CCP 2007 – filière MP

physique 1 (4 heures)

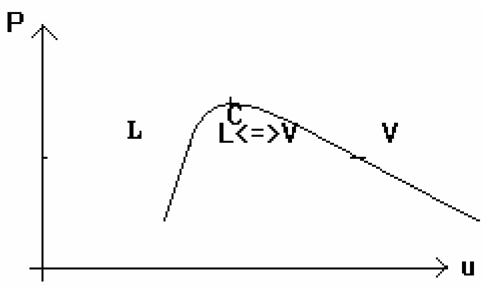
correction

THERMODYNAMIQUE :

ÉTUDE DU SYSTÈME LIQUIDE - VAPEUR

A. Diagramme de Clapeyron du système liquide – vapeur (p,v) de l'eau :

A-1



A.II cf cours

Isotherme critique : $\boxed{\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_{T=Tc,v=vc}=0\\ \left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_{T=Tc,v=vc}=0\end{array}}$

A.III

$$\frac{v_m - v_L}{v_G - v_L} = \frac{\dfrac{V_L + V_G}{m_L + m_G} - v_L}{v_G - v_L} = \frac{V_L + V_G - (m_L + m_G)v_L}{(v_G - v_L)(m_L + m_G)} = \frac{V_G - (m_G)v_L}{(v_G - v_L)(m_L + m_G)}$$

$$= \frac{V_G - m_G v_L}{(v_G - v_L)(m_L + m_G)} = \frac{m_G v_G - m_G v_L}{(v_G - v_L)(m_L + m_G)} = \frac{m_G v_G - m_G v_L}{(v_G - v_L)(m_L + m_G)} = \frac{m_G(v_G - v_L)}{(v_G - v_L)(m_L + m_G)}$$

$$= \frac{m_G}{(m_L + m_G)} = x$$

La même démonstration conduit au même résultat avec l'enthalpie : $\dfrac{h_m - h_L}{h_G - h_L} = x$

A.IV $\boxed{l_V(T) = h_G(T) - h_L(T)}$

B. Détente adiabatique réversible d'un système liquide-vapeur :

B-I En négligeant le volume du liquide, on peut écrire l'équation d'état de la vapeur, gaz parfait : $P_s V = \dfrac{m_V}{M} RT$; donc : $m_V = \dfrac{P_s VM}{RT} = 5{,}88\text{g}$

D'où : $\boxed{x = \dfrac{m_V}{m} = \dfrac{P_s VM}{mRT} = 58{,}8\%}$

B-II le système subit une détente adiabatique réversible donc isentropique ; donc :

$$c_L \ln T' + l_V(T')\frac{x'}{T'} = c_L \ln T + l_V(T)\frac{x}{T}$$

D'où : $\boxed{x' = \dfrac{T'}{l_V(T')}\left(c_L \ln\dfrac{T}{T'} + l_V(T)\dfrac{x}{T}\right) = 0{,}659}$

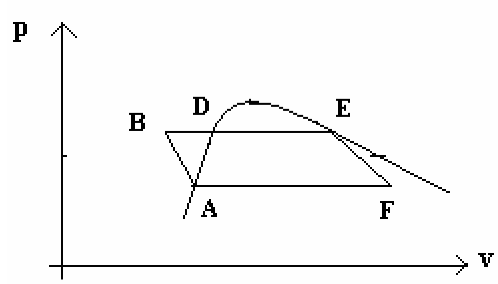
B.III pour que le titre reste constant dans la transformation précédente, il aurait fallu avoir au départ un titre x'' tel que :

$$c_L \ln T' + l_V(T')\frac{x''}{T'} = c_L \ln T + l_V(T)\frac{x''}{T}$$

D'où : $\boxed{x'' = \dfrac{c_L \ln\dfrac{T}{T'}}{\dfrac{l_V(T')}{T'} - \dfrac{l_V(T)}{T}} = 0{,}453}$

