

Correction – TD – Formulation de l'électromagnétisme : équations de Maxwell

I Vrai-faux / questions courtes

★ | [●○]

1 - Boule chargée et divergence :

a - On sait que le champ électrique en dehors de la boule est donné par $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$, avec \vec{e}_r le vecteur des coordonnées sphériques.

Les lignes de champs sont donc radiales. Elles partent de la boule si $\rho > 0$, et elles vont vers la boule si $\rho < 0$.

b - Ce sens est compatible avec l'équation de Maxwell-Gauss : par exemple si $\rho > 0$, alors $\text{div } \rho = \rho/\epsilon_0 > 0$, donc les lignes de champs sortent d'un petit volume entourant la charge.

2 - a - Faux.

Par exemple en électrostatique on peut considérer une charge ponctuelle q . On a alors $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ dans tout l'espace. Donc \vec{E} est non nul, alors même que $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0 = 0$ partout (sauf au point où est la charge).

En magnétostatique on a toujours $\text{div } \vec{B} = 0$, et pourtant il y a de nombreuses situations où $\vec{B} \neq 0$ (heureusement!).

b - Faux.

En électrostatique on a toujours $\text{rot } \vec{E} = 0$, et pourtant il y a de nombreuses situations où $\vec{E} \neq 0$ (heureusement!).

En magnétostatique on peut considérer un fil rectiligne infini parcouru par un courant I . On a alors $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$ dans tout l'espace. Donc \vec{B} est non nul, alors même que $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$ partout (sauf en un point du fil).

II Calcul de ρ connaissant \vec{E}

★ | [●○]

1 - On utilise l'équation de Maxwell-Gauss, mais pour exprimer ρ puisque l'on connaît \vec{E} : $\rho = \epsilon_0 \text{div } \vec{E}$

Ici on a $\vec{E} = E_x(x)\vec{e}_x$, donc $\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x}$.

Ainsi pour $x > a$ et $x < -a$, on a $\text{div } \vec{E} = 0$, et donc $\rho = 0$.

Pour $-a \leq x \leq a$, on a $\text{div } \vec{E} = \frac{E_0}{a}$, donc $\rho = \frac{\epsilon_0 E_0}{a}$.

III Existence du potentiel électrostatique

[●●○]

IV Conservation de la charge déduite des équations de Maxwell [●○○]

1 - Équation locale de conservation de la charge : $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x,y,z} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$.

2 -

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && \text{(Maxwell-Gauss)} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \mu_0 \vec{j} \right) &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} && \text{(Maxwell-Ampère)} \\ \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{B}) - \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \vec{j} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ 0 - \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \vec{j} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} && \text{car } \forall \vec{A}, \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{A}) = 0 \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}.$$

V Équation de Poisson

★ | [●○○]

1 - a est en mètres.

2 - La situation est stationnaire, on a donc l'équation de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$.

On a donc $\rho = -\epsilon_0 \Delta V$, et il faut calculer le laplacien de V .

En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \Delta V &= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{y,z} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_{x,z} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_{x,y} \\ &= \frac{V_0}{a^2} (2 + 2 - 4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc $\rho = 0$.

3 - On place une particule de charge positive en O . On s'intéresse à la force qu'elle subit et à la stabilité de cette position.

a - Sur l'axe Ox : $V = V(x, 0, 0) = \frac{V_0}{a^2} x^2$, soit une parabole avec un minimum en 0.

Sur l'axe Oy : $V = V(0, y, 0) = \frac{V_0}{a^2} y^2$, soit une parabole avec un minimum en 0.

Sur l'axe Oz : $V = V(0, 0, z) = -\frac{2V_0}{a^2} z^2$, soit une parabole avec un maximum en 0.

b - $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = \frac{V_0}{a^2} 2x \vec{e}_x + \frac{V_0}{a^2} 2y \vec{e}_y - \frac{V_0}{a^2} 4z \vec{e}_z$,

donc en O on a $x = y = z = 0$ et ainsi $\vec{E}(O) = \vec{0}$.

c - La particule placée en O est soumise à une force $q\vec{E} = \vec{0}$, la position O est donc une position d'équilibre.

Pour savoir si elle est stable ou non, il faut regarder l'allure de l'énergie potentielle de la charge, qui est qV .

Si $q > 0$, la concavité de V regardé selon l'axe z montre que la position d'équilibre est instable.

VI Équation de Laplace, cage de Faraday

[● ○ ○]

- 1 - La situation est statique et il n'y a pas de charges dans le volume : on peut utiliser l'équation de Laplace pour le potentiel, $\Delta V = 0$.
 $V = V_0$ satisfait bien $\Delta V = 0$ (car V est constant, donc ces dérivées sont nulles), et satisfait également les conditions aux limites.
- 2 - Non, cette solution ne dépend pas de la valeur et de la distribution du champ électrique en dehors du volume.
- 3 - Lorsque l'on place un système sensible (comme les composants d'un ordinateur) dans une cage de Faraday, ceux-ci sont protégés des perturbations électromagnétiques extérieures. Ceci car la valeur du potentiel dans la cage ne dépend pas de ce qu'il se passe en dehors de la cage.