DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: non autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Afin de faciliter le travail du correcteur:

- On indiquera la numérotation des questions
- On passera une ligne entre chaque question
- On $\boxed{\textit{encadrera}}$ les réponses au rouge

On justifiera toutes les réponses, même celles jugées « évidentes » avec précision.

Lévitation par interaction magnétostatique

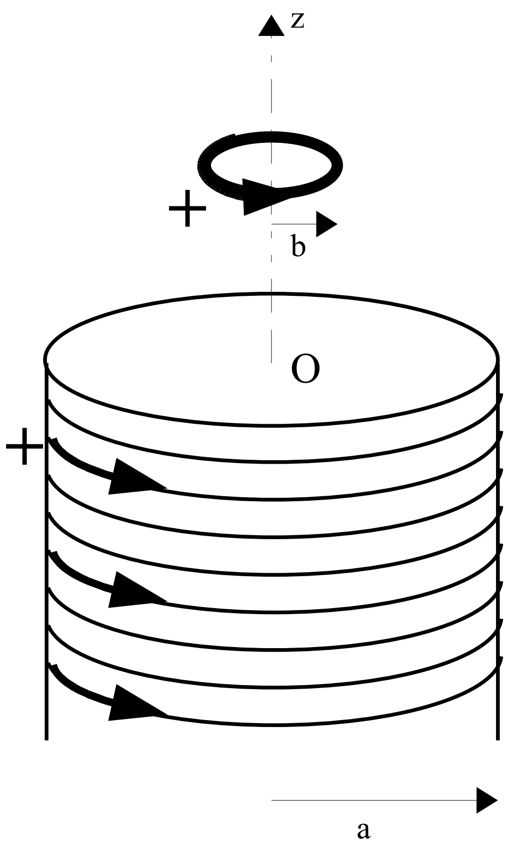
Donnée:

en cylindriques, on a $div(\vec{B})=\frac{1}{r}\frac{\partial(r B_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial B_z}{\partial z}$

Un dispositif destiné à illustrer la loi de Lenz est composé de deux parties:

- un solénoïde vertical, d'axe Oz, de rayon a , relié à un générateur de courant alternatif
- un anneau métallique, de même axe, de masse m , de rayon b avec $b \ll a$, mobile selon Oz.

En l'absence de courant dans le solénoïde, l'anneau repose sur la face supérieure du solénoïde. On constate expérimentalement que l'établissement du courant dans le solénoïde, éjecte l'anneau spectaculairement vers le haut.



Avec d'autres conditions expérimentales (un opérateur guidant l'anneau), on peut observer un équilibre de lévitation magnétique.

Dans tout le problème, on respectera les orientations positives indiquées sur le schéma.

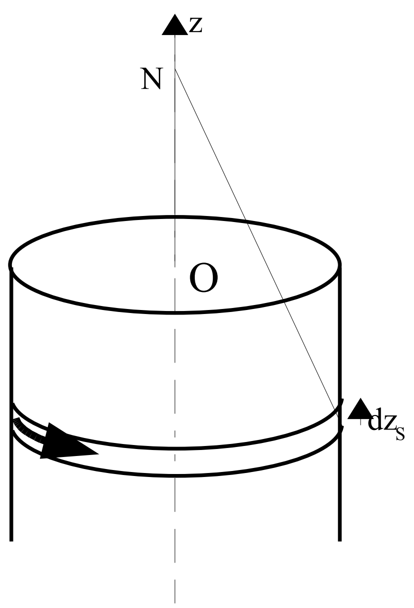
I. Approche qualitative

1. Enoncer la loi de Lenz.
2. Comparer le flux de $\vec{B}$ dans l'anneau un peu avant et un peu après l'établissement du courant.
3. Que peut-on dire de la valeur du champ créé sur l'axe par un solénoïde à grande distance $z \to +\infty$?
4. Expliquer alors, avec précision, qualitativement, pourquoi l'anneau s'éloigne du solénoïde lors de l'établissement du courant.

II. Exercices indépendants

A. Champ magnétique créé par le solénoïde :

5. On envisage une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I_0
   - Retrouver l'expression du champ magnétique $\vec{B}=B(z)\vec{u}_z$ créé par la spire en un point N de son axe Oz.
   - Ecrire le résultat en fonction de α , angle sous lequel, de N, on voit un rayon de la spire soit $\vec{B}=B(\alpha)\vec{u}_z$.
6. Pour simplifier le calcul, le solénoïde considéré dans le problème est supposé semi-infini. Il s'étend de $z_S = -\infty$ à $z_S = 0$. Il comporte n spires par unité de longueur et est parcouru par une intensité I_0 . Le rayon est a .



Pour déterminer le champ créé par ce solénoïde en un point N de cote z de son axe, on l'assimile à une nappe continue de courant surfacique, ce qui revient à traiter tout nombre de spires comme une variable continue (alors qu'il s'agit d'une variable discrète). On considère une « tranche élémentaire » de ce solénoïde, située en z_S , de hauteur dz_S $(dz_S>0)$.

- Déterminer en fonction de n et dz_S le nombre de spires dans cette « tranche élémentaire ».
- Quelle est l'expression du champ élémentaire $d\vec{B}$ créé au point N par la « tranche élémentaire ».
- Quelle est la relation entre α, z, z_S, a .

7. Par intégration sur α , déterminer le champ magnétique $\vec{B}=B_z\vec{u}_z$ créé par le solénoïde semi-infini au point N de cote z . On exprimera B_z en fonction de z et des constantes du problème. On l'écrira sous la forme $B_z=B_0(1-f(z))$.
8. Pour un point P(r,z), proche de l'axe et de même cote que N, le champ $\vec{B}(r,z)$ possède, dans un repère cylindrique, deux coordonnées: une selon $\vec{u}_z$ et l'autre selon $\vec{u}_r$: $\vec{B}(r,z)=B_z\vec{u}_z+B_r\vec{u}_r$. On admet (si on travaille au premier ordre en r) que B_z en P a la même valeur qu' en N sur l'axe.
   - Ecrire l'équation locale de Maxwell correspondant à la conservation du flux magnétique et en déduire B_r en fonction de la dérivée de B_z . On expliquera avec soin pourquoi la constante d'intégration est nulle. Vérifier que B_r est bien du premier ordre en r.
   - Donner l'expression de B_r en fonction de $r, B_0, f'(z)$ en notant $f'(z)$ la dérivée $\dfrac{df}{dz}$.

B. Expression de la force de Laplace sur l'anneau :

9. L'anneau de rayon b est à la cote z parcouru par une intensité i . Le solénoïde est parcouru par l'intensité I_0 . Il crée le champ: $\vec{B}(b,z)=B_z(z)\vec{u}_z+B_r(b,z)\vec{u}_r$. On utilisera ces notations sans avoir besoin de les préciser davantage.
   - Donner en fonction de ces grandeurs l'expression de la force de Laplace sur une portion élémentaire de l'anneau.
   - Faire un schéma dans l'espace montrant la répartition de forces sur l'anneau.
   - En déduire la force de Laplace totale sur l'anneau.
   - Vérifier que la direction obtenue est conforme à la direction attendue. Commenter le sens.
10. On envisage une autre méthode pour obtenir l'expression de cette force. On imagine une expérience et on applique le principe de conversion électromécanique. Dans cette « expérience de pensée », on translate, vers le haut, pendant dt , l'anneau, de $dz=v\,dt$ alors qu'un dispositif quelconque maintient l'intensité I_0 constante. Ici aussi, on utilisera les notations $B_z(z), B_r(b,z)$ sans chercher à préciser davantage.

