera ressenti comme des vibrations horizontale dans la direction de la route

1.3.6 la masse Δm doit être au point A' symétrique de A par rapport à O'' sur la face externe de la roue , dans ce cas on ramène G sur l'axe $O'X$

le TRD 1.2.7 s'écrit $\ddot{Y}_0(t) = 0$ d'après les conditions initiales $Y_0(t) \equiv 0$

2^{ème} partie :
Modélisation d'une suspension d'automobile

2.1 Équation différentielle

2.1.1 à l'équilibre $m\vec{g} - k(\ell_0 - L_0)\vec{K} = \vec{0}$ soit $\ell_0 = L_0 - \frac{mg}{k}$ donc $\Delta\ell_0 = +\frac{mg}{k}$

2.1.2 bilan des forces sur $\{m\}$:

- tension du ressort $\vec{T} = -k(\ell - L_0)\vec{K} = -[(z(t) - z_0(t) + \ell_0) - L_0]\vec{K}$
- poids $\vec{P} = -mg\vec{K}$
- frottement visqueux de l'amortisseur $\vec{F} = -\alpha(\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t))\vec{K}$

2.1.3 le TRD dans R_{gal} lié à la piste projeté sur \vec{K} :

$$m\ddot{z} = -mg - k(z - z_0 + \ell_0 - L_0) - \alpha(\dot{z} - \dot{z}_0)$$

d'après 2.1.1 $\underline{m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = \alpha\dot{z}_0 + kz_0 = f(t)}$ (2)

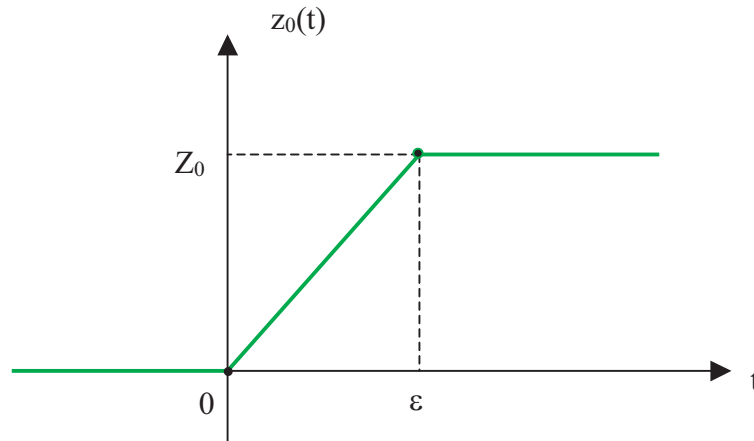
2.1.4 en divisant par k , il vient $z + \frac{\alpha}{k}\dot{z} + \frac{m}{k}\ddot{z} = \frac{\alpha}{k}\dot{z}_0 + z_0 = G(t)$

donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\beta = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$

$\beta > 0$ est responsable de l'atténuation de la courbe $z(t)$ en régime libre $G(t) \equiv 0$ selon l'un des trois régimes (pseudo-périodique , critique ou apériodique)

2.2 Réponse indicielle

2.2.1 :



2.2.2 on a $\dot{x} = v_0$ qui donne $x = v_0t + x_0$ car à $t = 0$ $x = x_0$

on élimine la variable x dans l'expression de $z_0(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ Z_0 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} & x_0 \leq x \leq x_1 \\ Z_0 & x \geq x_1 \end{cases}$

, il vient $z_0(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ Z_0 \frac{v_0t}{x_1-x_0} & 0 \leq t \leq \epsilon = \frac{x_1-x_0}{v_0} \\ Z_0 & t \geq \epsilon \end{cases}$

