

Corrigé de Centrale 2006 Physique MP.

Étude de l'orbite et du maintien à poste d'un satellite héliosynchrone

Partie I - Caractéristique d'une orbite héliosynchrone

Question préliminaire.

Le référentiel géocentrique est lié au centre de la Terre et à des directions d'étoiles « fixes ». Il est en translation par rapport au référentiel de Copernic, lié au centre de masse du système solaire et à ces directions d'étoiles fixes.

Dans la suite, nous considérerons qu'il est galiléen et oublierons l'attraction du Soleil et des astres autres que la Terre. Ce faisant, nous négligerons les forces de marée produites par le Soleil et les astres autres que la Terre, qui en réalité perturbent le mouvement que nous allons essayer de calculer. Cette dernière perturbation est envisagée dans la deuxième partie question 3 de l'épreuve physique PC1 du concours ENS Paris 2005.

I.A - Premier modèle du champ de gravitation¹

1) L'énergie $\frac{1}{2}mv^2 + mV(r)$ est une constante du mouvement. En effet, à la force totale, qui est la force de gravitation, on peut associer une énergie potentielle $mV(r) = -\frac{Gm\mathcal{M}}{r}$, qui est la même que si on concentrait toute la masse de la Terre en son centre.

Le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ en O est aussi une constante du mouvement. En effet la force totale est centrale. Il en résulte que le mouvement est plan. Si Oz est la perpendiculaire au plan du mouvement et r et θ les coordonnées polaires dans le plan du mouvement, la quantité $C = \sigma_{Oz} / m = r^2\dot{\theta}$ est constante au cours du temps ; on l'appelle constante des aires. A priori, elle est algébrique. Choisissons l'orientation de l'axe z de sorte qu'elle soit positive.

$$2.a) \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{G\mathcal{M}}{r^2}\vec{u}_r.$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r.$$

¹ Le champ de gravitation n'est pas défini par $\vec{g}(M) = -\overline{\text{grad}}_M V(M)$. Il s'agit d'une propriété, due au caractère conservatif de la force de gravitation, et non d'une définition. La définition du champ de gravitation est $\vec{g} = \vec{F} / m$, où \vec{F} est la force de gravitation sur un corps de masse m .

$$D'où \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{G\mathcal{M}}{r^2\dot{\theta}} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{G\mathcal{M}}{C} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}.$$

$$2.b) \text{ Posons } K = \frac{G\mathcal{M}}{C} \text{ et intégrons par rapport au temps : } \vec{v} = K(\vec{u}_\theta + \vec{E}),$$

où \vec{E} est constant au cours du temps.

2.c) Choisissons l'axe x de sorte que $(Ox, \vec{E}) = \pi/2$ et projetons sur l'orthoradiale l'équation obtenue en 2.b) : $v_\theta = K(1 + E \cos \theta)$.

$$\text{Comme } C = rv_\theta, r = \frac{C}{K(1 + E \cos \theta)} ; \text{ c'est l'équation d'une conique de}$$

$$\text{paramètre } p = \frac{C^2}{G\mathcal{M}}.$$

Avec ces choix, $\beta = \theta$ et $\gamma = \pi/2$.

2.d)

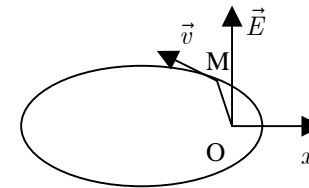


figure 1

Vérification de la figure 1 : au périhélie, \vec{v} , \vec{E} et \vec{u}_θ ont même direction et même sens, aussi la vitesse est maximum ; à l'apogée, ils ont même direction, mais \vec{E} est en sens contraire des deux autres et $\|\vec{E}\| < \|\vec{u}_\theta\|$: la vitesse est minimum.

Le vecteur \vec{E} , de module égal à l'excentricité de la conique, peut être appelé vecteur excentricité.

I.B - Deuxième modèle du champ de gravitation.