- Ecrire le flux Φ du $\vec{B}$ créé par le solénoïde dans l'anneau.
- En déduire la fem induite dans l'anneau due au champ extérieur.
- En appliquant le principe de conversion électromécanique, en appelant i l'intensité dans l'anneau, trouver l'expression de la force de Laplace recherchée.
- Pourquoi était-il nécessaire de supposer I_0 indépendant du temps pour ce calcul?

11.Montrer en utilisant les résultats précédents que les deux approches donnent le même résultat.

III. Première modélisation

L'anneau est fixé à l'altitude z . On cherche à savoir si l'anneau peut léviter à cette altitude.

L'intensité dans le solénoïde est notée: $I=I_0 \sin(\omega t)$ créant sur l'axe le champ $\vec{B}=B\vec{u}_z=B_0\,(1-f(z))\sin(\omega t)\vec{u}_z$. La force de Laplace sur l'anneau est supposée donnée par $\vec{F}=F\vec{u}_z=-K\ i\ f'(z)\sin(\omega t)\vec{u}_z$. Les grandeurs $I_{0,}B_{0,}K, f(z)$ sont positives et $f(z)<1$ on ne cherchera pas à préciser leur expression dans la suite.

12.Justifier qualitativement que $f(z)$ est une fonction croissante et donc que $f'(z)$ est positif.

Dans cette première modélisation, l'anneau de rayon b , de résistance R, possède une inductance propre négligeable.

13.Quelle est la force électromotrice induite dans l'anneau? En déduire l'intensité du courant induit i dans l'anneau.

14.Ecrire F sous la forme $A\sin(\Omega t)$. Représenter la force F en fonction du temps entre 0 et T c'est à dire pour la première période du courant I .

15.En fait, l'anneau réagit avec un temps de réponse grand par rapport à la période du courant. Il est sensible à la force magnétique moyenne. Cette première modélisation est-elle en conformité avec les observations expérimentales?

IV. Deuxième modélisation

On tient compte de l'inductance L et de la résistance R de l'anneau.

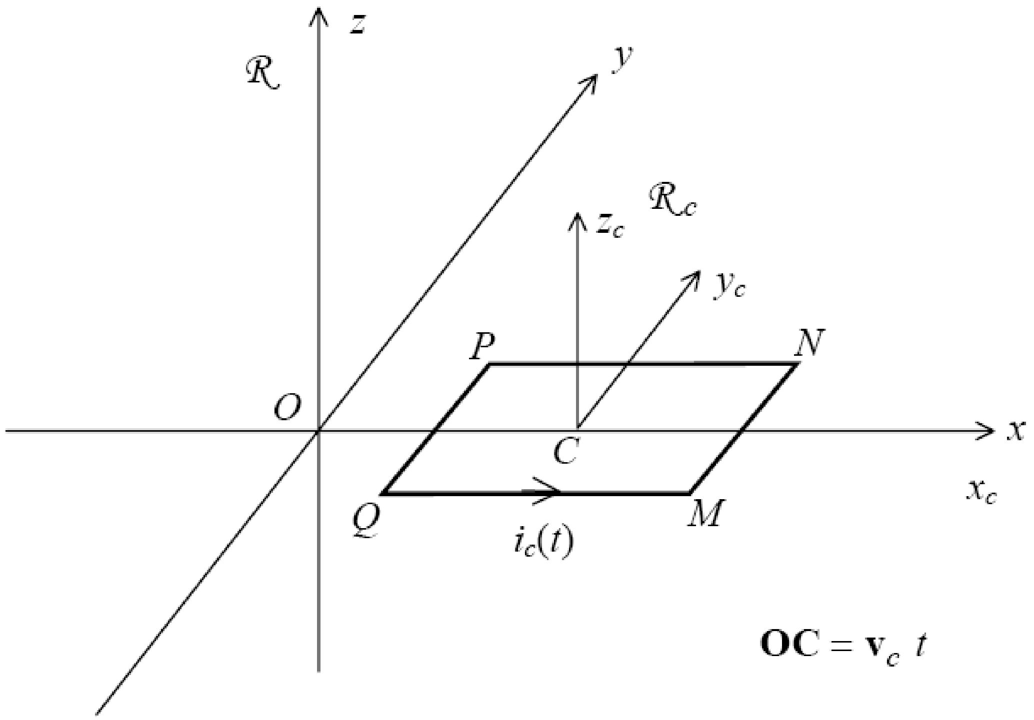
16.Donner l'expression du courant dans l'anneau en régime forcé.

17.Donner l'expression de la force moyenne en fonction du temps $<F>$ en fonction de A, R, L, ω .

18.Ce deuxième modèle convient-il?. A quel niveau faut-il tenir compte de mg poids de l'anneau.

Moteur linéaire asynchrone

Un cadre rectangulaire (l'induit) *MNPQ* de centre C et de côtés *MN=QP=a* et *QM=PN=b* restant dans le plan z=0 se translate, par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$ de centre O, à la vitesse $\vec{v_C}=v_C\vec{u_x}$ $(v_C>0)$ supposée constante. Le centre C reste sur l'axe Ox et les côtés *MN* et *QP* restent parallèles à Oy. On définit le référentiel $\mathscr{R}_C$ de centre C lié au cadre. Les coordonnées d'un point quelconque dans le repère lié à $\mathscr{R}_C$ d'origine C sont notées x_C, y_C, z_C et les coordonnées d'un point quelconque dans le repère lié à $\mathscr{R}$ d'origine O sont notées x, y, z. En t=0, le centre du cadre C passe par l'origine du système de coordonnées O.



1. Ecrire la relation entre x, x_C, v_C, t .

Un ensemble d'électroaimants situés le long de l'axe Ox dans lesquels les courants sont déphasés forme l'inducteur. Il crée dans le référentiel $\mathscr{R}$ un champ électromagnétique « glissant »: *(attention: ceci n a rien à voir avec une onde électromagnétique)*

$$\vec{B}(x,t)=B_m\cos(\omega(t-\frac{x}{v_S}))\vec{u}_z \qquad \vec{E}(x,t)=B_m\, v_S\,\cos(\omega(t-\frac{x}{v_S}))\vec{u}_y$$

On considère alors un troisième référentiel noté $\mathscr{R}_S$ qui se translate à la vitesse $\vec{v_S}=v_S\vec{u}_x$ $(v_S>0)$ constante par rapport à $\mathscr{R}$. Les origines des deux repères sont confondues en t=0. Les coordonnées d'un point quelconque dans le repère lié à $\mathscr{R}_S$ sont notées x_S, y_S, z_S .

2. Ecrire la relation entre x, x_S, v_S, t.

Dans tout le problème, on respectera l' orientation positive indiquée sur le schéma.

I. Changements de référentiels

On rappelle les formules de transformation pour les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ entre deux référentiels galiléens $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ en translation parallèlement à Ox.

$\vec{E}'=\vec{E}+\vec{V}\wedge\vec{B}$ et $\vec{B}'=\vec{B}$

On a noté $\vec{V}=V\vec{u}_x$ la vitesse relative de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$.

