

**DEVOIR SURVEILLE n° 6**

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**AVERTISSEMENT**

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

**L'usage de calculatrice est interdit pour l'ensemble de ce devoir.**

Il est interdit d'arrêter de composer avant 17h00.

Vous devez traiter les 4 problèmes sur 4 copies différentes.

Si vous choisissez de ne pas traiter l'un des problèmes, vous devez tout de même me rendre une copie « blanche ».

	Barème	Ramassé à
Premier problème	32 %	15h00
Deuxième problème	39 %	16h30
Troisième problème	10 %	16h45
Quatrième problème	19 %	17h00

Vous avez tout intérêt à faire dans l'ordre : le 1<sup>er</sup> problème, puis le 2<sup>ème</sup> problème, puis le 3<sup>ème</sup> problème, et enfin le 4<sup>ème</sup> problème !

Vous êtes libres de commencer le problème suivant avant que je ramasse les copies (vous pouvez par exemple commencer le 2<sup>ème</sup> problème avant 15h00).

**PREMIER PROBLEME :** Synthèse de composés semi-conducteurs : Epitaxie par jet moléculaire (d'après banque PT 2016)

*L'usage de calculatrice est interdit pour ce problème.*

Les composants semi-conducteurs sont très répandus dans l'électronique moderne. Ce problème propose d'étudier un exemple de processus de fabrication des composants à semi-conducteurs, qui a commencé à être utilisé dans les années 70 : l'épitaxie par jet moléculaire (EJM ou MBE en anglais). Cette dernière, grâce à des jets d'atomes ou de molécules relativement lents, a permis la création de couches de semi-conducteur dont l'épaisseur peut être monoatomique. On a pu ainsi créer des composants plus petits mais aussi réaliser des diodes LASER de largeur spectrale très fine.

On mènera les calculs avec les valeurs approchées des constantes fournies en fin de problème.

**Principe de l'épitaxie par jet moléculaire :**

Cette technique consiste à envoyer des molécules (ou atomes) à la surface d'une couche monocristalline déjà formée, le substrat, pour qu'elle s'accroche à la surface (cf Figure 1). Les molécules arrivent sur la surface avec un débit relativement lent et dans un vide très poussé. On peut ainsi contrôler le nombre de molécules qui se fixent sur le substrat de manière à arrêter le processus juste quand une couche est entièrement formée. On peut alors soit terminer la croissance du substrat, soit changer le type de molécule apportée de manière à former une couche de nature différente : on parle, dans le cadre de l'électronique des semi-conducteurs, de « jonction abrupte ».

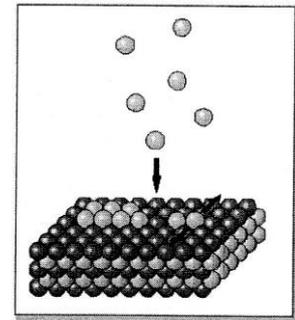


Figure 1 : Croissance par couche.

Le dispositif expérimental est présenté Figure 2. La partie de droite, qui ne sera pas étudiée, sert à l'introduction du substrat dans l'enceinte en limitant au minimum la contamination de l'atmosphère de l'enceinte. L'ovale central, entouré de panneau d'azote liquide, est la chambre d'épitaxie où se produit la croissance des couches sur le substrat.