1) Soit l la longitude et $\vec{u}_l = \vec{u}_\lambda \wedge \vec{u}_r$. Quel que soit le déplacement, donc quels que soient $dr, d\lambda, dl$,

$$dV = -\vec{g} \cdot d\vec{r} = -g_r dr - g_\lambda r d\lambda - g_l r \cos \lambda dl = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial V}{\partial l} dl.$$

En identifiant les coefficients en $dr, d\lambda, dl$:

$$\vec{g}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r = -G\mathcal{M} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{3\eta R^2}{2r^4} (1 - 3\sin^2 \lambda) \right) \vec{u}_r$$

$$\vec{g}_\lambda = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \vec{u}_\lambda = -\frac{3G\mathcal{M}\eta R^2 \sin \lambda \cos \lambda}{r^4} \vec{u}_\lambda$$

$$\vec{g}_l = -\frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial V}{\partial l} \vec{u}_l = \vec{0}$$

2) Satellite héliosynchrone.

2.a) Le vecteur rotation de Ru par rapport à Ra est $\dot{\Psi} \vec{i}_3$ et celui de Rt par rapport à Ru est $\dot{\alpha} \vec{u}_1$, donc le vecteur rotation de Rt par rapport à Ra est $\vec{\Omega} = \dot{\Psi} \vec{i}_3 + \dot{\alpha} \vec{u}_1$.

2.b)

α) Expression de $\vec{\sigma}_o$.

L'énoncé demande le moment cinétique, sans préciser dans quel référentiel. Or le moment cinétique dépend du référentiel.

Dans le référentiel Rt , $\vec{\sigma}_{o,Rt} = mr^2 \dot{\phi} \vec{t}_3$.

Par application de la composition des vitesses $\vec{v}_{M/Ra} = \vec{v}_{M/Rt} + \vec{\Omega} \wedge \overline{OM}$, le moment cinétique dans Ra est $\vec{\sigma}_{o,Ra} = mr^2 \dot{\phi} \vec{t}_3 + \overline{OM} \wedge (m\vec{\Omega} \wedge \overline{OM})$.

En fait, $\dot{\phi} \gg \dot{\Psi}$ et $\dot{\phi} \gg \dot{\alpha}$, ce qui veut dire $\vec{\sigma}_{o,Ra} \approx \vec{\sigma}_{o,Rt}$ que nous noterons $\vec{\sigma}_o$ dans la suite.²

² Ceci explique, sans le justifier, pourquoi l'énoncé ne précise pas le référentiel où il demande $\vec{\sigma}_o$. Citons le rapport du concours : « la suite de cette partie, plus difficile, n'a donné de résultats à peu près satisfaisants que dans les très bonnes copies. Les candidats ont souvent mélangé les différents référentiels et ne savaient pas trop quelles étaient les grandeurs qui étaient constantes, quelles étaient celles qui variaient peu et quelles étaient celles qui variaient vraiment. Certains n'ont pas hésité à se lancer dans des calculs interminables (parfois 2 pages bien remplies de dérivées de toute sorte) du moment cinétique

β) Valeur de $\vec{\sigma}_o \cdot \vec{\Omega}$.

$$\vec{\sigma}_o \cdot \vec{\Omega} \approx mr^2 \dot{\phi} \vec{t}_3 \cdot (\dot{\Psi} \vec{i}_3 + \dot{\alpha} \vec{u}_1) = mr^2 \dot{\phi} \dot{\Psi} \cos \alpha \approx \sigma_o \Omega \cos \alpha.$$

Discussion de l'hypothèse (H2).

La formule $\vec{\sigma}_o \cdot \vec{\Omega} \approx \sigma_o \Omega \cos \alpha$ montre que l'hypothèse (H2) est fautive, sauf dans le cas particulier d'une orbite polaire. Pour une orbite polaire, $\alpha = \pi/2$ et \vec{g} est dans le plan de l'orbite ; l'orbite est fixe et $\vec{\Omega} = \vec{0}$. Mais ce cas ne correspond pas à l'orbite héliosynchrone recherchée.

