

TP T1 : CONDUCTION THERMIQUE : ETUDE DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS DES BARRES METALLIQUES – DETERMINATION D'UNE CONDUCTIVITE THERMIQUE

Capacités exigibles : Mettre en œuvre un dispositif de mesure de conductivité thermique, le protocole étant donné.

Le but de ce TP est de déterminer expérimentalement la conductivité thermique du cuivre. Pour cela, on opérera de la manière suivante :

- On s'intéressera tout d'abord à la propagation de la chaleur en régime transitoire dans une barre de cuivre, en négligeant les pertes thermiques latérales. Grâce à cette première approche, on déterminera une valeur approximative de la conductivité thermique du cuivre.
- On s'intéressera ensuite à l'étude de la barre de cuivre en régime permanent. On montrera l'existence de pertes thermiques latérales.
- On s'intéressera ensuite à l'étude d'une barre d'acier en régime permanent. On évaluera alors quantitativement les pertes thermiques latérales.
- On s'intéressera enfin à nouveau à la propagation de la chaleur en régime transitoire dans la barre de cuivre, mais cette fois sans négliger les pertes thermiques latérales. Grâce à ce modèle plus fin, on déterminera avec une meilleure précision la conductivité thermique du cuivre.

I) Présentation de l'expérience :

1) Description de l'expérience :

On considère deux barres métalliques cylindriques, l'une en cuivre, l'autre en acier. Ces deux barres sont entourées latéralement par un isolant thermique. On donne :

| Matériau | Conductivité thermique λ (W.m ⁻¹ .K ⁻¹) |
|----------|--|
| Cuivre | 389 |
| Acier | 54 |
| Isolant | 0,038 |

Le rayon des barres est **R = 0,011 m**.

Dans chacune de ces barres sont implantés, à intervalle régulier de 120 mm, 8 capteurs de température appelés C0, C1, ... , C7.

La distance entre le capteur C0 et l'extrémité droite de la barre est **L = 0,846 m**.

A l'extrémité gauche de chaque barre, un crayon chauffant permet la montée en température de celle-ci. On va chauffer et maintenir cette extrémité à 70 °C.

On relève régulièrement la température au niveau des différents capteurs.

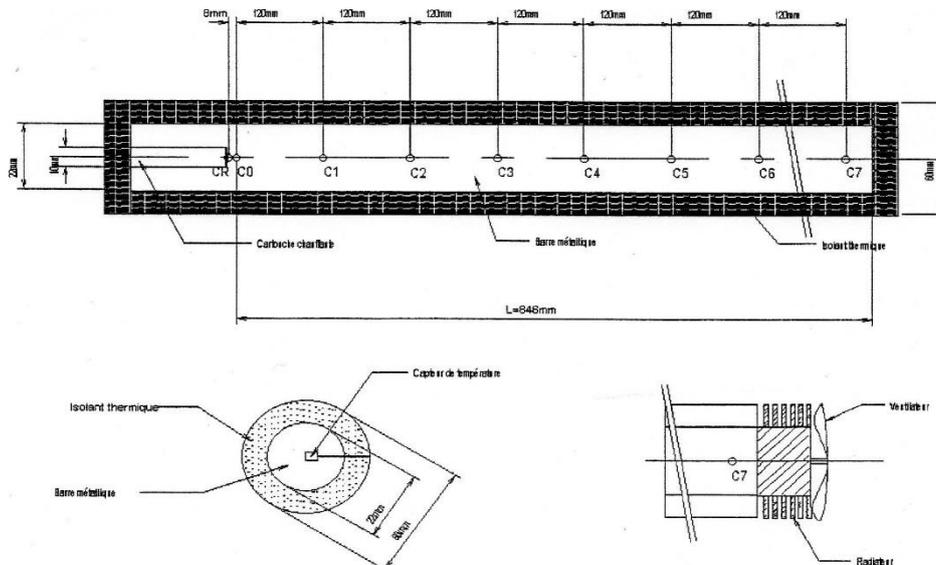
A l'extrémité droite :

- de la barre de cuivre : la barre est couplée thermiquement à l'extérieur grâce à un échangeur constitué d'un radiateur à ailettes et d'un ventilateur extracteur de chaleur. Ceci permet de maintenir constante la température à cette extrémité (température proche de la température ambiante). Le couplage thermique réalisé par cet échangeur est évalué par le **coefficient de transfert conducto-convectif h'** . D'après la loi de Newton :

$$\Phi(x=L) = h' \pi R^2 [T_c(x=L) - T_{c_\infty}]$$

où T_{c_∞} est la température de l'air extérieur (température ambiante).

