Partie A - OPTIQUE

I. Le prisme

1. Formules du prisme

a. $\sin(i) = n\sin(r)$ et $\sin(i') = n\sin(r')$
b. $A = r + r'$ et $D = i + i' - A$

2. Conditions d'émergence

a. $A \leq 2\Lambda$: si $A = 2\Lambda$, seul le rayon tq $i = 90°$ traverse le prisme, avec $i' = 90°$
b. $i' = 90°$ donne $r' = \Lambda$, puis $r = A-\Lambda$, et enfin $\sin(i_o) = n \sin(A-\Lambda)$
c. i_o donne $\pi/2$ et $\pi/2$ donne i_o

3. Minimum de déviation

a. $i = i'$ et $r = r'$
b. $r = r' = A/2$ et $i = i' = (A+D_m)/2$ dc $\sin((A+D_m)/2) = n \sin(A/2)$
c. $\ln(n) = \ln(\sin((A+D_m)/2)) - \ln(\sin(A/2))$ dc $dn/n = \cotan((A+D_m)/2)(d((A+D_m)/2)) - \cotan(A/2)dA/2$
dc $dn/n = (dA/2)[\cotan((A+D_m)/2) - \cotan(A/2)] + (dD_m/2)[\cotan(A/2)]$ puis
$\Delta n/n = (\Delta A/2)|\cotan((A+D_m)/2) - \cotan(A/2)| + (\Delta D_m/2)|\cotan(A/2)|$

4. Mesure de l'indice n

a. a.1 $2A = R_1 - R_2 = 119°52'$ dc $A = 59°56'$
a.2 $\Delta A = 4'$
b. b.1 On tourne le prisme jusqu'à ce que le rayon sortant change de sens de rotation.
b.2 $2D_m = R_3 - R_4 = 97°44'$ dc $D_m = 48°52'$
c. $(A+D_m) = 54°24' = 54{,}4°$ et $A/2 = 29°58' = 29{,}9667°$ dc $n = 1{,}62784...$
d. d.1 $0 < \cotan((A+D_m)/2) < \cotan(A/2)$ dc $\Delta n/n = (\varepsilon/2)|\cotan(A/2)|$
d.2 $\Delta n/n = 1{,}009.10^{-3}$ dc $\Delta n = 1{,}6452.10^{-3}$
e. $n = 1{,}6278 \pm 0{,}0016$

II. Le spectrographe à prisme

1. Le spectroscope permet de voir les différentes raies et le spectrographe permet de mesurer leurs longueurs d'onde. Ici, obtient une image photo.

2. Tracé de rayons lumineux
$\lambda_2 > \lambda_1 \Rightarrow n_2 < n_1 \Rightarrow r_2 > r_1 \Rightarrow r'_2 < r'_1 \Rightarrow i'_2 < i'_1$ dc le deuxième rayon est moins dévié.

3. Variation de la déviation D_m

a. Par différentiation de **I.3.b**, $(dD_m/2)\cos((A+D_m)/2) = dn \sin(A/2)$
b. $(dD_m/d\lambda) = 2\, dn/d\lambda\, \sin(A/2)/\cos((A+D_m)/2)$

4. Doublet jaune du sodium

a. $dD_m = -(4\beta/\lambda^3)\sin(A/2)/\cos((A+D_m)/2)\, d\lambda$
b. $d_p = f'|D_m|$
c. $d_p = 4{,}28.10^{-4}$ m

5. Pouvoir de résolution

a. $i = i' = (A+D_m)/2$ dc, si on note h la largeur d'une face, $\sin(A/2) = b/(2h)$ et $\cos((A+D_m)/2) = \ell/h$, dc $dD_m/d\lambda = (dn/d\lambda)\,(b/\ell)$ et $d_p = |dn/d\lambda|\,(b/\ell)f'\Delta\lambda$

b. b.1 Au minimum de déviation, $di+di' = 0$ dc $\Delta i = \Delta i'$ et $(a/f) = (a'/f')$

b.2 $d_p > a'$

b.3 $(\Delta\lambda)_1 = (\ell a/bf)/|dn/d\lambda|$

b.4 IL faur $\uparrow$ f, (b/ℓ) et $|dn/d\lambda|$

b.5 $2(\ell/b) = \cos((A+D_m)/2)/\sin(A/2)$ dc $(\ell a/bf) = 1{,}16258.10^{-4}$, et $|dn/d\lambda| = 1{,}03592.10^{5}$ dc $(\Delta\lambda)_1 = 1{,}1223.10^{-9}$ m puis $PR_1 = 525$