Autre manière de discerner l'erreur : comme $\vec{\sigma}_o$ est normal au plan de l'orbite, l'hypothèse (H2) $\vec{\sigma}_o \cdot \vec{\Omega} = 0$ implique que $\vec{\Omega}$ est dans le plan de l'orbite, donc que $\langle \vec{\Omega} \rangle$ est dans le plan de l'orbite, alors qu'il doit être parallèle à \vec{i}_3 pour qu'il y ait précession et qu'il fait par conséquent un angle $\pi/2 - \alpha$ avec le plan de l'orbite.

A noter que l'argument $\cos \alpha$ petit ne tient pas : on trouve à la fin $\cos \alpha = -0,15$. En outre, on ne peut négliger un terme qu'on cherche à calculer.

$$2.c) \left(\frac{d\vec{\sigma}_{o,Ra}}{dt} \right)_{Ra} = \vec{r} \wedge m\vec{g}_\lambda.^3$$

2.d) Multiplions vectoriellement à gauche par $\vec{\sigma}_o$ en confondant $\vec{\sigma}_{o,Ra}$ et $\vec{\sigma}_{o,Rt}$ et en supposant r et $\dot{\phi}$ constants ; à cette approximation, $\vec{\sigma}_o$ est un

$\vec{\sigma}_o$ du satellite dans le référentiel Ra , puis de sa dérivée $\left(\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} \right)_{Ra}$ dans ce même référentiel. ». Les candidats ont fait preuve de plus de rigueur que l'énoncé, qui aurait dû préciser les approximations nécessaires.

³ La suite de la question proposée par l'énoncé ne nous paraît pas judicieuse, car trop compliquée, aussi nous allons résoudre autrement. Si vous souhaitez vous y attaquer, pensez que le moment cinétique dépend du référentiel et que la dérivée d'un vecteur dépend du référentiel où on dérive, donc distinguez dans votre raisonnement $\left(\frac{d\vec{\sigma}_{o,Ra}}{dt} \right)_{Ra}$, $\left(\frac{d\vec{\sigma}_{o,Ra}}{dt} \right)_{Rt}$, $\left(\frac{d\vec{\sigma}_{o,Rt}}{dt} \right)_{Ra}$ et $\left(\frac{d\vec{\sigma}_{o,Rt}}{dt} \right)_{Rt}$, ce dernier terme étant à peu près nul.

vecteur fixe dans Rt , donc $\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}_o$; on obtient :

$$\vec{\sigma}_o \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}_o) = \vec{\sigma}_o \wedge (\vec{r} \wedge m\vec{g}_\lambda).$$

En utilisant $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$, cette équation devient $\sigma_o^2 \vec{\Omega} - \vec{\sigma}_o \sigma_o \Omega \cos \alpha = m\vec{r}(\vec{\sigma}_o \cdot \vec{g}_\lambda)$.

Projetons sur le plan de la trajectoire, en notant $\vec{\Omega}_{//}$ la composante de $\vec{\Omega}$ dans le plan de la trajectoire; il vient $\vec{\Omega}_{//} = \frac{m\vec{r}(\vec{\sigma}_o \cdot \vec{g}_\lambda)}{\sigma_o^2}$.

I.C

1)

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Omega} \cdot \vec{u}_1 \rangle &= \langle \vec{\Omega}_{//} \cdot \vec{u}_1 \rangle = \frac{m \langle (\vec{r} \cdot \vec{u}_1) g_\lambda (\vec{t}_3 \cdot \vec{u}_\lambda) \rangle}{\sigma_o} \\ &= -\frac{3G\mathcal{M}\eta R^2 \cos \alpha}{r^5 \dot{\varphi}} \langle \sin \lambda \cos \varphi \rangle = -\frac{3G\mathcal{M}\eta R^2 \cos \alpha \sin \alpha}{r^5 \dot{\varphi}} \langle \sin \varphi \cos \varphi \rangle = 0 \end{aligned}$$

Comme $\vec{\Omega} = \dot{\Psi} \vec{i}_3 + \dot{\alpha} \vec{u}_1$ et comme $\vec{i}_3 \perp \vec{u}_1$, cela signifie qu'en moyenne il n'y a pas de nutation : $\langle \dot{\alpha} \rangle = 0$.