2.2.3 $[k] = Nm^{-1} = kgs^{-2}$ et $[\alpha] = Nm^{-1}s = kgs^{-1}$

A.N : $\omega_0 = 10$ Hz et $\beta = 1.25$ sans unité

2.2.4 pour $t \in [0, \epsilon]$ on a $\underline{G(t) = \frac{\alpha}{k}\dot{z}_0(t) + z_0(t) = Z_0 \frac{v_0}{x_1-x_0}(\frac{\alpha}{k} + t)}$ A.N : $G(t) = 25 + 100t$ (mètre)

pour $t \leq \epsilon = 0.001s$ soit $G \in [25, 25.1]$ (mètre) qui est presque constante

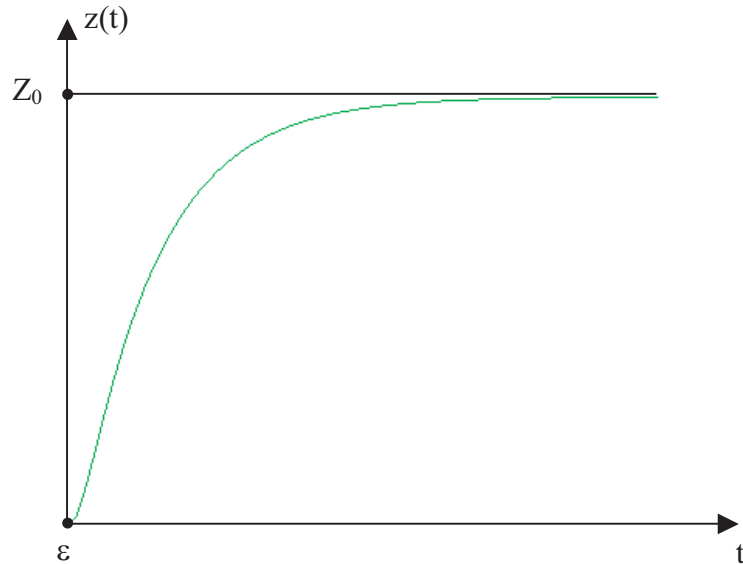
2.2.5 $G(t) \approx G_0 = Z_0 \frac{v_0}{x_1 - x_0} \frac{\alpha}{k}$ la solution générale de (3) s'écrit $z(t) = G_0 + A \exp r_1 t + \exp r_2 t$ avec r_1 et r_2 sont solution de l'équation caractéristique $1 + 2 \frac{\beta}{\omega_0} r + \frac{r^2}{\omega_0^2} = 0$ donc $\Delta' = \frac{\beta^2 - 1}{\omega_0^2}$ A.N :
 $\Delta > 0 \implies r = (-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1})\omega_0$
 soit $r_1 = (-\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})\omega_0$ et $r_2 = (-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})\omega_0$
 ainsi que $C = Z_0 \frac{v_0}{x_1 - x_0} \frac{\alpha}{k}$

2.2.6 les conditions initiales s'explicitent par : $z(0) = A + B + C = 0$ et $\dot{z}(0) = Ar_1 + Br_2 = 0$
 à l'ordre 1 (faute d'énoncé) en ε on a
 $z(\varepsilon) = A \exp r_1 \varepsilon + \exp r_2 \varepsilon + C \approx A \times (1 + r_1 \varepsilon) + B \times (1 + r_2 \varepsilon) + C = 0$, tandis que $\dot{z}(\varepsilon) = Ar_1 \exp r_1 \varepsilon + Br_2 \exp r_2 \varepsilon \approx Ar_1(1 + r_1 \varepsilon) + Br_2(1 + r_2 \varepsilon) = (Ar_1^2 + Br_2^2)\varepsilon$