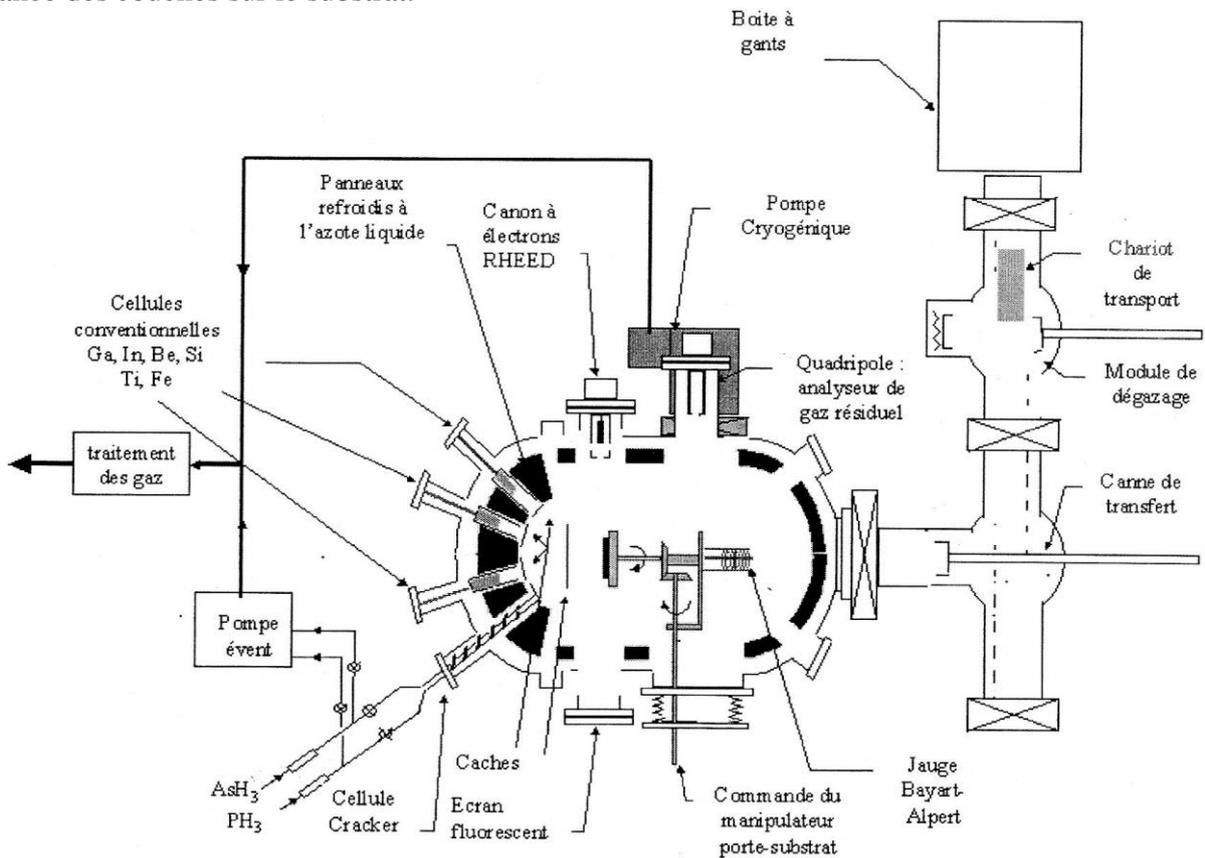


Figure 2 : Schéma des différents éléments d'un bâti EJM

Le porte-substrat est commandé de l'extérieur pour le mettre et le maintenir face aux sources d'atomes/molécules : les cellules conventionnelles (**de Knudsen**) ou Cracker.

Les molécules évaporées doivent arriver sur le substrat sans entrer en collision avec une autre molécule (pour éviter les impuretés) ce qui nécessite un vide poussé dans la chambre d'épitaxie. Ce vide est assuré grâce à une pompe cryogénique. La « mesure du vide » est réalisée par la **Jauge de Bayard-Alpert**.

On contrôle la croissance d'une monocouche sur le substrat **au moyen d'un procédé RHEED** basé sur la diffraction d'un faisceau d'électrons (émis par le canon) par la surface du substrat puis l'étude du faisceau par interférence.

Le but de ce problème est d'étudier une technique mise en jeu dans la technique d'épitaxie par jet moléculaire : étude de la jauge de Bayard-Alpert.

### « Mesure du vide » : les jauges de pression UHV

Pour limiter les chocs et les impuretés, on doit imposer une pression dans l'enceinte très faible de l'ordre de  $10^{-8}$  Pa. On se propose d'étudier ici un appareil de mesure des faibles pressions : la jauge de Bayard-Alpert.

#### Principe de la jauge de Bayard-Alpert :

Une jauge de Bayard-Alpert est dite de type « ionique ». Son principe est basé sur l'accélération d'électrons émis par un filament (K) au moyen d'une grille (A) plongée dans le gaz à analyser. Les électrons accélérés, en heurtant les molécules du gaz, les ionisent. Les ions ainsi formés sont récoltés par un collecteur (C) situé au centre de la grille. Le nombre d'ions collectés, et donc le courant généré dans le collecteur, est proportionnel au nombre d'électrons émis et au nombre de particules du gaz, donc indirectement à la pression.