- de la barre d'acier : un isolant est placé au bout de la barre. L'extrémité droite est donc isolée de l'extérieur.



2) Résultats expérimentaux :

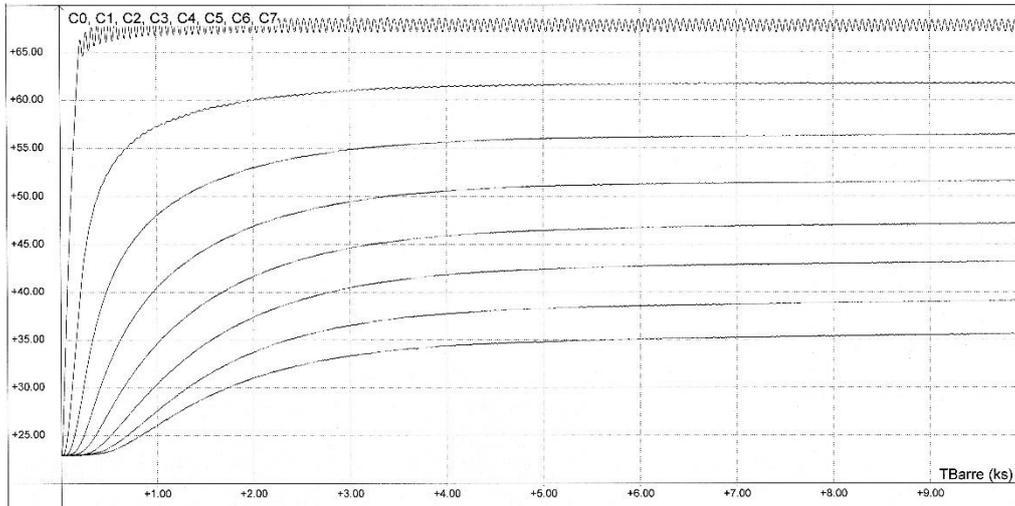
Le logiciel utilisé (Synchronie) a permis d'imprimer les courbes représentant les températures des huit capteurs (C0 à C7) en fonction du temps. Il a également permis de relever les tableaux de valeurs correspondant à chaque acquisition.

Pour atteindre le régime permanent, il faut attendre un temps suffisamment long. Les enregistrements réalisés ont été effectués sur une durée de 10000 s (2 h 47 min), ce qui est la durée maximale possible d'acquisition avec le matériel dont nous disposons au laboratoire. La phase d'acquisition étant donc trop longue pour être réalisée pendant les 2h de TP, je vous fournis les résultats suivants :

Barre de cuivre :

Le jour où cette manipulation a été réalisée, la température ambiante était : $T_{c\infty} = 23,0 \text{ }^\circ\text{C}$.

Relevé de la température (en $^\circ\text{C}$) en fonction du temps pour les différents capteurs :



Relevé numérique de la température (en $^\circ\text{C}$) en fonction du temps pour quelques capteurs :