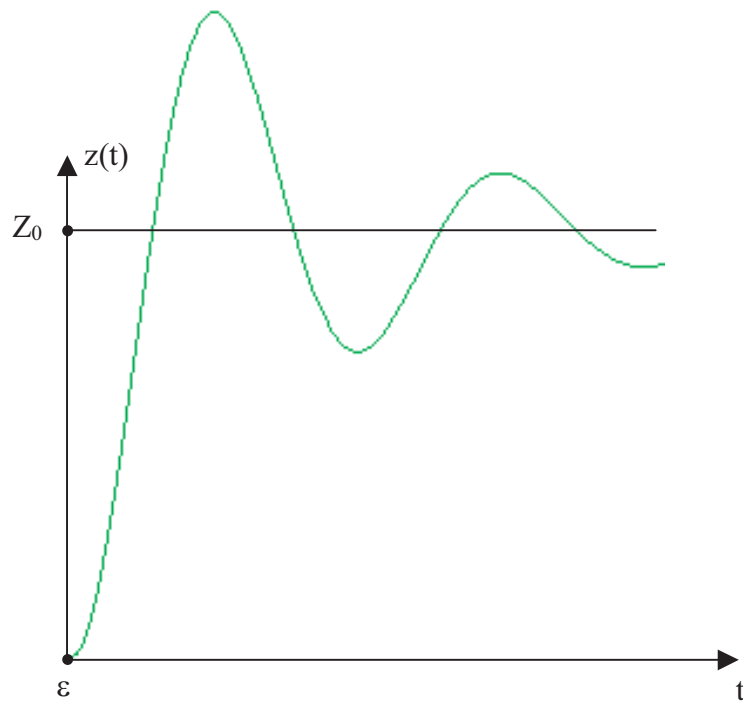
2.2.7 les conditions initiales sont $z(\varepsilon) = 0$ et $\dot{z}(\varepsilon) = 0$ or $G(t > \varepsilon) \equiv Z_0$
 l'équation (3) se résout $z(t) = A' \exp r_1(t - \varepsilon) + B' \exp r_2(t - \varepsilon) + Z_0$ avec $z(\varepsilon) = A' + B' + Z_0 = 0$
 et $\dot{z}(\varepsilon) = A'r_1 + B'r_2 = 0$

$$\implies z(t) = Z_0 \left[1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2} \exp r_1(t - \varepsilon) + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \exp r_2(t - \varepsilon) \right]$$

2.2.8 $\beta = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$



$$\beta > 1$$



$$\beta < 1$$

2.2.9 avec le vieillissement du véhicule $\alpha \rightarrow 0 \implies \beta \rightarrow 0$, à chaque passage par une bosse le véhicule oscille plusieurs fois avant d'atteindre l'équilibre

2.2.10 pour un vieux véhicule surchargé $\alpha \rightarrow 0$ et $m \rightarrow \infty \implies \beta \approx 0$, dans ce cas les oscillations seront incessantes ce qui est dangereux!

2.3 Réponse harmonique

2.3.1 (3) s'écrit en notation complexe $(1 + 2\frac{\beta}{\omega_0}i\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})\underline{Z} = (1 + 2\frac{\beta}{\omega_0}i\omega)\underline{Z}_0$

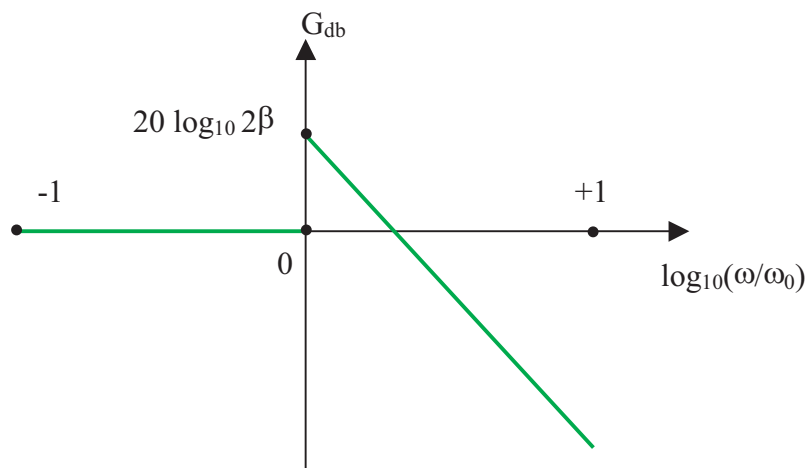
$$\text{soit } \underline{H}(i\omega) = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_0} = \frac{1 + 2\frac{\beta}{\omega_0}i\omega}{1 + 2\frac{\beta}{\omega_0}i\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

