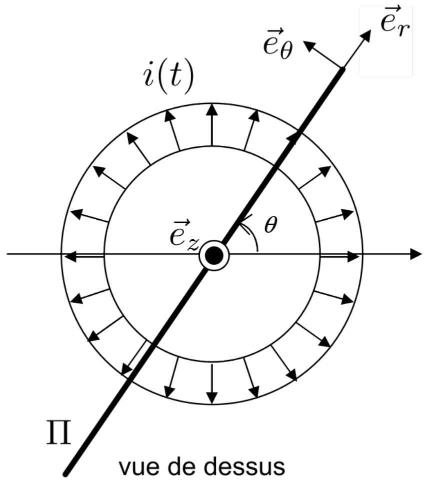
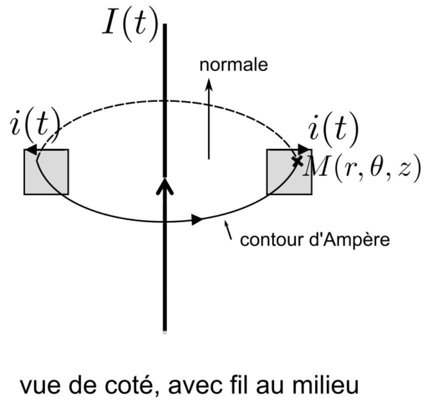
Partie V : Électromagnétisme
Chapitre 2

Correction – DM 17 – Pince ampèremétrique

D'après CCP 2014.





1 - a - On considère un point M. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$, noté Π sur le schéma ci-dessus, est un plan de symétrie de la distribution de courants.

Conséquence : le champ $\vec{B}$ au point M est orthogonal à ce plan. Il est donc selon $\vec{e}_\theta$.

On a donc $\boxed{\vec{B} = B_\theta(r,\theta,z,t)\vec{e}_\theta}$ (en régime variable il y a également la dépendance en t).

b - La distribution de courants est invariante par rotation autour de l'axe z (d'angle θ). Les composantes de $\vec{B}$ ne dépendent donc pas de la coordonnée θ.

On a donc $\boxed{\vec{B} = B_\theta(r,z,t)\vec{e}_\theta}$.

c - On va utiliser le théorème d'Ampère.

⋆ On considère un point M de coordonnées (r,θ,z), qui est à l'intérieur des spires.

⋆ Le contour choisi est un cercle dont le centre est sur l'axe z, perpendiculaire à l'axe z, et passant par le point M (donc de rayon r).

On oriente ce contour pour que sa normale soit orientée selon $+\vec{e}_z$. D'après la règle de la main droite, il faut donc procéder comme sur la figure. On a alors $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}l\,\vec{e}_\theta$. D'où :

$$\oint_\mathcal{C} \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} \;=\; \oint_\mathcal{C} B_\theta(r,z,t)\vec{e}_\theta\cdot\mathrm{d}l\,\vec{e}_\theta \;=\; B_\theta(r,z,t)\oint_\mathcal{C}\mathrm{d}l \;=\; B_\theta(r,z,t)\times 2\pi r.$$

⋆ On exprime ensuite le courant enlacé : $I_{\text{enlacé}} = I(t) + Ni(t)$ car dans le contour passent le fil du centre (courant $I(t)$), et chacune des N spires (courant $i(t)$ par spire).

⋆ On applique le théorème d'Ampère : $\oint_\mathcal{C} \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} \;=\; \mu_0 I_{\text{enlacé}}$, ce qui donne, après avoir isolé B_θ :

$$B_\theta(r,z,t) = \frac{\mu_0(I(t)+Ni(t))}{2\pi r}, \qquad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0(I(t)+Ni(t))}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta.}$$

2 - a - Il s'agit du phénomène d'induction : la présence d'un courant $I(t)$ variable dans le fil central crée un champ magnétique variable, dont le flux à travers les spires varie, ce qui crée une fem induite et donc un courant dans les spires.

b - Elle est orientée selon $+\vec{e}_\theta$.

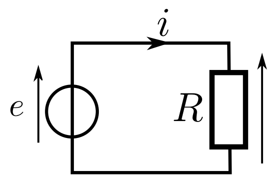
c -

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint\limits_{\text{S une spire}} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \\
&= \int_{r=2a}^{3a} \int_{z=-a/2}^{a/2} \frac{\mu_0 (I(t) + Ni(t))}{2\pi r} \, \vec{e}_\theta \cdot \mathrm{d}S \vec{e}_\theta \\
&= \int_{r=2a}^{3a} \int_{z=-a/2}^{a/2} \frac{\mu_0 (I(t) + Ni(t))}{2\pi r} \, \mathrm{d}S \\
&= \int_{r=2a}^{3a} \int_{z=-a/2}^{a/2} \frac{\mu_0 (I(t) + Ni(t))}{2\pi r} \, \mathrm{d}r \mathrm{d}z \\
&= \frac{\mu_0 (I(t) + Ni(t))}{2\pi} \int_{r=2a}^{3a} \frac{\mathrm{d}r}{r} \int_{z=-a/2}^{a/2} \mathrm{d}z \\
&= \frac{\mu_0 (I(t) + Ni(t))}{2\pi} \times \ln \frac{3a}{2a} \times a \\
&\boxed{\Phi = \frac{\mu_0 (I + Ni)}{2\pi} \, a \, \ln \frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

d - On vient de donner l'expression du flux du champ magnétique à travers une spire. Or la pince comporte N spires. Le flux Φ_{tot} à travers tout le bobinage de la pince ampèremétrique est donc

$$\boxed{\Phi_{\text{tot}} = \frac{\mu_0 N (I + Ni)}{2\pi} \, a \, \ln \frac{3}{2}}.$$

e - La fem induite est en convention générateur, et sa valeur est donnée par la loi de Faraday :



$$\boxed{e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 N a}{2\pi} \left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + N \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \right) \ln \frac{3}{2}}.$$

f - On écrit l'équation électrique du circuit à l'aide d'une loi des mailles :
on a $e = Ri$, soit $-\dfrac{\mu_0 N a}{2\pi} \left(\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + N \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \right) \ln \dfrac{3}{2} = Ri$.
Après réarrangements on a :

$$\boxed{N \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{2\pi R}{\mu_0 N a \ln \frac{3}{2}} \, i(t) = -\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}.$$

g - Si on néglige le terme en $i(t)$ dans l'équation précédente, il reste $N \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$.

En intégrant et en ne tenant pas compte des constantes d'intégration, on a alors $\boxed{i(t) = -\dfrac{I(t)}{N}}$.

On voit donc, finalement, que la mesure de $i(t)$ par l'ampèremètre de la pince permet de remonter facilement au courant $I(t)$.

Remarque : On constate que prendre un nombre N élevé de spires réduit le courant $i(t)$ dans la pince. Mais l'avantage d'un N élevé est de réduire le facteur devant $i(t)$ dans l'équation différentielle, et donc d'augmenter la gamme de fréquences dans laquelle la pince fonctionne selon l'équation simple $i = -I/N$.

3 - Non, car si I ne dépend pas du temps, alors le champ magnétique ne dépend pas du temps non plus, et donc la fem induite est nulle ($e = -\mathrm{d}\Phi_{\text{tot}}/\mathrm{d}t = 0$). On voit donc sur le schéma électrique que le courant $i(t)$ est donc nul.

(Cela ne se voit pas sur le résultat de la question précédente car on a négligé un terme dans l'équation différentielle, ce qui n'est possible qu'à assez hautes fréquences, et donc pas si $I(t)$ est constant.)