C. Modèle de fonctionnement d'une turbine à vapeur. Cycle de Rankine :

C.1



C.II dans la pompe d'alimentation, de A à B, la compression est adiabatique réversible, donc isentropique. Donc :

$$ds = c_L \frac{dT}{T} - \alpha v_L dp = 0$$

Qui s'intègre en : $c_L \ln \frac{T_1 + \Delta T}{T_1} = \alpha v_L (p_2 - p_1)$

Et, puisque $\Delta T << T_1$, donc : $\ln \frac{T_1 + \Delta T}{T_1} \approx \frac{\Delta T}{T_1}$

On obtient, avec T_1 = 35 °C : $\boxed{\Delta T = \frac{\alpha T_1 v_L (p_2 - p_1)}{c_L} = 7{,}6.10^{-2}\,K}$

C.III dans la turbine, de E à F, la détente est adiabatique réversible, donc isentropique, avec un système diphasé. Donc, en utilisant l'expression de l'entropie d'un système diphasé (début de la partie B) :

$$c_L \ln T_2 + l_V(T_2)\frac{1}{T_2} = c_L \ln T_1 + l_V(T_1)\frac{x_F}{T_1}$$

D'où : $\boxed{x_F = \frac{T_1}{l_V(T_1)}\left(c_L \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{l_V(T_2)}{T_2}\right) = \frac{T_1}{h_{G1} - h_{L1}}\left(c_L \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{h_{G2} - h_{L2}}{T_2}\right) = 0{,}66}$

Et : $\boxed{h_{mF} = (1 - x_F).h_{L1} + x_F.h_{G1} = 1740 kJ.kg^{-1}}$

C.IV dans le condenseur :

$$\boxed{Q_1 = h_{L1} - h_{mF} = h_{L1} - [(1 - x_F).h_{L1} + x_F.h_{G1}] = x_F(h_{L1} - h_{G1}) = -1593 kJ.kg^{-1}}$$

dans le générateur de vapeur : on peut décomposer, pour calculer Q = Δh, la transformation en un échauffement isobare puis une vaporisation isobare et isotherme :

pour l’échauffement isobare : $dh = Tds = T.c_L \frac{dT}{T} = c_L dT$

donc : $\Delta h' = c_L (T_2 - T_1)$

pour la vaporisation : $\Delta h'' = h_{V2} - h_{L2}$

donc : $\boxed{Q_2 = \Delta h' + \Delta h'' = c_L (T_2 - T_1) + h_{V2} - h_{L2} = 2553 kJ.kg^{-1}}$

C.V d’après le premier principe : $\boxed{W = -Q_1 - Q_2 = -960 kJ.kg^{-1}}$

C.6 $\boxed{\rho = \frac{-W}{Q_2} = 0{,}376}$

Et : $\boxed{\rho_C = 1 - \frac{T1}{T_2} = 0{,}448}$

C.VII

$$\Delta h_{AB} = \int_A^B dh = \int_A^B (Tds + vdp) = \int_A^B \left(T\left(c_L \frac{dT}{T} - \alpha v_L dp \right) + v_L dp \right) = \int_A^B \left(c_L dT + (v_L (1 - \alpha T)) dp\right)$$

Mais, puisque la variation de T est négligeable (cf question C.II) :

$$\boxed{\Delta h_{AB} \approx \int_A^B ((v_L (1 - \alpha T_1)) dp) = v_L (1 - \alpha T_1)(p_2 - p_1) = 6595 kJ.kg^{-1}}$$

C.VIII sur le cycle :

$$\Delta h_{AA} = 0 = \Delta h_{AB} + \Delta h_{BD} + \Delta h_{DE} + \Delta h_{EF} + \Delta h_{FA}$$