| Capteur C2 | Capteur C3 | Capteur C4 | Capteur C5 | Capteur C6 | Temps (s) |
|------------|------------|------------|------------|------------|-----------|
| 23,8 | 23,1 | 23,0 | 23,0 | 23,0 | 100 |
| 28,2 | 24,2 | 23,2 | 23,0 | 23,0 | 200 |
| 33,8 | 26,9 | 24,2 | 23,2 | 23,1 | 300 |
| 37,8 | 29,9 | 25,8 | 24,0 | 23,3 | 400 |
| 40,7 | 32,5 | 27,5 | 24,9 | 23,8 | 500 |
| 42,9 | 34,6 | 29,3 | 25,9 | 24,4 | 600 |
| 44,7 | 36,5 | 30,8 | 27,1 | 25,1 | 700 |
| 46,0 | 38,1 | 32,2 | 28,3 | 25,9 | 800 |
| 47,1 | 39,3 | 33,5 | 29,4 | 26,7 | 900 |
| 48,1 | 40,5 | 34,6 | 30,3 | 27,5 | 1000 |
| 48,8 | 41,5 | 35,6 | 31,3 | 28,4 | 1100 |
| 49,5 | 42,4 | 36,5 | 32,2 | 29,2 | 1200 |
| 50,2 | 43,1 | 37,4 | 33,1 | 29,9 | 1300 |
| 50,8 | 43,9 | 38,3 | 33,9 | 30,5 | 1400 |
| 51,1 | 44,5 | 38,9 | 34,5 | 31,1 | 1500 |

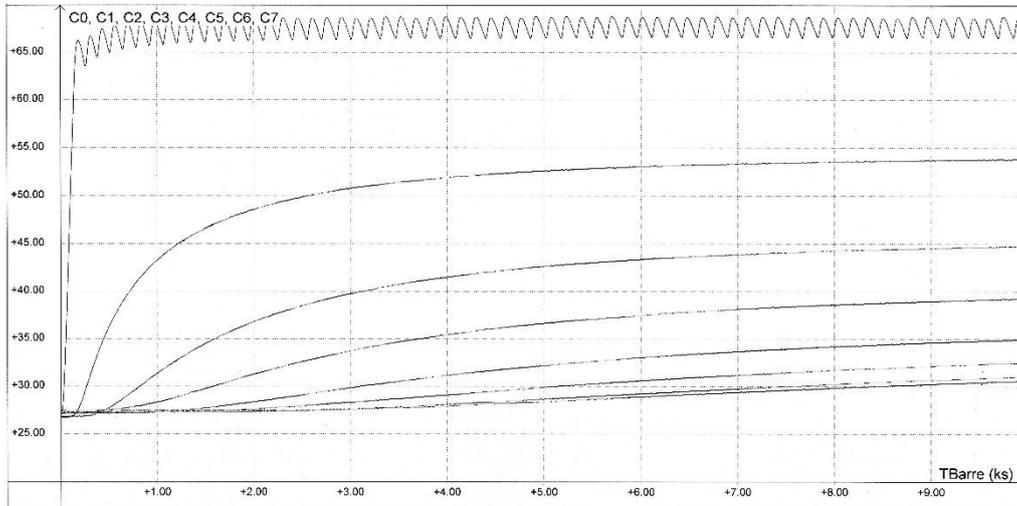
Au bout de 10000 s, on relève :

| Capteur | C0 | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 |
|--|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Position x (m) | 0 | 0,120 | 0,240 | 0,360 | 0,480 | 0,600 | 0,720 | 0,840 |
| Température T_c ($^\circ\text{C}$) | 67,9 | 61,8 | 56,4 | 51,6 | 47,3 | 43,2 | 39,1 | 35,5 |

Barre d'acier :

Le jour où cette manipulation a été réalisée, la température ambiante était : $T_{a\infty} = 27,2 \text{ }^\circ\text{C}$.

Relevé de la température (en $^\circ\text{C}$) en fonction du temps pour les différents capteurs :



Au bout de 10000 s, on relève :

| Capteur | C0 | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 |
|--|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Position x (m) | 0 | 0,120 | 0,240 | 0,360 | 0,480 | 0,600 | 0,720 | 0,840 |
| Température T_a ($^\circ\text{C}$) | 67,7 | 53,9 | 44,8 | 39,3 | 34,9 | 32,5 | 31,0 | 30,6 |

3) Premières remarques :

- Interpréter l'allure de ces courbes. On expliquera notamment pourquoi des oscillations apparaissent sur la courbe relative au capteur C0.
- Grâce à l'équation de la diffusion thermique (équation de la chaleur), évaluer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire pour la barre de cuivre et la barre d'acier.
- Peut-on assimiler les valeurs des températures relevées au bout de 10000 s aux valeurs des températures en régime permanent ?
- Ces résultats sont-ils en accord avec l'allure des courbes ?