3. Donner les expressions des champs $\vec{B}_S$ et $\vec{E}_S$ dans le référentiel $\mathscr{R}_S$. On exprimera évidemment les résultats en fonction de x_S (et non pas en fonction de x). Commenter le résultat.
4. Donner les expressions des champs $\vec{B}_C$ et $\vec{E}_C$ dans le référentiel $\mathscr{R}_C$. Exprimer les résultats en fonction de x_C. On écrira finalement les résultats en fonction de B_m, v_S, ω, x_C, t et du facteur de glissement $g=1-\frac{v_C}{v_S}$ (si g est positif, le cadre prend du retard par rapport au champ).

II. Force électromotrice induite

A. On se place dans le référentiel $\mathscr{R}_S$.

5. Quelle est la vitesse du cadre par rapport à ce référentiel (en fonction de v_S, g)? En déduire dans ce référentiel, l'expression des abscisses $x_S(C)$ de C, puis $x_S(M)$ de M ou N, puis $x_S(P)$ de P ou Q.
6. Dans ce référentiel, le cadre est alors mobile dans un champ stationnaire. Quelle circulation doit-on alors calculer pour déterminer le force électromotrice.
7. Calculer, par la méthode proposée, successivement pour chaque côté, la force électromotrice instantanée induite? On obtiendra le résultat en fonction de $B_m, v_S, g, \omega, a, x_S(M), x_S(P)$
8. En déduire une expression de la force électromotrice induite dans le cadre, faisant intervenir un produit de deux sinus, en fonction de $B_m, v_S, g, \omega, a, b, t$

B. On se place dans le référentiel $\mathscr{R}_C$ dans lequel le cadre est immobile.

9. Comment doit-on calculer la force électromotrice dans ce cas?
10. Donner dans ce référentiel, l'expression des abscisses $x_C(M)$ de M ou N, puis $x_C(P)$ de P ou Q.
11. Calculer, dans ce référentiel, l'expression du flux du champ magnétique (ni uniforme, ni permanent) à travers le circuit *MNPQ*. On obtiendra le résultat en fonction de

$B_m, v_S, g, \omega, a, x_C(M), x_C(P)$.

12.En déduire la force électromotrice instantanée induite dans le cadre dans ce référentiel.

13.La valeur de la force électromotrice dépend-t-elle du référentiel dans lequel on la calcule ?

III. Courant dans le cadre

Le cadre a une résistance R et une inductance propre négligeable.

14.Quelle est la valeur instantanée de l'intensité $i(t)$ du courant qui parcourt le cadre ?

15.Calculer la puissance moyenne $<P_J>$ dissipée par effet Joule en fonction de $B_m, v_S, g, \omega, a, b, R$.

IV. Force de Laplace

On rappelle que la force de Laplace est invariante par changement de référentiel galiléen.

16.Quelle est la valeur de la résultante $\vec{F}_L$ des forces de Laplace s'exerçant sur le cadre ?

17.Quelle est sa valeur moyenne $<\vec{F}_L>$?

V. Bilan électromécanique dans $\mathscr{R}$

18.Calculer, dans $\mathscr{R}$ la valeur moyenne $<P_L>$ de la puissance des forces de Laplace et tracer la courbe représentant les variations de $<P_L>$ en fonction de g pour : $-0{,}1 \leq g \leq 1{,}1$.

19.En régime permanent, dans $\mathscr{R}$, on appelle $<P_{em}>$ la puissance électromagnétique reçue par le cadre mobile de la part du champ glissant. Exprimer $<P_L>$ et $<P_{em}>$ en fonction de $<P_J>$ et g.

20.Préciser les signes des puissances $<P_L>$ et $<P_{em}>$ en fonction des valeurs de g ($g \leq 0$, $0 \leq g \leq 1$, $1 \leq g$) et caractériser pour chacun de ces intervalles le mode de fonctionnement (moteur, générateur ou frein électromagnétique).

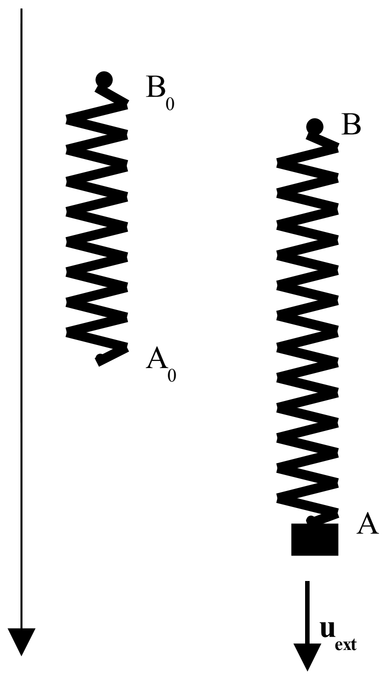
Ressort

Notations usuelles:

l_0	longueur du ressort à vide
l_E	longueur du ressort à l'équilibre
l	longueur du ressort
x ou X	abscisse (nécessite de préciser axe et origine)

Rappel:

Force exercée par un ressort à son extrémité A: $\vec{F}=-k(l-l_0)\vec{u_{ext}}$ avec $\vec{u_{ext}}$: vecteur unitaire dirigé de A vers l'extérieur du ressort.



I. Oscillations libres sans frottements

Le point B du ressort est fixe en B_0 . Une masse m est accrochée à l'extrémité A du ressort.

L'axe Ox est dirigé vers le bas. On a pour le champ de pesanteur: $\vec{g}=g\vec{u_x}$.

A l'instant t = 0, le ressort est non tendu et m a une vitesse verticale, dirigée vers le bas, de module v_0 .

1. Ecrire le principe fondamental à la masse m en mouvement sous forme vectorielle puis projeter sur un axe dirigé vers le bas. En déduire l'équation différentielle donnant $l(t)$ faisant intervenir l_0, m, g, k. On définira la pulsation propre ω_0 .

2. Résoudre et donner l'expression de *l(t)*. Préciser l'amplitude des oscillations.

3. Déduire de ce résultat la longueur du ressort à l'équilibre.

Pour les trois questions qui suivent, on étudiera le cas particulier $v_0=0$

4. Tracer le graphe donnant *l(t).*

5. Quelle est la valeur maximale atteinte par *l(t)*.

6. Retrouver, en justifiant avec précision, ce dernier résultat par une analyse énergétique (conservation de l'énergie).

II. Excitation sinusoïdale sans frottements

Le point B n'est plus fixe comme précédemment. Un mécanisme non représenté communique à partir de l'instant t=0 au point B un mouvement rectiligne vertical sinusoïdal. Le point A au départ est sans vitesse à sa position d'équilibre. On pose : $\overrightarrow{B_0 B}=x_B \vec{u}_x$ et $\overrightarrow{A_E A}=x \vec{u}_x$ (A_E est la position de A à l'équilibre trouvée précédemment avant que B ne bouge).

7. Ecrire *l(t)* en fonction de l_E, x, x_B .

8. On donne $x_B = a \sin(\omega t)$ et on suppose $\omega \neq \omega_0$. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par *x(t)*.

9. En déduire l'expression de la solution *x(t)* en tenant compte des conditions initiales. Représentation graphique et commentaire.