c. c.1 $\rho = f'\lambda/\ell$

c.2 $d_p = \rho$

c.3 $(\Delta\lambda)_2 = (\lambda/b)/|dn/d\lambda|$

c.4 Il faut $\uparrow$ b et $|dn/d\lambda|$

c.5 $(\Delta\lambda)_2 = 1{,}6253.10^{-10}$ m et $PR_2 = 3626$

d. Na : $(\Delta\lambda)_2 < \Delta\lambda = 0{,}6.10^{-9} < (\Delta\lambda)_1$ dc non séparées si la fente n'est pas très fine

Hg : $\Delta\lambda = 2{,}1.10^{-9} > (\Delta\lambda)_1$ dc séparées de toutes façons.

III. Le réseau par transmission

1. Réseau par réflexion

2. Relation fondamentale des réseaux

a. $\delta = p[\sin(\theta) - \sin(i)]$

b. θ_k si $\delta = k\lambda$ $k\in Z$ dc $\sin(\theta) = \sin(i) + k\lambda/p$

3. Dénombrement des maximums principaux

a.

k	--7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
λ_v	-0,9	-0,7	-0,5	-0,3	-0,1	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
λ_r				-0,9	-0,55	-0,2	0,15	0,5	0,85	

b. Il y a recouvrement entre les ordres -2 et -3 ; -3, -4 et -5 ; -4, -5 et -6 ; -5, -6 et -7.

IV Le spectrographe à réseau

1. Minimum de déviation

a. $\sin(\theta) = \sin(i) + k\lambda/p$ donne (pour k, λ et p donnés) $\cos(\theta)d\theta = \cos(i)di$ dc $dD = d\theta - di = di(\cos(i)/\cos(\theta) - 1) = 0$ si $\cos(i) = \cos(\theta)$ soit $i = \theta$, impossible si $k \neq 0$, ou $i_m = -\theta_{km}$.

b. Alors $D_m = 2\theta_{km} = -2i_m$ et $2\sin(D_m/2) = k\lambda/p$

c. $i_m = -8{,}31°$

2. Dispersion angulaire, dispersion linéaire

a. $\sin(\theta_k) = k\lambda/p$ et $\sin(\theta_k + d\theta_k) = k(\lambda + d\lambda)/p = \sin(\theta_k) + d\theta_k\cos(\theta_k)$ dc $(d\theta_k/d\lambda) = k/(p\cos(\theta_k))$

b. $(dX_k/d\lambda) = kf'/(p\cos(\theta_k))$

c. $\sin(\theta_1) = \lambda/p = 0{,}2890$ dc $\cos(\theta_1) = 0{,}9573$ et $(dX_1/d\lambda) = 0{,}5223$ mm/nm

3. Résolution des doublets du sodium et du mercure dans les spectres d'ordre 1

a. $a' = af'/f = 0{,}2$ mm

b. Na : $\Delta X_{na} = 0{,}3134$ mm $> a'$

Hg : $\Delta X_{hg} = 1{,}097$ mm $> a'$

Donc ces doublets sont séparés.

Partie B - ELECTROMAGNETISME

I. Le dipôle électrostatique

1. Doublet électrostatique - Moment électrique p d'un dipôle

a. $\Sigma q_i \mathbf{O'S} = (\Sigma q_i)\mathbf{O'O} + \Sigma q_i \mathbf{OS} = \Sigma q_i \mathbf{OS}$
b. $\mathbf{p} = q\mathbf{S_1S_2}$
c. c.1 H : +1 et F : -1
c.2 $p = de = 1{,}47.10^{-29}$ Cm = 4,42 D
c.3 $p_{exp} = e.HF - 10.e.GF$ dc $FG = 5{,}39.10^{-12}$ m

2. Potentiel scalaire électrosttique V(m)

a. $V(M) = Kq(1/r_2 - 1/r_1)$ où $K = 1/(4\pi\varepsilon_o)$
b. $V_d(M) = K(\mathbf{p.r})/r^3$