Données :

- masse volumique du cuivre : $\mu = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- capacité calorifique massique du cuivre : $c = 385 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.
- conductivité thermique du cuivre : $\lambda = 389 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- masse volumique de l'acier étudié : $\mu = 8 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- capacité calorifique massique de l'acier étudié : $c = 5 \cdot 10^2 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- conductivité thermique de l'acier étudié : $\lambda = 54 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- longueur des barres : $L = 0,846 \text{ m}$

Pour la suite du TP, on assimilera tout de même les valeurs des températures relevées au bout de 10000 s aux valeurs des températures en régime permanent (il aurait fallu enregistrer pendant plus de 10000 s pour avoir les valeurs de températures en régime permanent, mais ce n'était pas possible à cause du logiciel utilisé).

II) Etude de la barre de cuivre en régime transitoire en négligeant les pertes thermiques latérales : détermination de la conductivité thermique du cuivre :

1) Etude théorique :

On considère une barre cylindrique de section circulaire constante et de longueur L très supérieure au rayon R de la section.

Dans un premier temps, on fait l'hypothèse que la barre est parfaitement calorifugée latéralement, les pertes latérales seront donc négligées. On considère donc qu'il n'y a pas d'échange de chaleur autre qu'à travers des plans perpendiculaires à l'axe de la barre. On se rapproche ainsi du cas unidimensionnel, ce qui revient à considérer que la température est uniforme dans chaque section droite de la barre.

En effectuant un bilan d'énergie et en utilisant la loi de Fourier, établir l'équation de la diffusion thermique :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

μ est la masse volumique de la barre et s'exprime en kg.m^{-3}

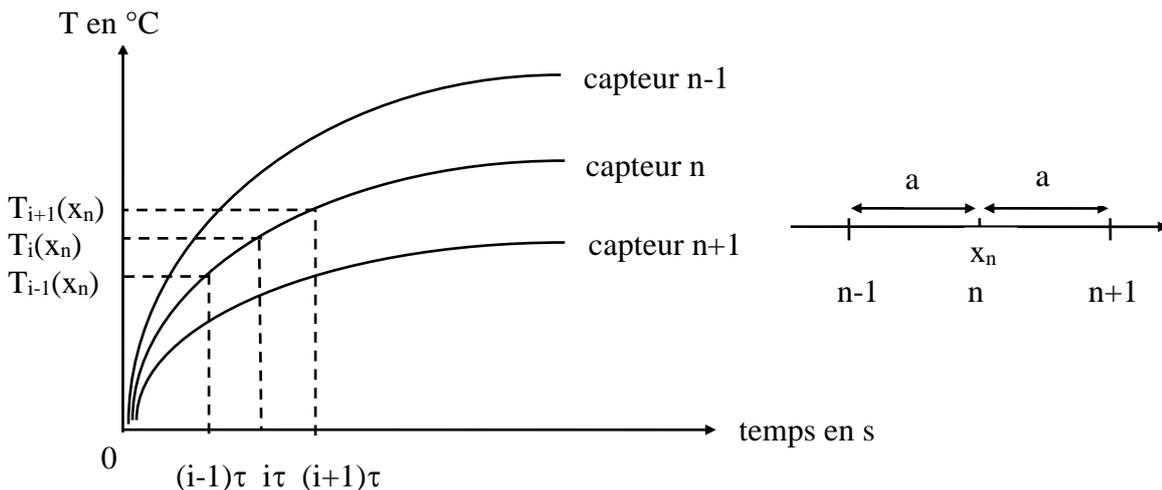
c est la capacité calorifique massique de la barre et s'exprime en $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

λ est la conductivité thermique de la barre et s'exprime en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

2) Méthode de détermination de la conductivité thermique :

Pour déterminer la conductivité thermique du cuivre, on va exploiter l'enregistrement du régime transitoire (ou plutôt le tableau de valeurs numériques associé), et l'équation de la diffusion thermique.