Il en résulte que $\langle \vec{\Omega} \rangle = \langle \dot{\Psi} \rangle \vec{i}_3$ et que $\langle \vec{\Omega}_{//} \rangle = \langle \dot{\Psi} \rangle \sin \alpha \vec{u}_2$.

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Omega}_{//} \cdot \vec{u}_2 \rangle &= \left\langle \frac{m(\vec{r} \cdot \vec{u}_2)(\vec{\sigma}_o \cdot \vec{g}_\lambda)}{\sigma_o^2} \right\rangle \\ &= -\frac{3G\mathcal{M}\eta R^2 \sin \alpha \cos \alpha}{r^5 \dot{\varphi}} \langle \sin^2 \varphi \rangle = -\frac{3G\mathcal{M}\eta R^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2r^5 \dot{\varphi}} \\ \dot{\Psi} &= -\frac{3G\mathcal{M}\eta R^2 \cos \alpha}{2r^5 \dot{\varphi}} \end{aligned}$$

La loi fondamentale de la dynamique montre que $m\dot{\varphi}^2 r = \frac{Gm\mathcal{M}}{r^2}$, d'où

$$\dot{\Psi} = -\frac{3\sqrt{G\mathcal{M}\eta R^2} \cos \alpha}{2r^{7/2}}.$$

L'orbite pivote autour de \vec{i}_3 avec la vitesse angulaire $\dot{\Psi}$ donnée par cette formule.

2) La vitesse angulaire du mouvement de translation du Soleil dans le repère géocentrique est $\omega_s = \frac{2\pi}{365,25 \times 24 \times 3600} = 1,991.10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Elle est

positive, car le Soleil tourne dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre (ne pas confondre avec l'effet du mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des Pôles). Nous ne tiendrons pas compte de ce qu'elle varie un peu, notamment parce que la Terre décrit une orbite elliptique.

Pour une orbite héliosynchrone,

$$\alpha = \arccos \left(-\frac{2 \times (6,378.10^6 + 8.10^5)^{7/2} \times 1,991.10^{-7}}{3\sqrt{4.10^{14}} \times 1,083.10^{-3} \times (6,378.10^6)^2} \right) = 98,58^\circ.$$

Il en résulte que l'éclairage d'un lieu observé est semblable, puisque le Soleil est toujours dans la même direction au point de vue longitudinal (mais pas au point de vue de la hauteur du Soleil au dessus de l'horizon, qui varie avec les saisons).

Annexe

1) Démonstration de $\sin \lambda = \sin \alpha \sin \varphi$.

$r \sin \lambda = \vec{r} \cdot \vec{i}_3 = (r \cos \varphi \vec{u}_1 + r \sin \varphi \vec{u}_2) \cdot \vec{i}_3 = r \sin \varphi \sin \alpha$
d'où $\sin \lambda = \sin \varphi \sin \alpha$.

2) Démonstration de $\vec{t}_3 \cdot \vec{u}_\lambda = \cos \alpha / \cos \lambda$.

$\cos \alpha = \vec{t}_3 \cdot \vec{i}_3 = \vec{t}_3 \cdot (\cos \lambda \vec{u}_\lambda + \sin \lambda \vec{u}_r) = \cos \lambda (\vec{t}_3 \cdot \vec{u}_\lambda)$
d'où $\vec{t}_3 \cdot \vec{u}_\lambda = \cos \alpha / \cos \lambda$.

3) Autre présentation de la précession.

Voici une présentation plus claire des approximations faites un peu arbitrairement plus haut.

En première approximation, le mouvement est circulaire uniforme dans un plan fixe. En utilisant la méthode des perturbations, calculons la perturbation due au caractère non sphérique du potentiel; pour cela, on résout l'équation du mouvement en utilisant la loi horaire du mouvement non perturbé :

$$\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \vec{r} \wedge m\vec{g}_\lambda$$

Pour une révolution, de période T , $\Delta \vec{\sigma}_o = \oint \vec{r} \wedge m\vec{g}_\lambda dt$, soit

$$\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} \approx \frac{\Delta \vec{\sigma}_o}{T} = \frac{1}{T} \oint \vec{r} \wedge m\vec{g}_\lambda dt = \langle \vec{r} \wedge m\vec{g}_\lambda \rangle.$$

Comme en première approximation $\dot{\varphi}$ est constant, la moyenne sur le temps est aussi celle sur φ .