2.3.2 $G(\omega) = 20 \log_{10} |\underline{H}(i\omega)| = 10 \log_{10} \frac{1 + 4\beta^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + 4\beta^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$

si $\omega \ll \omega_0$ alors $G(\omega) \approx 0$

si $\omega \gg \omega_0$ alors $G(\omega) \approx 20 \log_{10} 2\beta - 20 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_0}$

2.3.3 :



$G(\omega)$ présente un maximum non nul correspondant à la résonance , le comportement de la suspension est passe-bas

2.3.4 $\lambda = vT$ soit $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$

2.3.5 pour atténuer au mieux les ondulations il faut avoir $\omega > 10\omega_0$ soit d'après 2.2.3
 $v > 86 \text{ kmh}^{-1}$

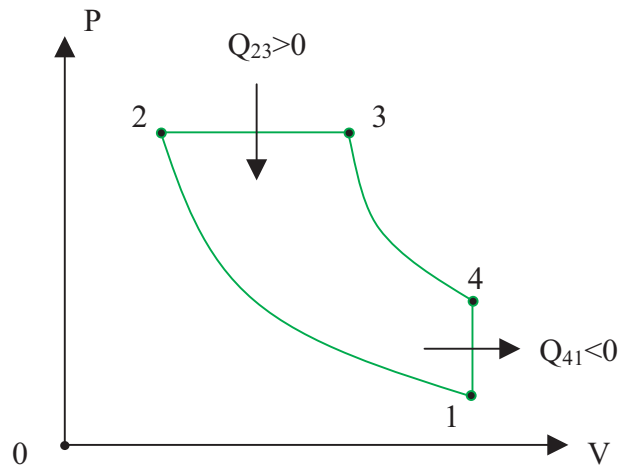
2.3.6 il faut abaisser fortement la vitesse pour éviter la résonance , en effet pour fixer les idées on prend $\lambda = 15 \text{ m}$ la vitesse minimale devient 860 kmh^{-1} qui est impossible! , par contre il faut rouler à $\omega < 0.1\omega_0$ soit $v < 8.6 \text{ kmh}^{-1}$

2^{ème} problème :

Étude thermodynamique d'un moteur de voiture

**1^{ère} partie :
Étude qualitative du cycle**

1.1 :



le cycle est moteur si $W = - \oint p dv < 0$

1.2 voir figure

1.3 $Q_{12} = Q_{34} = 0$ car adiabatiques

$Q_{23} > 0$ car le gaz reçoit de la chaleur de la part de la réaction d'explosion

$Q_{41} = \Delta_{41}U = nc_v(T_1 - T_4) < 0$ refroidissement isochore du gaz parfait

**2^{ème} partie :
Étude quantitative du cycle**

2.1 Point 2

2.1.1 le gaz subit une transformation adiabatique réversible entre (1) et (2) donc par loi de Laplace

$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1 \tau^{\gamma-1}$ A.N : on a $\tau = 10$ donc $T_2 = 750 \text{ K}$

2.1.2 $P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = P_1 \tau^{\gamma}$ A.N : $P_2 = 25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

2.2 Point 3

2.2.1 la température maximale est après explosion $T_{max} = T_3$

et la température minimale est celle de départ après admission du gaz $T_{min} = T_1$ donc $\alpha = \frac{T_3}{T_1}$

2.2.2 $T_3 = \alpha T_1$ or $\alpha = 10$ donc $T_3 = 3000 K$

2.2.3 $P_3 = P_2 = P_1 \tau^\gamma = 25 \cdot 10^5 Pa$

2.3 Point 4

2.3.1 d'une part loi des gaz parfait $nR = \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_4 V_1}{T_4}$ soit $\frac{P_4}{T_4} = \frac{P_1}{T_1}$

d'autre part le gaz subit une transformation adiabatique réversible entre (3) et (4) donc par loi de Laplace $T_4 = T_3 \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

on en déduit que $T_4 = T_3^\gamma \left(\frac{P_3 T_1}{P_1}\right)^{1-\gamma} = T_3^\gamma (\tau^\gamma T_1)^{1-\gamma} = \alpha^\gamma \tau^{\gamma(1-\gamma)} T_1$ A.N : $T_4 = 2080 K$