Pour maximiser le nombre de particules heurtées par les électrons, on construit la grille de manière à confiner les électrons dans un mouvement oscillant au sein du gaz : ils sont ainsi certains de finir par heurter une particule du gaz. On se propose ici d'étudier le champ électrique de confinement ainsi créé.

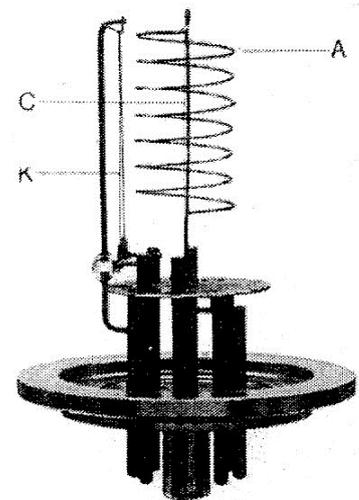


Figure 4 : Sonde de Bayard-Alpert

#### Modèle pour le calcul du champ électrique intérieur à la grille :

La géométrie réelle étant relativement complexe, on utilisera ici le modèle simplifié suivant :

- La grille (A) est un cylindre de longueur infinie, d'épaisseur négligeable et de rayon  $R_g$ . Elle est portée au potentiel  $V_g = +180$  V uniforme.
- Le collecteur (C) est un cylindre infini plein de rayon  $R_c$  porté au potentiel  $V_c = 0$  V uniforme.
- Une enceinte métallique extérieure (E), cylindrique de rayon  $R_2$  est maintenue au potentiel  $V_{ext} = 0$  V uniforme.
- L'ensemble (A), (C) et (E), formé de cylindres coaxiaux, possède une symétrie cylindrique.
- Un filament rectiligne K est positionné parallèlement à l'axe  $\vec{e}_z$  des cylindres, à la distance  $R_K$  du centre. On admet que sa présence conserve à l'ensemble {A,C,E,K} la symétrie cylindrique.
- A l'intérieur se trouve un gaz raréfié : le milieu est assimilable au vide.

On notera Oz l'axe de symétrie des cylindres (orienté par  $\vec{e}_z$ ).

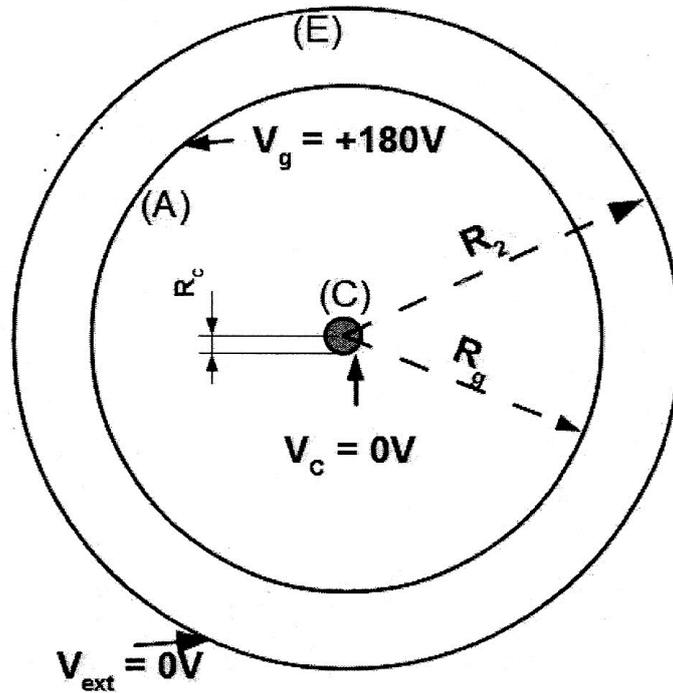


Figure 5 :

**Q1.** On s'intéresse au champ électrique  $\vec{E}(M)$  et au potentiel  $V(M)$  en un point  $M$  repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

**Q1.a.** Faire apparaître sur un schéma les vecteurs unitaires  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  de la base cylindrique.