Or : Δh_{AB} est négligeable

$\Delta h_{BD} + \Delta h_{DE} = Q_2$

$\Delta h_{EF} = W$

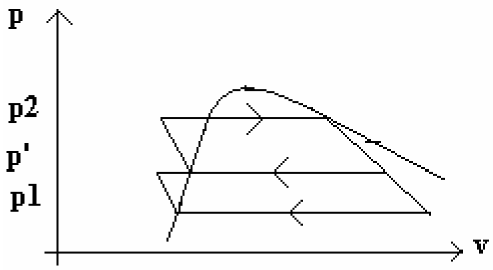
$\Delta h_{FA} = Q_1$

Donc :

$$\boxed{W = -\Delta h_{BE} - \Delta h_{FA} = -(h_E - h_B) - (h_A - h_F) = (h_F - h_E) + (h_B - h_A) \approx (h_{sortie} - h_{entrée}) + 0}$$

D. <u>Cycle de Rankine avec soutirage</u>

D.I



D.II dans le réchauffeur : $\Delta h = 0 = -m'.l_V(T') + (m-m')c_L(T'-T_1)$

Donc : $$\boxed{m' = \frac{mc_L(T'-T_1)}{c_L(T'-T_1)+l_V(T')} = \frac{1}{1+\dfrac{l_V(T')}{mc_L(T'-T_1)}} = 0{,}239\text{kg}}$$

D.III

D.III.1 le calcul est le même qu'à la question C.III :

$$\boxed{x'_1 = \frac{T'}{l_V(T')}\left(c_L.\ln\frac{T_2}{T'}+\frac{l_V(T_2)}{T_2}\right) = \frac{T'}{h'_G-h'_L}\left(c_L.\ln\frac{T_2}{T'}+\frac{h_{G2}-h_{L2}}{T_2}\right) = 0{,}809}$$

puis : $$\boxed{h'_1 = (1-x'_1).h'_L + x'_1.h'_G = 2397\text{kJ.kg}^{-1}}$$

D.III.2 de même :

$$\boxed{x_2 = \frac{T_2}{l_V(T_1)}\left(c_L.\ln\frac{T'}{T_1}+\frac{l_V(T')}{T'}\right) = \frac{T_1}{h_{G1}-h_{L1}}\left(c_L.\ln\frac{T'}{T_1}+\frac{h'_G-h'_L}{T'}\right) = 0{,}767}$$

puis : $$\boxed{H_2 = (m-m')((1-x_2).h_{L1} + x_2.h_{G1}) = 381\text{kJ.kg}^{-1}}$$

D.IV avec des notations évidentes, si on néglige, selon la même idée qu'à la question C.VIII :

$$\boxed{W_s = W_1 + W_2 = (h'_1 - h_{G2}) + (H_2 - (m-m')h'_1) = -1814\text{kJ.kg}^{-1}}$$

De plus : $Q_{reçue} = G_{générateur-vapeur} = Q_2$ calculé à la question C.IV

D.V alors : $\boxed{\rho_s = \frac{-W}{Q_2} = 0{,}71}$

Le rendement du cycle de Rankine avec soutirage st supérieur à celui du cycle de Rankine sans soutirage car on récupère un travail plus grand pour une même quantité de chaleur fournie

MÉCANIQUE

I. Préliminaire :

1. avec des notations classiques :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{L}_R(O)}{dt}\right)_R = \vec{\Gamma}(O)}$$

2. a) $\boxed{\vec{F}_{i,ent/R} = -m\vec{a}(A)_R}$

b) R' étant en translation par rapport à R, il n'y a pas lieu de considérer de forces d'inertie de Coriolis ; donc :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{R'}(O')}{dt}\right)_{R'} = \vec{\Gamma}(O') + \vec{\Gamma}_{i,ent(R'/R)}(O') = \vec{\Gamma}(O') + \iiint \overrightarrow{O'M} \wedge \left(-dm(M)\vec{a}_{ent(R'/R)}(M)\right)$$

$$= \vec{\Gamma}(O') + \iiint \overrightarrow{O'M} \wedge \left(-dm(M)\vec{a}_R(A)\right) = \vec{\Gamma}(O') - \iiint \overrightarrow{O'M}dm(M) \wedge \vec{a}_R(A)$$