Réponses

Lévitation par interaction magnétostatique

1) Loi de Lenz : le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance

---

2) Juste avant l'établissement du courant, le champ magnétique créé par le solénoïde est nul et donc le flux à travers l'anneau est nul.

Un peu après, il y a un champ $\vec{B}$ créé par le solénoïde et donc le flux à travers l'anneau est différent de zéro.

(son signe est en lien avec le sens du courant dans le solénoïde)

---

3) A grande distance du solénoïde ($z \to \infty$) le champ créé par le solénoïde tend vers zéro.

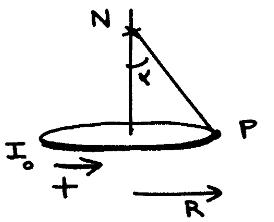
(si l'anneau est en $z \to \infty$ le flux est donc nul)

---

4) Lors de l'établissement du courant, l'anneau s'éloigne donc pour retrouver un flux plus proche de 0 conformément à la loi de modération.

---

5)



$(\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}})$

$$\vec{B} = B(z)\,\vec{u_z} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\text{spire}} I_0\,\vec{dl} \wedge \frac{\vec{PN}}{PM^3}$$

avec $\vec{dl} = R\,d\theta\,\vec{u_\theta}$

et $\vec{PN} = \vec{ON} - \vec{OP}$

$$(\vec{u_r},\vec{u_\theta},\vec{u_z})\begin{vmatrix}0\\0\\z\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}R\\0\\0\end{vmatrix}$$

$$\vec{dl} \wedge \vec{PN} \begin{vmatrix}Rz\,d\theta\\0\\R^2 d\theta\end{vmatrix}$$

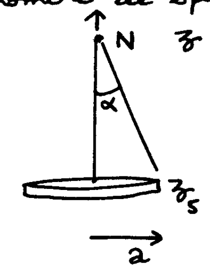
$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R^2 d\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}} \overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B}_{axe} = \frac{\mu_0 I_0}{2R} \frac{R^3}{(R^2+z^2)^{3/2}} \overrightarrow{u_z}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B}_{axe} = \frac{\mu_0 I_0}{2R} \sin^3\alpha \ \overrightarrow{u_z}}$$

---

6) – nombre de spires dans une tranche dz_s : $\boxed{dN = n \underbrace{dz_s}_{>0}}$



– il faut multiplier le résultat pour une spire par le nombre de spires dans la tranche élémentaire.

$$\boxed{d\overrightarrow{B} = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2a} \sin^3\alpha \ \overrightarrow{u_z}\right) n \, dz_s}$$

– avec $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{a}{(z-z_s)}}$

---

7) On intègre avec α comme variable donc

$$z - z_s = \frac{a}{\tan\alpha}$$

$$-dz_s = a \times \frac{-d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$d\overrightarrow{B} = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2a} \sin^3\alpha \ \overrightarrow{u_z}\right) n \frac{a \, d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

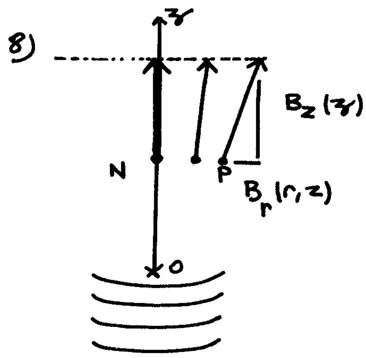
$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I_0 n}{2} \int_0^{\alpha_{MAX}} \sin\alpha \, d\alpha \ \overrightarrow{u_z}$$

on avait $dz_s > 0$, on intègre donc sur z_s croissant donc de $\alpha = 0$ à $\alpha = \alpha_{MAX}$ tel que $\cos\alpha_{MAX} = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}$

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I_0 n}{2} \underbrace{\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)}_{f(z)} \overrightarrow{u_z}}$$

---

8)



Equation de Maxwell – conservation du flux

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$

Ici :

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial (r B_r)}{\partial r} + \frac{d B_z}{dz}$$

car B_z n'est fonction que de z.

On obtient $\qquad \frac{\partial}{\partial r}(r B_r) = -r\left(\frac{dB_z}{dz}\right)$

on intègre à z constant

$$r B_r = -\frac{r^2}{2}\left(\frac{dB_z}{dz}\right) + \underbrace{K(z)}_{\text{fonction de } z}$$

en faisant $r=0$, on voit que $K(z)$ doit être nul

$$\boxed{B_r = -\frac{r}{2}\left(\frac{dB_z}{dz}\right)}$$

on trouve que B_r est du premier ordre en r.

$$\boxed{B_{r\,(r,z)} = \frac{r}{2}\, B_0\, f'(z)}$$

---

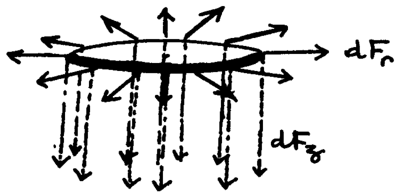
9) Sur une portion $\vec{dl} = b\,d\theta\,\vec{u_\theta}$ de l'anneau de rayon b, la force de Laplace est :

$$\vec{dF} = i\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

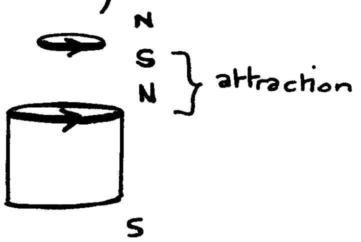
$$\begin{array}{c|c|c} & 0 & B_r(b,z) \\ & b\,d\theta & 0 \\ \vec{u_r},\vec{u_\theta},\vec{u_z} & 0 & B_z(z) \end{array}$$

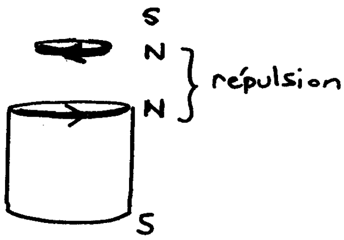
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{dF} &= i\,b\,d\theta\,B_z(z)\,\vec{u_r} \\ &\quad - i\,b\,d\theta\,B_r(b,z)\,\vec{u_z}\end{aligned}}$$

schéma (avec $i > 0$)
(et en admettant $B_r > 0$ et $B_z > 0$)



Vu la symétrie, la somme des dF_r s'annule et la force résultante a bien la direction selon z.
(selon $+\vec{u_z}$ si $i<0$ et selon $-\vec{u_z}$ si $i>0$, ce que l'on pouvait prévoir en analysant en faces Nord ou Sud le problème)





calcul

$$\vec{F} = i\, b\, B_z(z) \int_{\theta=0}^{2\pi} (d\theta\, \vec{u_r}) - i\, b\, B_r(b,z) \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\ \vec{u_z}$$

$$\int_0^{2\pi} (d\theta \cos\theta)\vec{u_x} + \int_0^{2\pi} d\theta \sin\theta\ \vec{u_y}$$

nul nul

$$\boxed{\vec{F} = -i\, b\, B_r(b,z)\, 2\pi\, \vec{u_z}}$$

---

10) — $\Phi = \int_{\text{anneau}} \vec{B}\, dS\, \vec{u_z}$ avec $\vec{B} = B_z(z)\,\vec{u_z} + B_r(r,z)\,\vec{u_r}$

$$\boxed{\Phi = B_z(z)\, \pi\, b^2}$$

– $$e_{ext} = -\frac{d\phi}{dt}$$
$$= -\frac{d\phi}{dz}\frac{dz}{dt}$$
$$\boxed{e_{ext} = -\pi b^2 \frac{dB_z(z)}{dz} v}$$

– Principe de conversion électromécanique :
$$\mathcal{P}_{Laplace} + e_{ext}\, i = 0$$
On cherche F selon $\overrightarrow{u_z}$ avec $\mathcal{P}_{Laplace} = F v$
$$F v + \left(-\pi b^2 \frac{dB_z(z)}{dz} v\right) i = 0$$
On obtient
$$\boxed{\overrightarrow{F} = \pi b^2 \frac{dB_z(z)}{dz}\, i\, \overrightarrow{u_z}}$$

– Ce principe n'est applicable qu'en champ statique. Il fallait B_z indépendant du temps en un point. On devait donc supposer I_0 indépendant du temps.