**Q1.b.** Expliquer, par des arguments qualitatifs précis, pourquoi on a  $V(M) = V(r)$  et  $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ .

**Q2.** On cherche à déterminer les grandeurs électrostatiques entre C et A.

**Q2.a.** Donner l'équation de Maxwell-Gauss.

**Q2.b.** En déduire l'équation différentielle que vérifie le potentiel  $V(r)$  dans cette zone. (On pourra faire intervenir l'expression du laplacien fourni en fin d'énoncé).

**Q2.c.** Exprimer  $V(r)$  en fonction de  $r, R_g, R_c$  et  $V_g$ .

**Q3.** Déduire de la question précédente l'expression du champ  $\vec{E}(M)$  entre A et C.

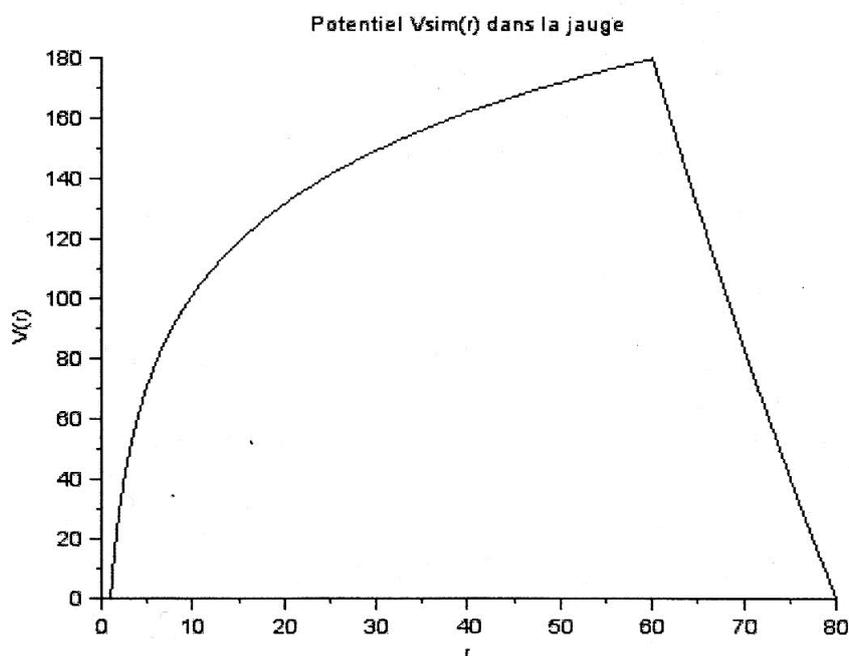


Figure 6 : Potentiel  $V_{sim}(r)$  . (r est en mm)

**Q4.** L'allure du potentiel en tout point intérieur de la jauge est donné sur la Figure 6 représentant  $V_{\text{sim}}(M) = V_{\text{sim}}(r)$  en fonction de  $r$ .

**Q4.a.** A partir de ce graphique, donner une estimation de  $R_c$  et  $R_g$ .

**Q4.b.** Donner l'équation littérale du potentiel  $V(r)$  entre A et E.

**Q4.c.** En déduire l'expression littérale du champ électrique  $\vec{E}$  entre A et E.

**Q4.d.** Reproduire la Figure 5 et représenter les lignes de champ électrique en précisant leur orientation.

On s'intéresse à présent au comportement des électrons émis par K. Ils sont libérés avec une vitesse très faible, K étant au potentiel  $V_K = 80 \text{ V}$ .

**Q5.** Estimer numériquement la position  $R_K$  du filament (situé entre A et E).

**Q6.** On fait l'hypothèse d'une émission d'électrons à vitesse initiale nulle ( $v_K = 0$ ). On suppose de plus que l'électron n'est soumis qu'à l'action du champ électrique étudié précédemment.