3. Champ électrostatique E(M)

a. $\mathbf{grad}_M(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$ et $\mathbf{grad}_M(\mathbf{p.r}) = \mathbf{p}$
b. $\mathbf{E}(M) = -\mathbf{grad}_M(V_d(M)) = -K((\mathbf{p.r})\,\mathbf{grad}_M(1/r^3) + (1/r^3)\,\mathbf{grad}_M(\mathbf{p.r}))$ dc $k_1 = 3$
c. $E_r = K2p\cos(\theta)/r^3$; $E_\theta = Kp\sin(\theta)/r^3$; $E_\varphi = 0$
d. $\tan(\beta) = E_\theta/E_r = \tan(\theta)/2$
e. $\theta_1 + \beta_1 = \pi/2$ dc $(\tan(\theta_1))^2 = 2$ et $\theta_1 = 54{,}7°$

4. Equipotentielles et lignes de champ

a. $r^2 = k\cos(\theta)$
b. $dr/(2\cos(\theta)) = r.d\theta/(\sin(\theta)) = r\sin(\theta)d\varphi/0$ dc φ = cst et $r = k'(\sin(\theta))^2$
c. V_1 englobe V_2

5. Action d'un champ électrique extérieur uniforme $\mathbf{E_e}$

a. $\Gamma = \mathbf{OS_2}\wedge q\mathbf{E_e}(S_2) - \mathbf{OS_1}\wedge q\mathbf{E_e}(S_1) \approx \mathbf{p}\wedge\mathbf{E_e}(O)$ et $\mathbf{R_f} = q\mathbf{E_e}(S_2) - q\mathbf{E_e}(S_1)$ dc, par ex, $R_{fx} = q(E_{ex}(S_2) - E_{ex}(S_1)) \approx q(\mathbf{OS_2}.\mathbf{grad}(E_{ex}(O)) - \mathbf{OS_1}.\mathbf{grad}(E_{ex}(O))) = \mathbf{p}.\mathbf{grad}(E_{ex}(O))$, dc $\mathbf{R_f} = (\mathbf{p}.\mathbf{grad})(\mathbf{E_{ex}}(O))$
b. **p** // **E** : équilibre stable ; **p** anti// **E** : équilibre instable

II. Le dipôle magnétique

1. Spire circulaire de courant - Moment magnétique de la spire

a. $\mathbf{m} = \pi R^2 I\mathbf{e_z}$
b. $\mathbf{B}(M_a(z)) = 2K'I\pi R^2(z^2+R^2)^{-3/2}\mathbf{e_z}$ où $K' = \mu_o/(4\pi)$
c. $\Omega_{Ma} = 2\pi(1-z/(z^2+R^2)^{1/2})$ dc $\mathbf{grad}_{Ma}\Omega_{Ma} = -\mathbf{e_z}\,2\pi R^2(z^2+R^2)^{-3/2}$ dc $\mathbf{B}(M_a(z)) = -K'I\,\mathbf{grad}_{Ma}\Omega_{Ma}$
d. $\mathbf{B}(O) = \mathbf{e_z}2K'I\pi/R$ et $\mathbf{B}(z) \approx \mathbf{e_z}2K'I\pi R^2/z^3$

2. Potentiel vecteur magnétique A(M)

a. $\mathbf{A}(M) = K'\mathbf{m}\wedge\mathbf{OM}/OM^3$
b. $\mathbf{A}(M) = K'm.\sin(\theta)/r^2\,\mathbf{e_\varphi}$

3. Champ magnétique B(M)

a. $\mathbf{grad}(1/OM) = -\mathbf{OM}/OM^3$

b. $\mathrm{div}(\mathbf{m}/OM) = -\mathbf{m.OM}/OM^3$ et $\mathbf{rot}_M(\mathbf{m}/OM) = \mathbf{m}\wedge\mathbf{OM}/OM^3$ et $\Delta(\mathbf{m}/OM) = \mathbf{e}_z\, m\Delta(1/OM) = \mathbf{0}$

c. $\mathbf{B} = \mathbf{rotA} = K'\mathbf{rot\ rot}\ (\mathbf{m}/OM) = K'\mathbf{grad}\ \mathrm{div}(\mathbf{m}/OM) - K'\Delta(\mathbf{m}/OM) = -K'\mathrm{grad}(\mathbf{m.OM}/OM^3)$

d. $B_r = 2K'm\cos(\theta)/r^3$; $B_\theta = K'm\sin(\theta)/r^3$; $B_\varphi = 0$