---

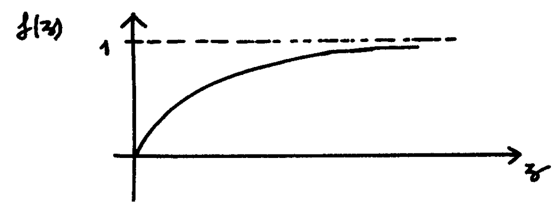
11) Les deux résultats sont :
$$\overrightarrow{F} = \pi b^2 i \frac{dB_z(z)}{dz}\overrightarrow{u_z} \quad \text{et}$$
$$\overrightarrow{F} = -2\pi b\, i\, B_r(b,z)\,\overrightarrow{u_z}$$
on a vu en 8) $\boxed{B_r(b,z) = -\frac{b}{2}\frac{dB_z(z)}{dz}}$

Les deux résultats sont bien identiques.

---

12) On peut prévoir que plus on s'éloigne du solénoïde semi-infini plus B_z diminue donc $1-f(z)$ diminue.

$f(z)$ est croissante et $f'(z)$ positive



remarque :

B_z diminue aussi quand on s'éloigne sur l'axe d'une spire de courant
($B_z = \frac{\mu_0 I_0}{2R} \sin^3\alpha$)
Par contre pour une spire chargée, E_z part de 0 dans le plan de la spire, passe par un maximum et tend vers 0 à l'infini.

---

13) $e_{ext} = -\frac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = \pi b^2 B_0 (1-f(z)) \sin(\omega t)$

L'anneau est fixé en z

$$\boxed{e_{ext} = -\omega \pi b^2 B_0 (1-f(z)) \cos(\omega t)}$$
$$\boxed{i = -\frac{\omega \pi b^2 B_0 (1-f(z))}{R} \cos(\omega t)}$$

---

14) $F = -K\, i\, f'(z) \sin(\omega t)$

(avec $\boxed{K = \pi b^2 B_0}$ cf 10) et 11))

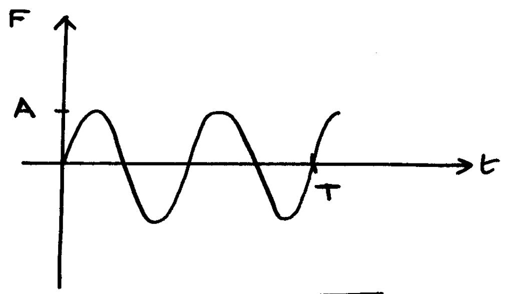
$$F = \underbrace{\frac{K \omega \pi b^2 B_0 (1-f(z)) f'(z)}{R}}_{2A} \underbrace{\sin\omega t \cos\omega t}_{\frac{\sin(2\omega t)}{2}}$$

$F = A \sin \Omega t$

avec $\boxed{A = \frac{K\omega\pi b^2 B_0 (1-f(z)) f'(z)}{2R}}$ (>0)

$\boxed{\Omega = 2\omega}$

La fréquence est double de celle du courant I



15) La force moyenne F à l'altitude z est donc nulle.
Ce modèle n'explique pas la lévitation (car i et B_{ext} sont en quadrature).
Il faudra tenir compte de L (le déphasage i, B_{ext} sera différent de $\pm \pi/2$)

---

16) On a alors : $e_{ext} = Ri + L\frac{di}{dt}$
En régime sinusoïdal forcé

$$\underline{e}_{ext} = R\underline{i} + jL\omega\underline{i}$$

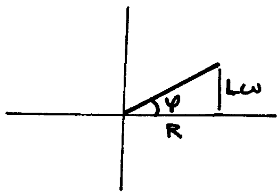
$$\underline{i} = \frac{\underline{e}_{ext}}{(R+jL\omega)} \qquad \varphi = \arg(R+jL\omega)$$

$$\boxed{i = \frac{-\omega\pi b^2 B_0(1-f(z))}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \overbrace{\arctan\frac{L\omega}{R}}\right)}$$

---

17) $$F = \frac{2AR}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \sin(\omega t)\ \cos(\omega t-\varphi)$$
$$\cos(\omega t-\varphi) \downarrow \cos\omega t \cos\varphi + \sin\omega t \sin\varphi$$

$$\langle F\rangle = \frac{2AR}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\left[\cos\varphi \underbrace{\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle}_{=0} + \sin\varphi \underbrace{\langle\sin^2\omega t\rangle}_{=\frac{1}{2}}\right]$$

avec  $\sin\varphi = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$

$$\boxed{\langle F\rangle = A\frac{RL\omega}{R^2+L^2\omega^2}}$$

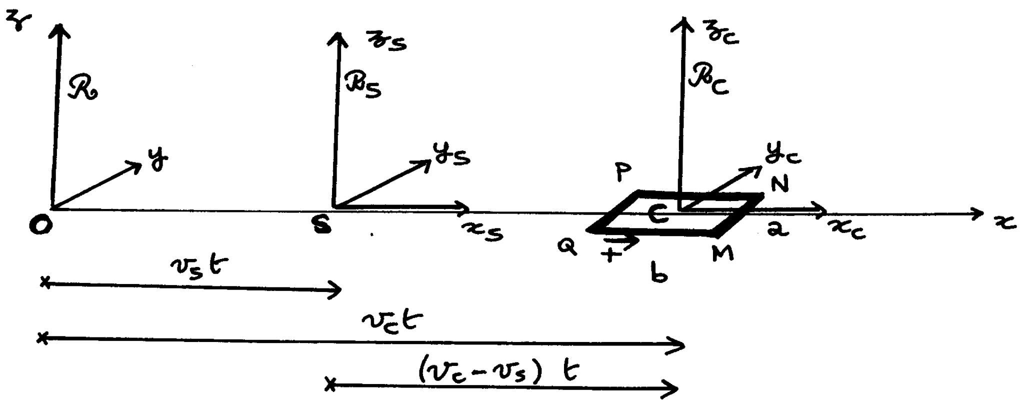
---

18) $\langle F\rangle \neq 0$ et > 0
donc ce modèle convient.
Il faut encore ($\langle F\rangle$ dépend de z) que

$$\boxed{\underset{\text{pour } z=0}{\langle F\rangle_{MAX}} > mg}$$ soit en reportant $f(z)$ et K

$$\frac{\omega(\pi b^2 B_0)^2}{2a}\frac{L\omega}{R^2+L^2\omega^2} > mg$$

Moteur linéaire asynchrone



(remarque : en fait, pour un moteur asynchrone linéaire, le cadre "court" derrière le champ et on aura $v_C < v_S$)