Le plan O, \vec{u}_2, \vec{i}_3 est un plan de symétrie de l'orbite et des champs \vec{r} et $m\vec{g}_\lambda$, donc $\oint_{\text{orbite}} \vec{r} \wedge m\vec{g}_\lambda d\varphi$ lui est perpendiculaire : $\left\langle \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right\rangle$ est parallèle à \vec{u}_1 , ce qui montre qu'il n'y a pas de nutation en moyenne à ce degré d'approximation et qu'il y a précession.

$\vec{\sigma}_O$ a une composante parallèle à \vec{i}_3 constante et une composante perpendiculaire à \vec{i}_3 de module constant $\sigma_O \sin \alpha$ et tournant avec la vitesse de

précession $\Omega = \frac{1}{\sigma_O \sin \alpha} \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \cdot \vec{u}_1 = \frac{1}{mr^2 \dot{\varphi} \sin \alpha} \langle \vec{r} \wedge m\vec{g}_\lambda \rangle \cdot \vec{u}_1$. Or

$$(\vec{r} \wedge \vec{u}_\lambda) \cdot \vec{u}_1 = (\vec{u}_1 \wedge \vec{r}) \cdot \vec{u}_\lambda = r \sin \varphi \vec{t}_3 \cdot \vec{u}_\lambda = \frac{r \sin \varphi \cos \alpha}{\cos \lambda}. \text{ D'où}$$

$$\Omega = \frac{1}{r^2 \dot{\varphi} \sin \alpha} \left\langle -\frac{3G\mathcal{M}\eta R^2 \sin \lambda \cos \lambda}{r^4} \frac{r \sin \varphi \cos \alpha}{\cos \lambda} \right\rangle$$

$$= -\frac{3G\mathcal{M}\eta R^2 \cos \alpha}{r^5 \sin \alpha} \langle \sin \lambda \sin \varphi \rangle = -\frac{3G\mathcal{M}\eta R^2 \cos \alpha}{r^5} \langle \sin^2 \varphi \rangle$$

$$\Omega = -\frac{3G\mathcal{M}\eta R^2 \cos \alpha}{2r^5}$$

Bibliographie sur les satellites héliosynchrones :

BUP 1988 n° 707 page 1073, Pierre Bonnet, Satellite héliosynchrone (avec une erreur d'un facteur $\sin^2 \alpha$ dans l'expression de la vitesse de précession ; le raisonnement conduisant à cette erreur est reproduit à l'identique par ESIM 1995 et Centrale 2006)

ESIM 1995 physique II option P'

CCP 2001 physique I PSI

X-ENS Cachan 2005 PSI physique

ENS Paris 2005 physique PC1

Centrale 2006 physique MP

Partie II - Maintien à poste du satellite : étude du module de radionavigation

II.A - Mesure d'altitude

1) Génération du signal d'émission

1.a) L'intégrateur produit le signal $e_1(t) = k_0 M(t) + C$, où C est une constante.

Le déphaseur produit $e_2(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t - \pi/2) = -A_0 \cos(2\pi f_0 t)$.

Le multiplieur produit $e_3(t) = k e_1(t) A_0 \sin(2\pi f_0 t)$.

Le soustracteur produit

$$e(t) = e_3 - e_2 = A_0 (\cos(2\pi f_0 t) + k(k_0 M(t) + C) \sin(2\pi f_0 t)).$$

1.b) Nous voulons que, φ étant petit, $e(t)$ soit approximativement égal à

$$A_e \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A_e \cos \varphi \cos(2\pi f_0 t) - A_e \sin \varphi \sin(2\pi f_0 t)$$

$$\approx A_e \cos(2\pi f_0 t) - A_e \varphi \sin(2\pi f_0 t).$$

Cela suppose $A_e = A_0$ et $\varphi = -k(k_0 M(t) + C)$.