$$= \vec{\Gamma}(O') + m\overrightarrow{O'G} \wedge \left(-\vec{a}_R(A)\right) = \vec{\Gamma}(O') + \overrightarrow{O'G} \wedge \vec{F}_{i,ent(R'/R)}$$

c) si R' = R* et si on choisit : O' = G, alors le terme $+\overrightarrow{O'G} \wedge \vec{F}_{i,ent(R'/R)}$ est nul et on obtient le résultat connu : $\boxed{\left(\frac{d\vec{L}_{R'}(G)}{dt}\right)_{R^*} = \vec{\Gamma}(O')}$

II. Oscillations de la benne :

1. a)théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ :

$$J_\Delta.\ddot{\theta} = -(m_B + m_T)ga\sin\theta$$

Pour de petites oscillations : $\boxed{J_\Delta.\ddot{\theta} + (m_B + m_T)ga\theta = 0}$

Pulsation des oscillations : $\omega = \dfrac{2\pi}{T_i} = \sqrt{\dfrac{(m_B + m_T)ga}{J_\Delta}}$

Donc : $\boxed{J_\Delta = \dfrac{(m_B + m_T)gaT_i^2}{4\pi^2} = 5{,}44.10^4\ \text{kg.m}^2}$

b) $J_\Delta = J_{T\Delta} + J_{B\Delta} = \dfrac{m_T L^2}{3} + J_{B\Delta}$

donc : $\boxed{J_{B\Delta} = J_\Delta - \dfrac{m_T L^2}{3} = 5{,}35.10^4\ \text{kg.m}^2}$

2. a) théorème du moment cinétique appliqué à la roue 1 dans son référentiel barycentrique, en projection sur l'axe de rotation : $J_{R1}\dfrac{d\omega_1}{dt} = \left(\overrightarrow{C_1I_1} \wedge \vec{T}_1\right)\vec{e}_y = r.T_1$, où : $J_{R1} = \dfrac{1}{2}m_r r^2$

de plus, on écrit la condition de roulement sans glissement de la roue sur le câble :

$$\vec{v}_{g(\text{roue1/câble})} = \vec{0} = \vec{v}(I_{1\text{roue1}}) - \vec{0} = \vec{v}(C_1) + \omega_1\vec{e}_y \wedge r\vec{e}_z = \left(\dot{x} + r\omega_1\right)\vec{e}_x$$

Donc : $\boxed{\dfrac{d\omega_1}{dt} = -\dfrac{1}{r}\ddot{x}}$

Alors, par report dans le théorème du moment cinétique : $J_{R1}\left(-\dfrac{1}{r}\ddot{x}\right) = r.T_1$, c'est-à-dire, puisque : $J_{R1} = \dfrac{1}{2}m_r r^2$: $\boxed{T_1 = -\dfrac{1}{2}m_r\ddot{x}}$

Avec la roue 2, on obtient de même : $\boxed{T_2 = -\dfrac{1}{2}m_r\ddot{x}}$

Donc : $\boxed{T_1 = T_2}$

b) G' est le barycentre de C affecté de la masse m_C et de G affecté de la masse (m_T+m_B) ; donc :

$$M\vec{a}(G') = m_C\vec{a}(C) + (m_T + m_B)\vec{a}(G)$$

Où : $\vec{a}(C) = \ddot{x}\,\vec{e}_x$

Et : $\vec{v}(G) = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{\theta}\,\vec{e}_y \wedge a\vec{e}_r = \dot{x}\,\vec{e}_x + a\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

Donc : $\vec{a}(G) = \ddot{x}\,\vec{e}_x + a\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - a\,\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r$

Donc, par report : $M\vec{a}(G') = m_C \ddot{x}\,\vec{e}_x + (m_T + m_B)\left(\ddot{x}\,\vec{e}_x + a\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - a\,\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r\right)$