4. Action d'un champ magnétique extérieur $\mathbf{B}_e$

a. $E_p = -\boldsymbol{M}.\mathbf{B}_e$ et $\mathbf{F} = \mathbf{grad}(\boldsymbol{M}.\mathbf{B}_e)$

b. $E_p = 2MK'I\pi R^2(z^2+R^2)^{-3/2}$ dc $\mathbf{F} = -\mathbf{e}_z\partial E_p/\partial z = \mathbf{e}_z\, 6MK'I\pi R^2 z(z^2+R^2)^{-5/2}$

c. $W_o = \displaystyle\int_{z_0}^{0} dE_p = 2MK'I\pi R^2[\,1/R^3 - 1/(R^2+z_o{}^2)^{3/2}\,] > 0$

d. $k_3 = 13/27$

III. Le dipôle électrique oscillant

1. Le dipôle oscillant. Moment dipolaire 🏳(t)

a. $p_o = aq_o$

b. ♓$_o = j\omega p_o/a$

2. Potentiels retardés (✌(t) ; ✞(t))

a. On sort ♓(t-r/c)(1/r) de l'intégrale, qui devient $a\mathbf{e}_z$

b. ✌$_r = K'(j\omega p_o/r)\cos(\theta)\exp[\,j\omega(t-r/c)\,]$; ✌$_\theta = -K'(j\omega p_o/r)\sin(\theta)\exp[\,j\omega(t-r/c)\,]$; ✌$_\varphi = 0$

c. ∂✞$/\partial t = -c^2\,\mathrm{div}$✌ $= j\omega(p_o\cos(\theta)/(4\pi\varepsilon_o r^2))(1+j\omega r/c)\exp[\,j\omega(t-r/c)\,]$ dc $g(\theta) = \cos(\theta)$
Si $\omega\to 0$, ✞$(M,t)\to p_o\cos(\theta)/(4\pi\varepsilon_o r^2)$ càd le potentiel du dipôle statique.

3. Champ électromagnétique(☜(M,t) ; 👌(M,t))

a. 👌 = **rot**✌ dc 👌$_r$ = 👌$_\theta = 0$ et 👌$_\varphi = K'(j\omega p_o/r^2)\sin(\theta)(1+j\omega r/c)\exp[\,j\omega(t-r/c)\,]$ qui $\to 0$ si $\omega\to 0$ (il n'y a plus de courant).

b. ☜ = -**grad**✞ -∂✌$/\partial t$ dc ☜$_r = 2p_o\cos(\theta)/(4\pi\varepsilon_o r^3)(1+j\omega r/c)\exp[\,j\omega(t-r/c)\,]$; ☜$_\theta = p_o\sin(\theta)/(4\pi\varepsilon_o r^3)(1+j\omega r/c+(j\omega r/c)^2)\exp[\,j\omega(t-r/c)\,]$; ☜$_\varphi = 0$. Si $\omega\to 0$, on retrouve le champ du dipôle statique.

4. Rayonnement du dipôle à grandes distances

a. ☜ $\approx (j\omega/c)^2 p_o\sin(\theta)/(4\pi\varepsilon_o r)\exp[\,j\omega(t-r/c)\,]\mathbf{e}_\theta$ et 👌 $\approx (j\omega/c)^2 p_o\sin(\theta)/(4\pi\varepsilon_o rc)\exp[\,j\omega(t-r/c)\,]\mathbf{e}_\varphi$
Structure locale d'onde plane

b. $\mathbf{S} = c\varepsilon_o(\omega/c)^4(p_o\sin(\theta)/(4\pi\varepsilon_o r))^2\cos^2[\,j\omega(t-r/c)\,]\mathbf{e}_r$ et $<\mathbf{S}> = (1/2)c\varepsilon_o(\omega/c)^4(p_o\sin(\theta)/(4\pi\varepsilon_o r))^2\,\mathbf{e}_r$

c. $P_m = (1/2)c\varepsilon_o(\omega/c)^4(p_o/(4\pi\varepsilon_o))^2 2\pi\displaystyle\int_0^\pi \sin^3(\theta)d\theta = i_o{}^2(a/\lambda)^2\,\pi/(3c\varepsilon_o)$

d. $k_4 = 2\pi\mu_o c/3 \approx 80\pi^2 \approx 789{,}6\ \Omega$