1) Pour un point M quelconque :

$$\boxed{x(M) = x_C(M) + v_C\, t}$$

2) Pour un point M quelconque :

$$\boxed{x(M) = x_S(M) + v_S\, t}$$

3) La vitesse de $\mathcal{R}_S / \mathcal{R}$ vaut $\overrightarrow{v_S} = v_S \overrightarrow{u_x}$

$$\overrightarrow{B_S} = \overrightarrow{B} = B_m \cos\omega\left(t - \frac{x}{v_S}\right) \overrightarrow{u_z}$$

$$= B_m \cos\omega\left(t - \frac{x_S + v_S t}{v_S}\right) \overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B_S} = B_m \cos\left(\frac{\omega}{v_S} x_S\right) \overrightarrow{u_z}}$$

$$\overrightarrow{E_S} = \overrightarrow{E} + v_S \overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{B}$$

$$= B_m v_S \cos\omega\left(t - \frac{x}{v_S}\right) \overrightarrow{u_y} - B_m v_S \cos\omega\left(t - \frac{x}{v_S}\right) \overrightarrow{u_y}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E_S} = \overrightarrow{0}}$$

Dans $\mathcal{R}_S$, on fabrique <u>un champ magnétostatique</u>

($\overrightarrow{B_s}$ est indépendant du temps)

et il n'y a pas de champ $\overrightarrow{E_s}$.

---

4) La vitesse de $\mathcal{R}_c / \mathcal{R}$ vaut $\overrightarrow{v_c} = v_c \overrightarrow{u_x}$

$$\overrightarrow{B_c} = \overrightarrow{B} = B_m \cos \omega (t - \frac{x}{v_s}) \overrightarrow{u_z}$$

$$= B_m \cos \omega (t - \frac{x_c + v_c t}{v_s}) \overrightarrow{u_z}$$

$$= B_m \cos \omega ((1 - \frac{v_c}{v_s}) t - \frac{x_c}{v_s}) \overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B_c} = B_m \cos \omega (g t - \frac{x_c}{v_s}) \overrightarrow{u_z}}$$

$$\overrightarrow{E_c} = \overrightarrow{E} + v_c \overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{B}$$

$$= B_m v_s \cos \omega (t - \frac{x}{v_s}) \overrightarrow{u_y} - B_m v_c \cos \omega (t - \frac{x}{v_s}) \overrightarrow{u_y}$$

$$= (v_s - v_c) B_m \cos \omega (g t - \frac{x_c}{v_s}) \overrightarrow{u_y}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E_c} = g v_s B_m \cos \omega (g t - \frac{x_c}{v_s}) \overrightarrow{u_y}}$$

---

5) La vitesse de $\mathcal{R}_c / \mathcal{R}_s$ est $(v_c - v_s) \overrightarrow{u_x}$

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}_s}(C) = - v_s g \overrightarrow{u_x}}$$ d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} x_s(C) &= - v_s g t \\ x_s(M) &= - v_s g t + \frac{b}{2} \\ x_s(P) &= - v_s g t - \frac{b}{2} \end{aligned}}$$

---

6) On calcule la force électromotrice par :

$$\boxed{e = \oint_{\text{cadre}} (-g \overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{B_s}) \, \overrightarrow{dl}}$$

---

7) – Sur QM et NP la circulation est nulle.

– Sur MN

$$e_{MN} = \int_{y=-a/2}^{a/2} g v_s B_s(M) \, dy_s$$

$$e_{MN} = g v_s B_m \cos (\frac{\omega}{v_s} x_s(M)) \, a$$

– Sur PQ

$$e_{PQ} = \int_{y=a/2}^{-a/2} g\, v_S\, B_S(P)\, dy_S$$

$$e_{PQ} = -g\, v_S\, B_m \cos\left(\frac{\omega}{v_S} x_S(P)\right) a$$

finalement,

$$\boxed{e = g\, v_S\, a\, B_m \left[\cos\left(\frac{\omega\, x_S(M)}{v_S}\right) - \cos\left(\frac{\omega\, x_S(P)}{v_S}\right)\right]}$$

---

8) avec $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$$e = -2\, g\, v_S\, a\, B_m \sin\left(\frac{\omega}{v_S} \frac{x_S(M)+x_S(P)}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega}{v_S} \frac{x_S(M)-x_S(P)}{2}\right)$$

$$\boxed{e = 2\, g\, v_S\, a\, B_m \sin(\omega g t) \sin\left(\frac{\omega b}{2 v_S}\right)}$$

---

9) Dans R_C, le cadre immobile est soumis à un champ variable.

On calcule la f.e.m par

$$\boxed{e = -\frac{d\phi_B}{dt}}$$

---

10)

$$\boxed{\begin{array}{l} x_C(M) = \frac{b}{2} \\ x_C(P) = -\frac{b}{2} \end{array}}$$

---

11)

$$\phi_B = \iint_{cadre} \overrightarrow{B_C}\, dx_C\, dy_C\, \overrightarrow{u_z}$$

$$= \iint_{cadre} B_m \cos \omega\left(gt - \frac{x_C}{v_S}\right) dx_C\, dy_C$$

$$= B_m \int_{y_C=-\frac{a}{2}}^{a/2} dy_C \int_{x_C = x_C(P)}^{x_C(M)} \cos \omega\left(gt - \frac{x_C}{v_S}\right) dx_C$$

$$= B_m\, a\, \frac{\sin \omega\left(gt - \frac{x_C(M)}{v_S}\right) - \sin \omega\left(gt - \frac{x_C(P)}{v_S}\right)}{(-\omega/v_S)}$$

avec $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$$\boxed{\phi_B = -\frac{2aB_m v_S}{\omega} \sin\left[\frac{\omega}{2v_S}\left(x_c(P) - x_c(M)\right)\right] \cos(\omega g t)}$$

---

12) $e = -\frac{2aB_m \cdot v_S}{\omega} \sin\left[\frac{\omega}{2v_S}\left(x_c(P) - x_c(M)\right)\right] g\omega \sin(\omega g t)$

$$\boxed{e = 2 g v_S a B_m \sin\left(\frac{\omega b}{2v_S}\right) \sin(\omega g t)}$$

---

13) la f.e.m. est <u>la même</u> dans les deux référentiels.

---

14) $\boxed{i(t) = \frac{e}{R}}$

---

15) $P_J = R i^2$

$= \frac{e^2}{R}$

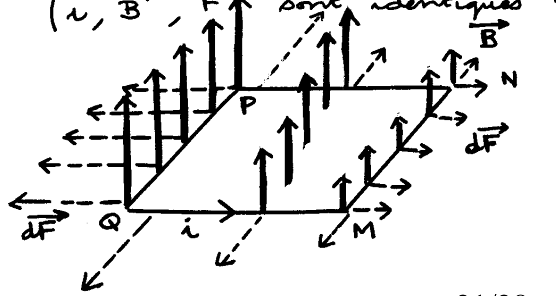
$= \frac{4 g^2 v_S^2 a^2 B_m^2}{R} \sin^2\left(\frac{\omega b}{2v_S}\right) \sin^2(\omega g t)$

$$\boxed{\langle P_J \rangle = \frac{2g^2 v_S^2 a^2 B_m^2}{R} \sin^2\left(\frac{\omega b}{2v_S}\right)}$$

---

16) • Pour calculer les forces de Laplace, on peut faire le calcul <u>pour chaque côté du cadre</u>.