2.3.2 $P_4 = P_3 \left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = T_4 \frac{P_1}{T_1}$ A.N : $P_4 = 6.9 \cdot 10^5 Pa$

3^{ème} partie : Rendement d'un cycle moteur

3.1 $\eta = \frac{-W}{Q_{23}} \in [0, 1]$

3.2 Rendement du cycle théorique

3.2.1 au cours du cycle $\Delta U = W + Q_{23} + Q_{41} = 0$

or $Q_{23} = \Delta_{23}H = n c_p (T_3 - T_2)$ car isobare

et $Q_{41} = \Delta_{41}U = n c_v (T_1 - T_4)$ car isochore

soit finalement $\eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{\gamma(T_3 - T_2)}$

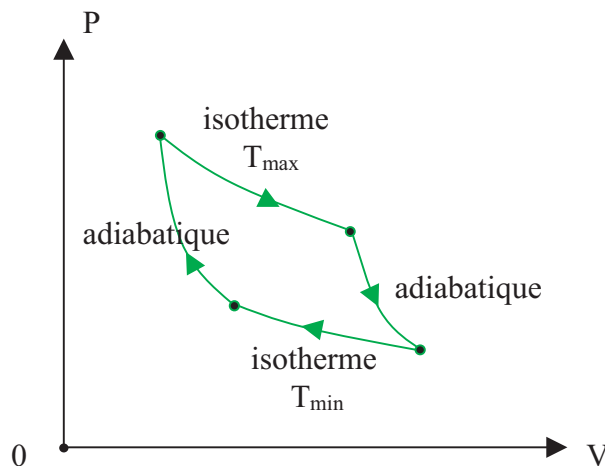
3.2.2 $\eta = 1 - \frac{\alpha^\gamma \tau^{\gamma(1-\gamma)} - 1}{\gamma[\alpha - \tau^{\gamma-1}]}$

3.2.3 $\eta = 0.43$

3.3 Cycle de Carnot

3.3.1 un cycle de Carnot est un cycle réversible formé par deux adiabatiques alternées par deux isothermes

une adiabatique $P \propto \frac{1}{V^\gamma}$ décroît plus vite qu'une isotherme $P \propto \frac{1}{V}$



3.3.2 au cours d'un cycle de Carnot : 1^{er} principe s'écrit $\Delta U = W + Q_{max} + Q_{min} = 0$, le 2^d principe

$$\Delta S = \frac{Q_{max}}{T_{max}} + \frac{Q_{min}}{T_{min}} = 0$$

$$\text{donc } \eta_c = \frac{-W}{Q_{max}} = \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}} \in [0, 1]$$

3.3.3 on remplace $T_{max} = T_3 = 3000 K$ et $T_{min} = T_1 = 300 K$ soit $\eta_c = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = 0.9$

3.3.4 $\eta < \eta_c$ les hypothèses d'adiabaticité (paroi sans fuite thermique) et de réversibilité (sans frottement) sont approximatives!