Considérons les courbes de température de trois capteurs (distance a entre chaque capteur).



Soit τ la durée entre deux acquisitions. Montrer que $\frac{\partial T}{\partial t}(x_n)$ est approximativement égal à :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_n) = \frac{1}{2\tau} [T_{i+1}(x_n) - T_{i-1}(x_n)].$$

Soit a la distance entre deux capteurs. Montrer que $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_n)$ est approximativement égal à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_n) = \frac{1}{a^2} [T_i(x_n + a) + T_i(x_n - a) - 2.T_i(x_n)].$$

On peut ainsi déterminer pour le capteur n , placé à l'abscisse x_n , à l'instant $i\tau$, la valeur de la conductivité thermique du cuivre.

3) Détermination expérimentale de la conductivité thermique du cuivre :

Données :

- masse volumique du cuivre : $\mu = 8,9.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- capacité calorifique massique du cuivre : $c = 385 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- distance entre deux capteurs consécutifs : $a = 0,120 \text{ m}$.

Grâce aux relevés numériques de températures en fonction du temps pour différents capteurs, déterminer, à l'aide du logiciel Excel, la conductivité thermique λ du cuivre, à différents endroits et différents instants.

En éliminant éventuellement certaines valeurs aberrantes, déterminer :

- la valeur moyenne de la conductivité thermique : $\bar{\lambda}$
- l'écart-type expérimental
- l'incertitude type $\Delta\lambda$
- l'intervalle de confiance à 95% : $\lambda \equiv \bar{\lambda} \pm 2 \Delta\lambda$

Comparer à la valeur tabulée : $\lambda = 389 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Quelles sont les sources d'erreur ?

III) Etude de la barre de cuivre en régime permanent en négligeant les pertes thermiques latérales :

1) Etude théorique :

On continue à faire l'hypothèse que la barre est parfaitement calorifugée latéralement. L'équation de la

diffusion thermique est donc toujours :
$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

En régime permanent (ou stationnaire), la température ne dépend plus du temps. L'équation de la diffusion

thermique donne :
$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = A x + B$$

La température varie donc linéairement le long de la barre.

Si T_1 est la température à l'entrée de la barre ($x = 0$), T_2 la température à la sortie de la barre et L la longueur

de la barre alors :
$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

Le flux thermique s'écoulant dans la barre (puissance thermique) s'écrit (en utilisant la loi de Fourier) :

$$\Phi = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{L} \text{ avec } S = \pi R^2$$

2) Exploitation expérimentale :

- Grâce à Excel, tracer la courbe $T_c(x)$ et modéliser par une droite. Donner l'équation de la droite.
- En déduire le flux thermique Φ s'écoulant dans la barre.
- En déduire le coefficient de transfert conducto-convectif h' au niveau de l'ailette en exploitant la continuité du flux thermique en $x = L$: $\Phi = h' \pi R^2 [T_c(x=L) - T_{c\infty}]$.
- La modélisation de la courbe $T_c(x)$ par une droite n'est pas tout à fait satisfaisante. En effet, la courbe semble incurvée par rapport au modèle linéaire. Justifier que le sens de courbure de la courbe $T_c(x)$ peut correspondre à des pertes thermiques latérales.

IV) Détermination des pertes thermiques latérales grâce à l'étude de la barre d'acier en régime permanent :

1) Position du problème :

En réalité, bien que les barres soient entourées latéralement par un isolant, elles ne sont pas parfaitement calorifugées, et il y a donc des pertes thermiques (la conductivité thermique de l'isolant n'est pas nulle). On va à présent considérer ces pertes thermiques et on va chercher à les évaluer.