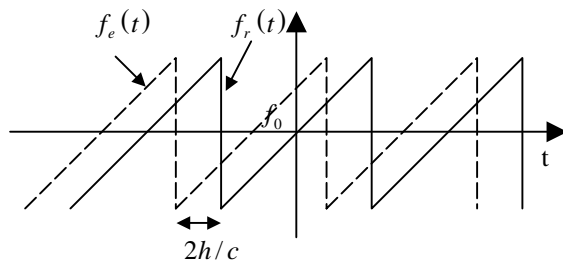
Si $kC \ll 1$, on a réalisé la variation de fréquence souhaitée, avec

$$\frac{d\varphi}{dt} = -kk_0 m(t), \text{ soit } \alpha = -kk_0.$$

Observons que C , qui dépend des conditions initiales, est inconnu d'après l'énoncé.

2) Mesure de l'altitude

2.a)



2.b) A la sortie du multiplieur, on obtient le signal

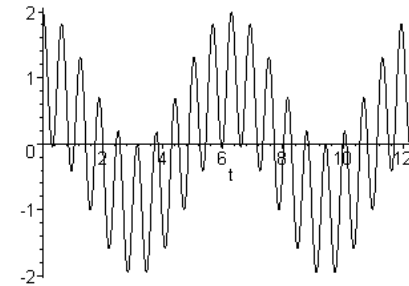
$$e = A_e A_r \cos(\theta_e(t)) \cos(\theta_r(t)), \text{ soit}$$

$$e = \frac{A_e A_r}{2} (\cos(\theta_e(t) + \theta_r(t)) - \cos(\theta_e(t) - \theta_r(t))).$$

Le terme $\frac{A_e A_r}{2} \cos(\theta_e(t) + \theta_r(t))$ est sensiblement sinusoïdal et de haute

fréquence ($2f_0$) ; le terme $-\frac{A_e A_r}{2} \cos(\theta_e(t) - \theta_r(t))$ est de fréquence variable

et beaucoup plus basse. D'où l'allure schématique de $e(t)$:



Pour simplifier la recherche du graphique, nous n'avons pas tenu compte du caractère variable de la fréquence du second terme ; la forme de l'enveloppe dessinée n'est pas la bonne.

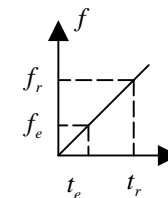
2.c) Le filtre passe-bas élimine le premier terme de haute fréquence ; on

obtient à la sortie du filtre le signal $s = -\frac{G_0 A_e A_r}{2} \cos(\theta_e(t) - \theta_r(t))$, de

fréquence $f = \left| \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (\theta_e - \theta_r) \right| = |f_e - f_r|$. L'expression demandée par

l'énoncé est compliquée et inutile, car seule la fréquence est intéressante.

Supposons d'abord qu'entre l'instant t_e de l'émission et l'instant t_r de la réception il n'y ait pas de discontinuité de fréquence :



$$\text{Alors } f_r - f_e = \frac{\Delta F}{\Delta T} (t_r - t_e) = \frac{2h\Delta F}{c\Delta T}.$$

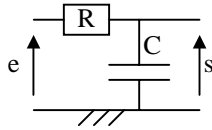
A chaque discontinuité de la fréquence, celle-ci diminue de ΔF . S'il se produit n discontinuités de la fréquence entre l'émission et la réception,

$$f_r - f_e = \frac{2h\Delta F}{c\Delta T} - n\Delta F.$$

Si on fait l'hypothèse (H3) selon laquelle $2h/c < \Delta T$, alors, selon les instants, $n = 0$ ou 1 . Si la mesure est instantanée, la fréquence mesurée est $\frac{2h\Delta F}{c\Delta T}$ pendant une partie de la durée ΔT et $\Delta F - \frac{2h\Delta F}{c\Delta T}$ pendant l'autre partie. Si au contraire on mesure une fréquence moyenne sur une durée grande devant ΔT , on peut imaginer que la fréquence mesurée est la moyenne des mesures pondérées par leurs durées, soit $\left(\Delta T - \frac{2h}{c}\right)\frac{2h\Delta F}{c\Delta T} + \frac{2h}{c}\left(\Delta F - \frac{2h\Delta F}{c\Delta T}\right) = \frac{4h\Delta F}{c}\left(1 - \frac{h\Delta F}{c\Delta T}\right)$. Dans tous les cas, on voit qu'on peut déduire de la mesure de la fréquence celle de l'altitude, avec toutefois une certaine ambiguïté, dont il est difficile de préciser le traitement.