C'est-à-dire : $\boxed{\vec{a}(G') = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \left[\left(-\frac{m_T + m_B}{M}\right)a\,\dot{\theta}^2\right]\vec{e}_r + \left[\frac{m_T + m_B}{M}\,a\,\ddot{\theta}\right]\vec{e}_\theta}$

On en déduit : $\boxed{\begin{array}{l} A_1 = \left(-\frac{m_T + m_B}{M}\right)a\,\dot{\theta}^2 \\ A_2 = \frac{m_T + m_B}{M}\,a\,\ddot{\theta} \end{array}}$

c) théorème de la résultante cinétique pour l'ensemble (Ch),(T),(B) dans R :

$$M\vec{g} + T_0\vec{e}_x = M\vec{a}(G)$$

En projection sur Ox :

$$T_0 = M\left(\ddot{x} + A_1(\vec{e}_r.\vec{e}_x) + A_2(\vec{e}_\theta.\vec{e}_x)\right) = M\left(\ddot{x} + A_1\sin\theta + A_2\cos\theta\right)$$

Donc : $\boxed{T_0 = M\left(\ddot{x} + A_1\sin\theta + A_2\cos\theta\right)}$ (1)

d) par report dans (1) des expressions de A_1 et A_2 obtenues à la question b), on obtient :

$$T_0 = M\ddot{x} - (m_T + m_B)a\,\dot{\theta}^2\sin\theta + (m_T + m_B)a\,\ddot{\theta}\cos\theta$$

Donc, en négligeant les termes d'ordre 2 : $\boxed{T_0 = M\ddot{x} + (m_T + m_B)a\,\ddot{\theta}}$ (2)

Qui s'identifie à l'équation proposée par le texte, avec : $K_1 = M$

e) théorème du moment cinétique, pour l'ensemble (T), (B), en C, dans R' :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{R'}(C)}{dt}\right)_{R'} = a(m_T + m_B)\vec{e}_r \wedge \vec{g} - \overrightarrow{CG} \wedge \left(-m\vec{a}_R(C)\right)$$

Donc, en développant et en projetant sur Oy :

$$\boxed{J_\Delta\,\ddot{\theta} = (m_T + m_B)a\left(-g\sin\theta - \ddot{x}\cos\theta\right)}$$

Donc, au deuxième ordre près : $\ddot{\theta} = \frac{(m_T + m_B)a}{J_\Delta}\left(-g\theta - \ddot{x}\right)$

C'est-à-dire : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{(m_T + m_B)a}{J_\Delta}\left(g\theta + \ddot{x}\right) = 0}$ (3)

L'équation (3) se met bien sous la forme proposée par le texte, avec : $\boxed{K_2 = \dfrac{(m_T + m_B)a}{J_\Delta}}$

f) éliminons $\ddot{x}$ entre les équation (2) et (3) : on obtient alors :

$$T_0 = M\ddot{x} + (m_T + m_B)a\ddot{\theta} = M\left(-\frac{1}{K_2}\ddot{\theta} - g\theta\right) + (m_T + m_B)a\ddot{\theta}$$

D'où enfin : $\boxed{\left(\dfrac{M}{K_2} - (m_T + m_B)a\right)\ddot{\theta} + Mg\theta = -T_0}$ (4)

On lit sur cette dernière équation la période des oscillations : $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\dfrac{M}{K_2} - (m_T + m_B)a}{Mg}} = 2{,}13\text{s}}$ (valeur plausible)

g) on résout ici l'équation (4), pour t > 0, avec la valeur indiquée pour T_0 :

(4) peut se réécrire : $$\ddot{\theta} + \frac{Mg}{\left(\dfrac{M}{K_2} - (m_T + m_B)a\right)}\theta = -\frac{T_0}{\left(\dfrac{M}{K_2} - (m_T + m_B)a\right)}$$