**Q6.a.** Montrer que la trajectoire de l'électron est rectiligne.

**Q6.b.** Donner l'expression de l'énergie potentielle  $E_p(r)$  d'un électron dans le champ électrique  $\vec{E}$ .

**Q6.c.** Montrer que l'énergie mécanique de l'électron émis se conserve.

**Q6.d.** Représenter graphiquement  $E_p(r)$  puis reporter sur un même graphique  $E_m$ .

**Q6.e.** En déduire que l'électron est piégé dans une portion d'espace comprise entre deux cylindres de rayons  $r_{\text{min}}$  et  $r_{\text{max}}$ . Estimer les valeurs de  $r_{\text{min}}$  et  $r_{\text{max}}$ .

**Q7.** En réalité, l'électron est émis avec une vitesse faible mais non nulle. On s'intéresse aux électrons émis avec une vitesse perpendiculaire à Oz.

**Q7.a.** Tant qu'ils ne subissent pas de choc (sur un atome ou sur la grille), les électrons ne sont soumis qu'à l'action du champ électrique. Montrer que le moment cinétique de l'électron sur l'axe Oz, noté  $L_z$ , est conservé. On pourra utiliser la grandeur  $L_z$  pour la suite.

**Q7.b.** Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire sous la forme :  $E_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$  où

$E_{p,\text{eff}}(r)$  est une fonction ne dépendant que de la position radiale  $r$  de l'électron qu'on exprimera en fonction de  $r$ ,  $L_z$ ,  $m_e$ ,  $e$  et  $V_{\text{sim}}(r)$ .

**Q7.c.** Au moyen d'un traitement énergétique approprié, montrer soigneusement que l'électron va rester confiné autour de l'anode tant qu'il ne subit pas de choc. On ne demande pas de déterminer l'équation de la trajectoire de l'électron.

**Q8.** Projeter le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron sur l'axe Oz. Quel est le mouvement de l'électron suivant Oz ? *Pour pallier à ce problème, on peut rajouter une grille aux extrémités du cylindre.*

### Données générales :

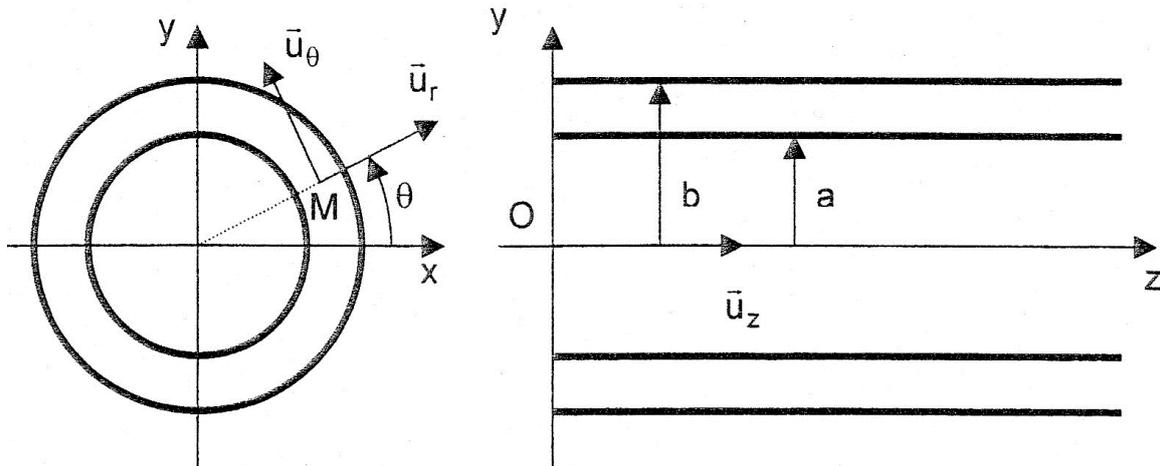
Expression du Laplacien en coordonnées cylindriques :  $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Masse d'un électron :  $m_e = 9.10^{-31} \text{ kg}$

## DEUXIEME PROBLEME : Câble coaxial (d'après banque PT 2003)

L'usage de calculatrice est interdit pour ce problème.

Des données sont fournies en fin de problème.