Si on ne fait pas l'hypothèse (H3), il faut faire plusieurs mesures avec des valeurs numériques différentes, car il y a une inconnue supplémentaire n .

2.d) Un filtre passe-bas typique est :



Sa bande passante va du continu à la fréquence $\frac{1}{2\pi RC}$. Il faut donc

$$\Delta F \ll \frac{1}{2\pi RC} \ll f_0.$$

2.e) Question déraisonnable.

II.B - Mesure de vitesse

II.B.1) Étude de l'effet Doppler

1.a) Quand une ambulance se rapproche, sa sirène émet un son plus aigu; quand elle s'écarte, le son paraît plus grave.

Les raies du rayonnement des galaxies lointaines sont décalées vers le rouge, parce que ces galaxies s'éloignent.

On détecte les planètes par l'effet Doppler qu'elles produisent sur la lumière de leur étoile.

1.b) En théorie non relativiste, la force de Lorentz a même valeur dans le référentiel R et dans le référentiel R' , qui se meut avec la vitesse \vec{v}_0 par rapport à R : $\forall \vec{v} : q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + (\vec{v} - \vec{v}_0) \wedge \vec{B}')$, d'où $\vec{B}' = \vec{B}$ et $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B}$

1.c) Vu les propriétés d'une onde plane progressive,

$$\vec{B}_i = -\frac{E_0}{c} \cos\left(\omega_i \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_y.$$

$$\vec{E}'_i = E_0 \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \cos \omega_i \left(t - \frac{x' + v_0 t}{c}\right) \vec{u}_z.$$

$$\text{En } x' = 0, \vec{E}'_r = -\vec{E}'_i = -E_0 \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \cos\left(\omega_i t \left(1 - \frac{v_0}{c}\right)\right) \vec{u}_z.$$

$$\vec{B}'_r = -\frac{E_0}{c} \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \cos\left(\omega_i t \left(1 - \frac{v_0}{c}\right)\right) \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}'_r - \vec{v}_0 \wedge \vec{B}'_r = -E_0 \left(1 - \frac{2v_0}{c}\right) \cos\left(\omega_i t \left(1 - \frac{v_0}{c}\right)\right) \vec{u}_z$$

qui doit être de la forme $\vec{E}_r = \vec{f}\left(t + \frac{x}{c}\right)$, soit compte tenu de

$$x = v_0 t, \vec{E}_r = \vec{f}\left(t \left(1 + \frac{v_0}{c}\right)\right), \text{ d'où } \omega_r = \omega_i \frac{1 - \frac{v_0}{c}}{1 + \frac{v_0}{c}}. \text{ D'où finalement :}$$

$$\vec{E}_r = -E_0 \left(1 - \frac{2v_0}{c}\right) \cos\left(\omega_r t \left(1 + \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_z.$$

$$1.d) \text{ Nous avons montré que } f_r = f_i \frac{1 - \frac{v_0}{c}}{1 + \frac{v_0}{c}}.$$

La fréquence de l'onde réfléchie est approximativement égale à

$$f_r = f_i \left(1 - \frac{2v_0}{c}\right) \text{ si } v_0 \ll c. \text{ Ceci est en accord (approximatif) avec}$$

l'expression $\Delta f_D = -f_e \frac{2v_0}{c}$ obtenue en considérant que tout se passe comme

si l'on recevait une onde émise par le symétrique de la source par rapport au miroir, symétrique dont la vitesse par rapport au récepteur est $2v_0$.

Le caractère approximatif de l'accord est dû au caractère non relativiste de notre théorie, alors que l'électromagnétisme est en accord avec une théorie relativiste.

1.e) La puissance de l'onde incidente est égale à la somme de la puissance de l'onde réfléchie et de la dérivée par rapport au temps de l'énergie stockée dans le volume balayé par le miroir. La puissance incidente est donc supérieure à la puissance réfléchie, aussi l'amplitude du champ électrique de l'onde incidente est supérieure à celle de l'onde réfléchie.