Ou encore : $$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = -\frac{T_0}{\left(\dfrac{M}{K_2} - (m_T + m_B)a\right)}} \quad (4')$$

Dont la solution est : $\theta = \alpha\cos(\omega t + \beta) - \dfrac{T_0}{Mg}$

Or, à t = 0 :

$$\theta(t = 0) = 0 = \alpha\cos\beta - \frac{T_0}{Mg}$$

$$\dot{\theta}(t = 0) = 0 = -\alpha\sin\beta$$

Donc : $\boxed{\theta = \dfrac{T_0}{Mg}\cos\omega t}$

L'amplitude des oscillations est donc : $\boxed{\dfrac{T_0}{Mg} = \dfrac{K_1\gamma_0}{Mg} = \dfrac{M\gamma_0}{Mg} = \dfrac{\gamma_0}{g} = 8{,}16.10^{-2}\,\text{rad} = 4{,}68°}$

3. Condition de non glissement :

a) moment cinétique de l'ensemble par rapport à l'axe Δ :

$$L_\Delta = \vec{L}_R(C).\vec{e}_y = \vec{L}_R(C)_{roue1}.\vec{e}_y + \vec{L}_R(C)_{roue2}.\vec{e}_y + \vec{L}_R(C)_{ch}.\vec{e}_y$$
$$= \left(\vec{L}_R(C)_{roue1} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{C_1C}\right)\vec{e}_y + \left(\vec{L}_R(C)_{roue2} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{C_2C}\right)\vec{e}_y + 0 \text{ si}$$
$$= J\omega_1 + J\omega_2 + 0 = J(\omega_1 + \omega_2)$$

b) théorème du moment cinétique pour l'ensemble du chariot par rapport à l'axe Δ :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = J\left(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2\right) = \left[\overrightarrow{CI_1} \wedge \left(\vec{T}_1 + \vec{N}_1\right) + \overrightarrow{CI_2} \wedge \left(\vec{T}_2 + \vec{N}_2\right)\right]\vec{e}_y$$
$$= \left[\left(-\frac{d}{2}\vec{e}_x + r\vec{e}_z\right) \wedge \left(T_1\vec{e}_x + N_1\vec{e}_z\right) + \left(+\frac{d}{2}\vec{e}_x + r\vec{e}_z\right) \wedge \left(T_2\vec{e}_x + N_2\vec{e}_z\right)\right].\vec{e}_y$$
$$= \frac{d}{2}N_1 + rT_1 - \frac{d}{2}N_2 + rT_2$$

Donc, finalement, en tenant compte du non glissement ($\omega_1 = \omega_2$) :

$$\boxed{\frac{d}{2}N_1 + rT_1 - \frac{d}{2}N_2 + rT_2 = 2J\dot{\omega}} \qquad (\alpha)$$

c) théorème de la résultante cinétique pour l'ensemble chariot-bras-benne, en projection sur Oz :

$$\boxed{N_1 + N_2 = Mg} \qquad (\beta)$$

d) il y a non glissement si, et seulement si : $T_i < N_i.f$ (i = 1,2)

or la symétrie du problème entre 1 et 2 entraîne que : $\begin{matrix} N_1 = N_2 \\ T_1 = T_2 \end{matrix}$

l'élimination de N ($=N_1=N_2$) et T ($=T_1=T_2$) entre les équations (α) et (β) conduit à :

$$\boxed{\begin{matrix} T = -\left(\dfrac{2J\gamma_0}{r^2}\right) \\ N = \dfrac{Mg}{2} \end{matrix}}$$

La condition de non glissement devient alors : $\boxed{\dfrac{4J\gamma_0}{Mgr^2} < f}$

Application numérique : $f_{min} = 2,61.10^{-3}$

Le coefficient de frottement f est donc largement supérieur à la valeur minimale f_{min} qu'il doit avoir pour qu'il n'y ait glissement ; donc il n'y a pas glissement

III Oscillations du câble porteur :