(i, $\vec{B}$, $\vec{F}$ sont identiques dans tous les référentiels)



- Les forces sur QM et NP (même répartition de champ mais courants de sens contraire) vont s'annuler entre elles.
- La force de Laplace sur MN est

$$\overrightarrow{F_{MN}} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} i\, dy\, \overrightarrow{u_y} \wedge B(M)\, \overrightarrow{u_z}$$

$$= i\, a\, B(M)\, \overrightarrow{u_x}$$

- La force de Laplace sur PQ est

$$\overrightarrow{F_{PQ}} = \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} i\, dy\, \overrightarrow{u_y} \wedge B(P)\, \overrightarrow{u_z}$$

$$= -i\, a\, B(P)\, \overrightarrow{u_x}$$

- La force totale sur le cadre est

$$\overrightarrow{F_L} = i\, a\, [B(M) - B(P)]\, \overrightarrow{u_x}$$

$\overrightarrow{B}$ a la même valeur dans les trois référentiels.

En choisissant l'expression dans $\mathcal{R}_S$:

$$= i\, a\, B_m \left[\cos\left(\frac{\omega x_S(M)}{v_S}\right) - \left(\cos \frac{\omega x_S(P)}{v_S}\right) \right] \overrightarrow{u_x}$$

calcul déjà fait en 7) et 8)

$$\boxed{\overrightarrow{F_L} = 2\, i\, a\, B_m \sin(\omega g t) \sin\left(\frac{\omega b}{2 v_S}\right) \overrightarrow{u_x}}$$

(en remplaçant i par son expression obtenue en 14))

- une autre méthode consiste à appliquer, dans le référentiel où le champ est statique, le principe de conversion électromécanique. Donc dans $\mathcal{R}_S$:

$$P_L + e_{ext}\, i = 0.$$

$$F_{Lx}\, v_{cadre/\mathcal{R}_S} + e\, i = 0$$

d'où :

$$\boxed{F_{Lx} = -\frac{e\, i}{(1-g) v_S}}$$

$$\overrightarrow{F_L} = 2\, i\, a\, B_m \sin(\omega g t) \sin\left(\frac{\omega b}{2 v_S}\right) \overrightarrow{u_x}$$

17) $\overrightarrow{F_L} = \dfrac{4 g\, v_S\, a^2 B_m^2}{R} \sin^2(\omega g t) \sin^2\left(\dfrac{\omega b}{2 v_S}\right) \overrightarrow{u_x}$

en remplaçant i par son expression et finalement :

$$\boxed{\langle \overrightarrow{F_L} \rangle = \frac{2 g\, v_S\, a^2 B_m^2}{R} \sin^2\left(\frac{\omega b}{2 v_S}\right) \overrightarrow{u_x}}$$

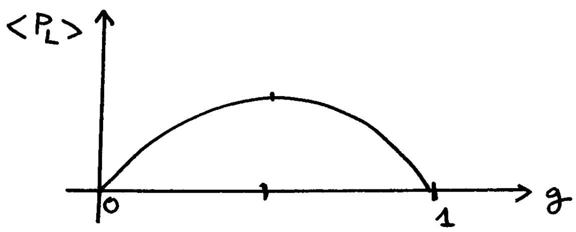
---

18) $\langle P_{L/\mathcal{R}} \rangle = \langle \overrightarrow{F_L} \rangle \, \overrightarrow{v}_{cadre/\mathcal{R}}$

avec $\overrightarrow{v}_{cadre/\mathcal{R}} = v_C \, \overrightarrow{u_x}$

$= v_S (1-g) \overrightarrow{u_x}$

$$\boxed{\langle P_L \rangle = \frac{2 v_S^2 a^2 B_m^2}{R} \sin^2\left(\frac{\omega b}{2 v_S}\right) g\,(1-g)}$$



---

19) Le bilan électromagnétique s'écrit :

$$\boxed{\langle P_{em} \rangle = \langle P_L \rangle + \langle P_J \rangle}$$

avec $\langle P_L \rangle = \dfrac{1-g}{g} \langle P_J \rangle$

donc $\langle P_{em} \rangle = \dfrac{1}{g} \langle P_J \rangle$

---

20)

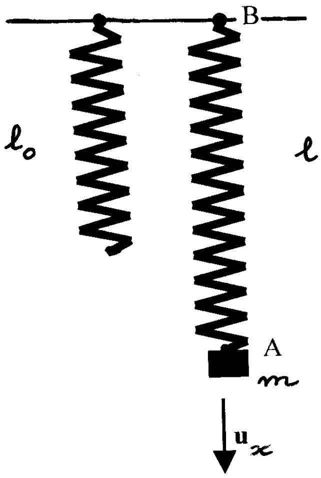
g		0		1	
$\langle P_{em} \rangle$	$-$		$+$		$+$
$\langle P_L \rangle$	$-$		$+$		$-$

générateur (fournit Pem) $\boxed{v_C > v_S}$

moteur (consomme Pem forces de Laplace motrices) $\boxed{v_C < v_S}$

frein (consomme Pem forces de Laplaces résistantes) $\boxed{v_C < 0}$ $(v_S > 0)$

Ressort



1) principe fondamental à m :

$$\boxed{m\vec{g} - k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u_z} = m\,\vec{a}}$$

en projection sur $\vec{u_x}$

$$m\,g - k\,(\ell - \ell_0) = m\frac{d^2\ell}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\ell}{dt^2} + \frac{k}{m}\,\ell = g + \frac{k}{m}\,\ell_0}$$

on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

---

2) La solution est :

$$\ell(t) = A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t) + \frac{mg}{k} + \ell_0$$

C.I. en $t=0$ $\ell = \ell_0$ et $\frac{d\ell}{dt} = v_0$

$$\left|\begin{array}{lllll} \ell_0 = A & + 0 & + \frac{mg}{k} + \ell_0 \\ v_0 = 0 & + B\,\omega_0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\ell(t) = -\frac{mg}{k}\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \frac{mg}{k} + \ell_0}$$

On peut écrire

$A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t)$ sous la forme :

$C\,\cos(\omega_0 t - \varphi)$

$= C\,\cos(\omega_0 t)\,\cos\varphi + C\,\sin(\omega_0 t)\,\sin\varphi$

d'où par identification

$$\left.\begin{array}{l} C\cos\varphi = A \\ C\sin\varphi = B \end{array}\right\} \text{ donc } C \text{ et } \varphi$$

Ici $C\cos\varphi = -\frac{mg}{k}$

$C\sin\varphi = \frac{v_0}{\omega_0} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$

On choisit C positif avec $C=\sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}+\frac{m{v_0}^2}{k}}$

et φ (cosinus négatif et sinus positif) vaut alors :

$\pi - \arctan\left(\frac{v_0\omega_0}{g}\right)$

$$\ell(t) = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}+\frac{m{v_0}^2}{k}}\ \cos\left(\omega_0 t - \pi + \arctan\left(\frac{v_0\omega_0}{g}\right)\right)+\frac{mg}{k}+\ell_0$$

$$\boxed{\ell(t) = -\sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}+\frac{m{v_0}^2}{k}}\ \cos\left(\omega_0 t + \arctan\left(\frac{v_0\omega_0}{g}\right)\right)+\frac{mg}{k}+\ell_0}$$

Le problème demande seulement l'amplitude.