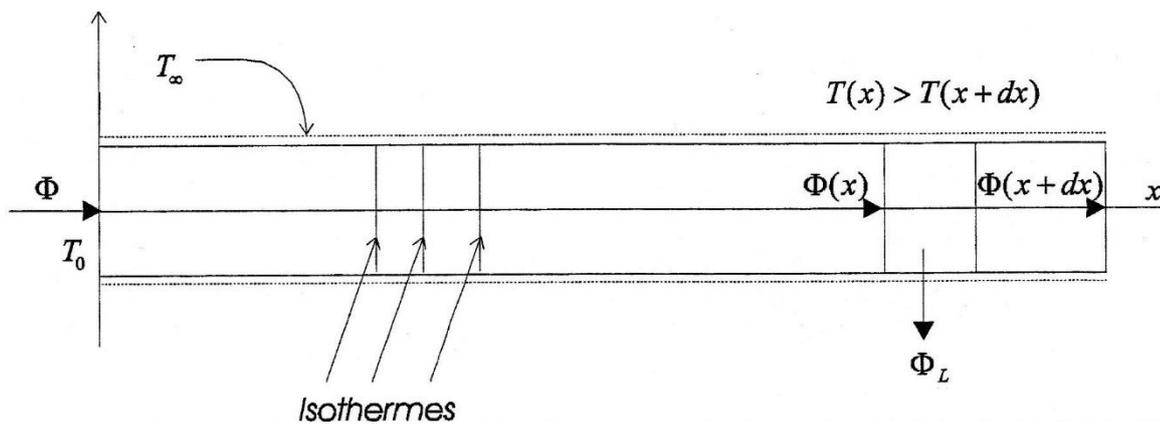
Pour cela, on **modélise** les échanges de chaleur latéraux des barres avec l'extérieur par des transferts de type conducto-convectifs, avec h le coefficient d'échange de chaleur superficiel. Nous allons chercher à déterminer le coefficient h (on suppose que le coefficient h est le même dans le cas de la barre d'acier et de la barre de cuivre). Nous pourrions le déterminer grâce aux mesures effectuées sur la barre d'acier.

2) Etude théorique :

On considère une barre cylindrique de section circulaire constante et de longueur L très supérieure au rayon R de la section.

La barre est chauffée en permanence à une extrémité. Le matériau constituant la barre métallique est bon conducteur de chaleur, de sorte que la chaleur se propage par conduction le long de la barre et transversalement à celle-ci pour se déverser dans le milieu entourant la barre.

On admet que les sections droites de la barre sont isothermes de sorte que le problème soit unidimensionnel. La schématisation de celui-ci est indiquée ci-dessous.



On suppose que les pertes latérales sont de la forme : $\Phi_L = h S_L [T(x) - T_\infty]$, où S_L est la surface d'échange latérale et T_∞ est la température de l'air ambiant.

En effectuant un bilan d'énergie pour un élément de volume ($S dx$) de la barre (tel celui indiqué ci-dessus où $S = \pi R^2$ est la section de la barre) et en utilisant la loi de Fourier, établir l'équation de la diffusion thermique :

$$\mu c R \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda R \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2 h (T - T_\infty) \quad (1)$$

μ est la masse volumique de la barre et s'exprime en kg.m^{-3}

c est la capacité calorifique massique de la barre et s'exprime en $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

λ est la conductivité thermique de la barre et s'exprime en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

h est le coefficient d'échange de chaleur superficiel et s'exprime en $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

En régime permanent, l'équation (1) conduit à l'équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \alpha^2 (T - T_\infty) = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha^2 = \frac{2h}{\lambda R} \quad (2)$$

dont la solution générale est de la forme :

$$T(x) = T_\infty + A \exp(-\alpha x) + B \exp(\alpha x) \quad (3)$$

Les conditions aux deux extrémités (conditions aux limites) permettent de déterminer les constantes A et B.

3) Détermination du coefficient d'échange h :

Dans le cas de la barre de cuivre, on constate qu'au bout de 10000 s (donc quasiment en régime permanent), $T_c(x = 0,840 \text{ m}) = 35,5 \text{ °C} \neq T_{c\infty} = 23,0 \text{ °C}$, donc on ne peut pas considérer que cette barre est infinie. La modélisation expérimentale de la répartition de température pourrait s'avérer laborieuse.