1. si Δl est l'allongement du ressort à l'équilibre, on a immédiatement : $mg = k\Delta l$

   donc : $k = \dfrac{mg}{\Delta l} = 1{,}96.10^3\ N.m^{-1}$

2. a) accélération de G' dans (R) :

$$\overrightarrow{O'G'} = \frac{1}{M}\left(m_C\overrightarrow{O'C} + (m_T + m_B)a\vec{e}_r\right)$$

Donc : $\overrightarrow{\vec{v}_R(G')} = \dfrac{1}{M}\left(m_C\dot{z}\vec{e}_z + (m_T + m_B)a\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)$

Et : $\boxed{\overrightarrow{a_R(G')} = \dfrac{1}{M}\left(m_C\ddot{z}\vec{e}_z - (m_T + m_B)a\dot{\theta}^2\vec{e}_r + (m_T + m_B)a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta\right)}$

b) théorème de la résultante cinétique pour l'ensemble (Ch), (T) et (B) :

$$-k(z - l_0)\vec{e}_z + M\vec{g} = M\vec{a}_R(G')$$

Donc, compte tenu de l'expression trouvée ci-dessus pour $\overrightarrow{a_R(G')}$:

$$\boxed{-k(z - l_0)\vec{e}_z + M\vec{g} = m_C\ddot{z}\vec{e}_z - (m_T + m_B)a\dot{\theta}^2\vec{e}_r + (m_T + m_B)a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta} \quad (E)$$

c) lorsque la benne n'oscille pas : $\theta = 0$ à tout instant et $z = z_e$, : alors, (E) devient :

$$-k(z_e - l_0)\vec{e}_z + M\vec{g} = \vec{0}$$

Donc : $\boxed{z_e = l_0 + \dfrac{Mg}{k}}$

d) en projection sur Oz, on obtient pour (E) :

hors équilibre :

$$-k(z - l_0) + Mg = m_C\ddot{z}\vec{e}_z - (m_T + m_B)a\dot{\theta}^2\cos\theta - (m_T + m_B)a\ddot{\theta}\sin\theta$$

A l'équilibre : $-k(z_e - l_0) + Mg = 0$

Par différence et en posant : $Z = z - z_e$, on obtient :

$$\boxed{-kZ = m_C\ddot{Z} - (m_T + m_B)a\dot{\theta}^2\cos\theta - (m_T + m_B)a\ddot{\theta}\sin\theta} \quad (E')$$

e) L'équation (E') se réécrit :

$$m_C \ddot{Z} + kZ = (m_T + m_B)a\left[\dot{\theta}^2 \cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right]$$

c'est-à-dire, lorsque θ est petit :

$$\ddot{Z} + \frac{k}{m_C} Z \approx \frac{m_T + m_B}{m_C} a\left[\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\,\theta\right]$$

Et, puisque : $\theta = \theta_0 \cos\omega t$:

$$\ddot{Z} + \frac{k}{m_C} Z \approx \frac{m_T + m_B}{m_C} a\theta_0^2\omega^2\left[\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t\right] \qquad (E'')$$

Donc, si on pose : $A = \dfrac{m_T + m_B}{m_C} a\theta_0^2\omega^2$

(E'') devient : $\boxed{\ddot{Z} + \dfrac{k}{m_C} Z \approx -2A\cos 2\omega t}$

Alors, si on passe en complexes, par exemple, on obtient immédiatement la solution générale de (E'') :

$$\boxed{Z(t) = \frac{A}{\dfrac{k}{m_c} - 4\omega^2}\cos 2\omega t = \frac{\dfrac{m_T + m_B}{m_C} a\theta_0^2\omega^2}{4\omega^2 - \dfrac{k}{m_c}}\cos 2\omega t = \frac{(m_T + m_B)a\theta_0^2\omega^2}{4\omega^2 m_c - k}\cos 2\omega t}$$

numériquement : $Z(t) = 1{,}27.10^{-2} \cos 2\omega t$