Elle vaut $|C| = \sqrt{A^2+B^2}$

soit :

$$\text{amplitude} = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}+\frac{{v_0}^2}{{\omega_0}^2}}$$

$$\boxed{\text{amplitude} = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}+\frac{m{v_0}^2}{k}}}$$

---

3) Le ressort oscille <u>autour de sa position d'équilibre</u>.

C'est donc la solution particulière de l'équation différentielle :

$$\boxed{\underbrace{\ell_E}_{} = \underbrace{\ell_0}_{\text{longueur à vide}} + \underbrace{\frac{mg}{k}}_{\text{allongement dû à } mg}}$$

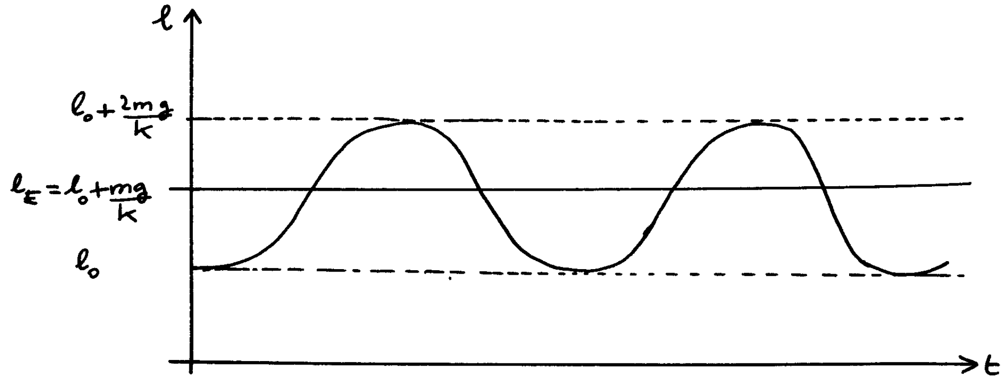
(remarque : traditionnellement, l'axe vertical est l'axe x

<u>L'origine est à la position d'équilibre</u> donc $x=\ell-\ell_E$

et l'équa diff devient

$$\frac{d^2x}{dt^2}+{\omega_0}^2x=0\ )$$

4) $v_0 = 0$ donc $\boxed{\ell = \ell_0 + \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} \cos \omega_0 t}$



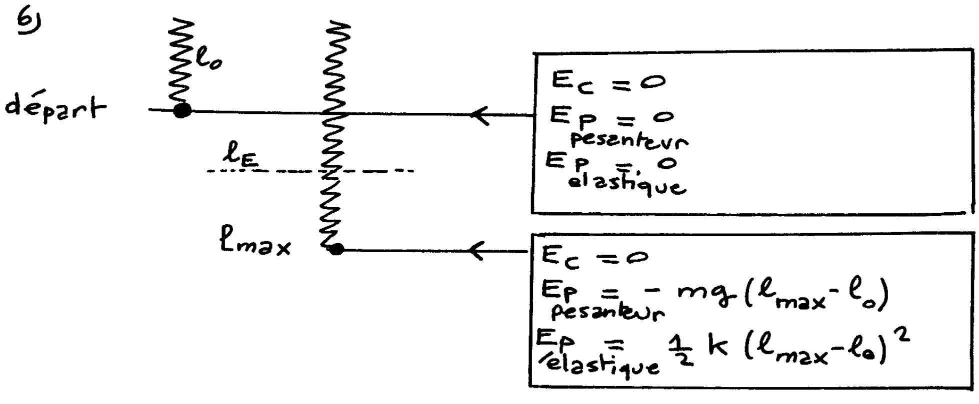
cf : le ressort part de ℓ_0
arrive à sa position d'équilibre avec de la vitesse
et poursuit encore de $\frac{mg}{k}$ avant de revenir...

---

5) $\boxed{\ell_{MAX} = \ell_0 + \frac{2mg}{k}}$

---

6)



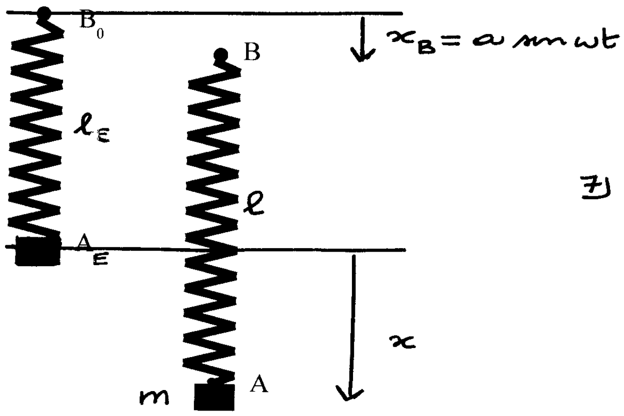
donc, en écrivant la conservation :

$$0 + 0 + 0 = 0 - mg(\ell_{max} - \ell_0) + \frac{1}{2} k (\ell_{max} - \ell_0)^2$$

d'où :

$$\ell_{MAX} - \ell_0 = \frac{2mg}{k}$$

(remarque : la forme $\frac{1}{2}kx^2$ avec $x = \ell - \ell_E$
donne l'énergie potentielle de pesanteur
+ l'énergie potentielle élastique
avec origine des énergies potentielles à la position d'équilibre)



7) $\boxed{\ell = \ell_E + x - x_B}$

8) On applique le principe fondamental à m

$$m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{on projette sur l'axe}$$

$$mg - k(\ell - \ell_0) = m\ddot{x}$$

$$mg - k(\ell_E + x - x_B - \ell_0) = m\ddot{x}$$

$$\text{or } \ell_E = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

$$-k(x - x_B) = m\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \sin \omega t}$$

9) On écrit la solution :

– pour l'équation homogène :

$$x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

– pour la solution particulière (régime forcé)

On passe en sinusoïdal

$$\ddot{\underline{x}} + \omega_0^2\,\underline{x} = \omega_0^2\,a\,(-j)\exp j\omega t$$

$$-\omega^2\underline{x} + \omega_0^2\,\underline{x} = \omega_0^2\,a\,(-j)\exp j\omega t$$

$$\underline{x} = \frac{\omega_0^2\,a}{\omega_0^2-\omega^2}\,(-j)\exp j\omega t$$

donc

$$x = \frac{\omega_0^2\,a}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t$$

(ici, en l'absence de $\dot{x}$, on pouvait ne pas passer en complexes ...)

– finalement :

$$x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2\,a}{\omega_0^2-\omega^2}\sin(\omega t)$$

C.I. en $t=0$ $x=0$ et $\dot{x}=0$

$$\begin{cases} 0 = A + 0 + 0 \\ 0 = 0 + B\omega_0 + \dfrac{\omega_0^2\,a}{\omega_0^2-\omega^2}\,\omega \end{cases}$$

$$\boxed{x = \frac{\omega_0^2\,a}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right)}$$

(si $\omega \approx \omega_0$, on obtient des battements)