2) Mesure de la pseudovitesse

2.a) Soit f_r la fréquence du signal reçu par le satellite. A la sortie du multiplieur, le signal est

$$kA^2 \cos f_{OL} t \cos f_r t = \frac{kA^2}{2} (\cos((f_{OL} + f_r)t) - \cos((f_{OL} - f_r)t)).$$

Après filtrage, le signal est $-\frac{kA^2}{2} \cos((f_{OL} - f_r)t)$, de fréquence

$$f_b = |f_r - f_{OL}| = \left| f_e \left(1 - \frac{V_r}{c} \right) - f_{OL} \right|.$$

2.b) $|V_r| = cf_b / f_e$.

Pour calculer l'incertitude, il faut considérer que l'égalité $f_e = f_{OL}$ n'est pas exacte ;

$$1 - \frac{V_r}{c} = \frac{|f_b - f_{OL}|}{f_e}$$

$$\frac{\Delta V_r}{c} = \frac{\Delta f_{OL}}{f_e} + \frac{|f_b - f_{OL}|}{f_e^2} \Delta f_e = \frac{\Delta f_{OL}}{f_e} + \left(1 - \frac{V_r}{c} \right) \frac{\Delta f_e}{f_e}$$

$$\Delta V_r = \frac{c(\Delta f_{OL} + \Delta f_e)}{f_e}$$

$$\Delta V_r = \frac{cf_b \Delta f_e}{f_e^2}.$$

Remarque : l'incertitude sur la valeur absolue d'une grandeur est égale à l'incertitude sur cette grandeur.

Les mesures de fréquence étant souvent très précises, la mesure de la vitesse radiale peut être très précise si la fréquence à mesurer est stable.

2.c) Cette méthode ne donne pas le signe de V_r . Il faudrait faire varier f_{OL} et voir dans quel sens varie f_b pour lever l'ambiguïté sur le signe de $f_b - f_{OL}$.

3) Mesure de la vitesse vraie

3.a) $|V_r| = \frac{cf_b}{2f_e}$; $\Delta V_r = \frac{cf_b \Delta f_e}{2f_e^2}$.

3.b) L'oscillateur local doit être très stable dans le cadre de la question 2, car on exige $f_e = f_{OL}$; c'est inutile dans le cadre de la question 3, puisque c'est le même oscillateur qui joue le rôle d'émetteur et d'oscillateur local ; il suffit que cette fréquence soit connue avec précision, mais elle peut varier selon les circonstances.

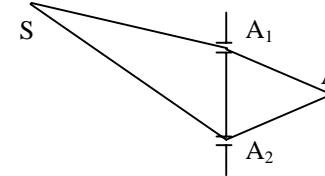
3.c) En utilisant trois stations non alignées, on peut mesurer les trois composantes de la vitesse.

II.C - Mesure d'angles

1) $s_1(t) = a_1 s_e(t - D_1/c)$ et $s_2(t) = a_2 s_e(t - D_2/c)$, où a_1 et a_2 sont des facteurs d'atténuation, qu'il n'est pas utile de négliger.

$$\Delta \varphi = 2\pi f \Delta D / c.$$

Comme $\Delta D = a \cos \alpha$, $\cos \alpha = \frac{c \Delta \varphi}{2\pi f a}$.



2) Pour mesurer $\Delta \varphi$, on ajoute les signaux s_1 et s_2 après leur avoir fait parcourir des distances égales $A_1A = A_2A$. L'analogie est l'expérience des trous d'Young. En fait on fait varier le déphasage (déplacement au voisinage de A, variation de fréquence).

3) En fait, la valeur de $\cos \alpha$ ne détermine α qu'au signe près et modulo 2π . Pour lever l'ambiguïté sur le modulo 2π , on peut faire des mesures pour plusieurs fréquences. Pour lever l'ambiguïté sur le signe, il faut faire des mesures en plusieurs points au voisinage de A. Dans l'expérience des trous d'Young, la position de la tache centrale blanche donne directement α .