Par contre, dans le cas de la barre d'acier, on constate qu'au bout de 10000 s (donc quasiment en régime permanent), $T_a(x = 0,840 \text{ m}) = 30,6 \text{ °C} \approx T_{a\infty} = 27,2 \text{ °C}$, donc on peut considérer que cette barre est infinie. A l'extrémité non chauffée ($x \rightarrow +\infty$), la température tend vers celle du milieu ambiant $T_{a\infty}$. Le coefficient α étant positif, il est nécessaire que B soit nul pour que la température reste finie. Donc, si l'on note $T_{a0} = T_a(x = 0) = 67,7 \text{ °C}$, on trouve que :

$$\frac{T_a(x) - T_{a\infty}}{T_{a0} - T_{a\infty}} = \exp(-\alpha x)$$

Et donc
$$\ln\left(\frac{T_a(x) - T_{a\infty}}{T_{a0} - T_{a\infty}}\right) = -\alpha x$$

$\alpha = \sqrt{\frac{2h}{\lambda R}}$, qui a la dimension de l'inverse d'une longueur, caractérise l'atténuation de la température le long de la barre.

- Tracer la courbe $\ln\left(\frac{T_a(x) - T_{a\infty}}{T_{a0} - T_{a\infty}}\right) = f(x)$. Modéliser par une fonction linéaire.
- Constater que le point correspondant à $x = 0,840 \text{ m}$ n'est pas aligné avec les autres points. Quelle peut en être la raison ?
- Tracer à nouveau la courbe $\ln\left(\frac{T_a(x) - T_{a\infty}}{T_{a0} - T_{a\infty}}\right) = f(x)$, mais sans tenir compte du dernier point ($x = 0,840 \text{ m}$). Modéliser par une fonction linéaire. Donner l'équation de la droite.
- En déduire α_{acier} .
- En utilisant la définition de α donnée par (2), en déduire la valeur de h.

4) Discussion sur la validité du modèle :

$\alpha = \sqrt{\frac{2h}{\lambda R}}$ est l'inverse d'une longueur caractéristique de la propagation de la chaleur le long de la barre.

Le nombre αL est utilisé pour décider si la barre peut être considérée comme une barre de longueur infinie au sens de la conduction de la chaleur.

Calculer αL pour la barre d'acier et pour la barre de cuivre. Conclure.

V) Etude de la barre de cuivre en régime transitoire en considérant les pertes thermiques latérales : détermination de la conductivité thermique du cuivre :

1) Etude théorique :

On considère à présent les pertes thermiques latérales pour la barre de cuivre. Dans le paragraphe précédent, on a établi l'équation de la diffusion thermique :

$$\mu c R \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda R \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2h(T - T_\infty) \quad (1)$$

2) Méthode de détermination de la conductivité thermique :

Pour déterminer la conductivité thermique du cuivre, on va utiliser la même méthode que précédemment (partie II). On va donc exploiter l'enregistrement du régime transitoire (ou plutôt le tableau de valeurs numériques associé), et la nouvelle équation de la diffusion thermique.

3) Détermination expérimentale de la conductivité thermique du cuivre :

Données :

- masse volumique du cuivre : $\mu = 8,9.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- capacité calorifique massique du cuivre : $c = 385 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- rayon de la barre de cuivre : $R = 0,011 \text{ m}$
- température de l'air ambiant : $T_{\infty} = 23,0 \text{ }^\circ\text{C}$
- distance entre deux capteurs consécutifs : $a = 0,120 \text{ m}$.

Grâce aux relevés numériques de températures en fonction du temps pour différents capteurs, déterminer, à l'aide du logiciel Excel, la conductivité thermique λ du cuivre, à différents endroits et différents instants.

En éliminant éventuellement certaines valeurs aberrantes, déterminer :

- la valeur moyenne de la conductivité thermique : $\bar{\lambda}$
- l'écart-type expérimental
- l'incertitude type $\Delta\lambda$
- l'intervalle de confiance à 95% : $\lambda = \bar{\lambda} \pm 2 \Delta\lambda$

Comparer à la valeur tabulée : $\lambda = 389 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Quelles sont les sources d'erreur ?