4^{ème} partie :
Prise en compte des frottements internes

4.1 voir figure (a)

pour un gaz parfait on a :

- une adiabatique réversible est une isentropique
- $S = S_0 + nc_v \ln \frac{T}{T_0} + nR \ln \frac{V}{V_0}$ une isochore $T = T_0 e^{\frac{S-S_0}{nc_v}}$
- $S = S_0 + nc_p \ln \frac{T}{T_0} - nR \ln \frac{P}{P_0}$ une isobare $T = T_0 e^{\frac{S-S_0}{nc_p}}$

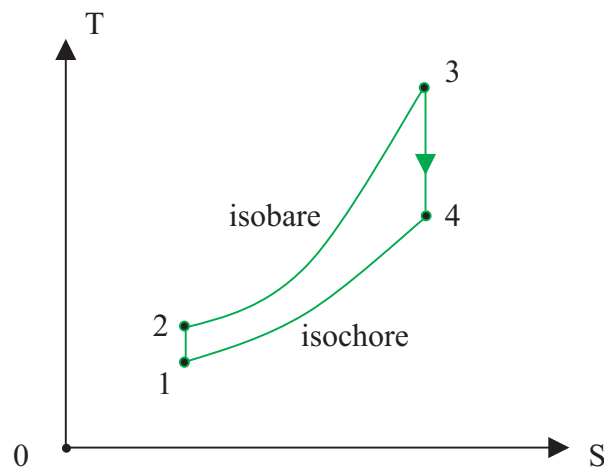


figure (a)

4.2 il existe une fonction d'état extensive, appelé entropie S , dont la variation élémentaire s'écrit : $dS = \frac{\delta Q}{T_{ext}} + \delta S^{cree}$
tel que $\delta S^{cree} = 0$ pour une transformation réversible et $\delta S^{cree} > 0$ pour une transformation irréversible

4.3 voir figure (b)

pour une transformation **adiabatique** irréversible $\Delta_{12'} S = S_{12'}^{cree} > 0$ donc $S_{2'} > S_1$, de même $S_{4'} > S_3$

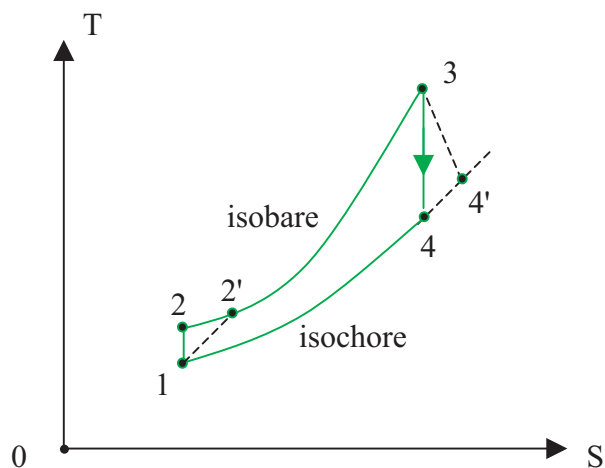


figure (b)

4.4 $T'_2 > T_2$ car (2) et (2') sont sur la même isobare
 et $T'_4 > T_4$ car (4) et (4') sont sur la même isochore

4.5

4.5.1 $\eta' = -\frac{W'}{Q_{2'3}}$

au cours du cycle irréversible on a $\Delta U' = W' + Q_{2'3} + Q_{4'1} = 0$

or $Q_{2'3} = \Delta_{2'3}H = nc_p(T_3 - T'_2)$ car isobare

et $Q_{4'1} = \Delta_{4'1}U = nc_v(T_1 - T'_4)$ car isochore

soit finalement $\eta' = 1 + \frac{Q_{4'1}}{Q_{2'3}} = 1 - \frac{T'_4 - T_1}{\gamma(T_3 - T'_2)}$

4.5.2 $\eta' = 1 - \frac{\beta T_4 - T_1}{\gamma(T_3 - \beta T_2)}$

4.5.3 on a $\frac{d\eta'}{d\beta} = -\frac{T_4(T_3 - \beta T_2) + T_2(\beta T_4 - T_1)}{\gamma(T_3 - \beta T_2)^2} = \frac{T_2 T_1 - T_4 T_3}{\gamma(T_3 - \beta T_2)^2} < 0$

or d'après 4.4 on a $\beta > 1$ donc $\eta'(\beta) < \eta'(\beta = 1) = \eta$

4.5.4 minimiser les frottements , ce qui fait augmenter le rendement !

fin du corrigé