Une ligne électrique est constituée d'un câble coaxial (voir figure). Dans tout le problème, les deux conducteurs du câble sont supposés creux, et assimilés à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, de sections circulaires et coaxiales. Le conducteur intérieur, noté conducteur (1), a un rayon  $a$  ; le conducteur extérieur, noté conducteur (2), a un rayon  $b$  ; la longueur du câble est  $l$ . On utilise le système de coordonnées cylindriques et un point  $M$  est repéré par  $r, \theta, z$  ; la base locale associée est alors  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ . L'espace entre les conducteurs contient un diélectrique linéaire, homogène et isotrope de permittivité relative  $\epsilon_r = 1$ , diélectrique qu'on peut donc assimiler au vide.

Pour les applications numériques, on prendra :  $a = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $b = 1,65 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\epsilon_0 = \frac{1}{36 \pi 10^9} \text{ F.m}^{-1}$ ,  $\mu_0 =$

$4 \pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ . On posera  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ .

La longueur  $l$  est assez grande pour que l'on puisse négliger les effets d'extrémités et assimiler les champs et potentiels à ceux produits par un câble infiniment long.

On rappelle l'expression de l'opérateur divergence et de l'opérateur rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

### 1) Electrostatique :

On suppose que les conducteurs portent respectivement les charges électriques  $+Q$  et  $-Q$  uniformément réparties sur les surfaces des conducteurs de rayons  $a$  et  $b$ .

1) Rappeler les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday dans le vide, en régime permanent.

2) Montrer que le champ électrostatique est radial et que sa valeur algébrique ne dépend que de  $r$ , soit :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r.$$

- 3) Etablir l'expression de  $E(r)$  en fonction de  $Q$ ,  $\epsilon_0$ ,  $r$ ,  $l$  et de constantes à déterminer en distinguant trois domaines à définir. On calculera  $E(r)$  par deux méthodes différentes :
- a) en utilisant le théorème de Gauss ;
  - b) en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss et les conditions de passage du champ électrique à la traversée d'une surface chargée (rappelées en fin de problème).
- 4) Le conducteur (1) est porté au potentiel  $V_1$  et le conducteur (2) est porté au potentiel  $V_2$ . Exprimer la différence de potentiel  $V_1 - V_2$  en fonction de  $Q$ ,  $\epsilon_0$ ,  $l$ ,  $a$  et  $b$ .
- 5) La capacité  $C$  du condensateur formé par les deux conducteurs est le quotient de  $Q$  par la différence de potentiel  $V_1 - V_2$  ; déterminer  $C$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $l$ ,  $a$  et  $b$ . En déduire l'expression  $C'_0$  de la capacité du câble par unité de longueur.
- 6) Quelle est la densité volumique d'énergie électrostatique ? En déduire l'énergie électrostatique emmagasinée  $W_e$  par le câble et retrouver l'expression de  $C$ .
- 7) Application numérique : calculer la valeur de  $C'_0$ .

## 2) Magnétostatique :

On utilise le câble coaxial pour alimenter une charge. Le conducteur (1) constitue le conducteur aller du courant électrique constant d'intensité  $I_0$  (dans le sens de l'axe  $Oz$ ). Le conducteur (2) est le conducteur retour de ce courant. La répartition du courant est superficielle et uniforme sur chaque conducteur creux.

Les vecteurs courants surfaciques valent respectivement  $\vec{j}_{s1} = \frac{I_0}{2\pi a} \vec{u}_z$  et  $\vec{j}_{s2} = \frac{-I_0}{2\pi b} \vec{u}_z$ .

- 1) Rappeler les équations de Maxwell-flux et Maxwell-Ampère dans le vide, en régime permanent.
- 2) Montrer que le champ magnétique est orthoradial et que sa valeur algébrique ne dépend que de  $r$ , soit :  
 $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$ .
- 3) Etablir l'expression de  $B(r)$  en distinguant trois domaines à définir. On calculera  $B(r)$  par deux méthodes différentes :
- a) en utilisant le théorème d'Ampère ;
  - b) en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère et les conditions de passage du champ magnétique à la traversée d'une nappe de courant (rappelées en fin de problème).
- 4) Calculer le flux du champ magnétique à travers une section de longueur  $l$ , comprise entre  $a$  et  $b$ .
- 5) En déduire l'expression de l'inductance propre  $L$  du câble coaxial en fonction de  $\mu_0$ ,  $l$ ,  $a$  et  $b$ . En déduire l'expression de l'inductance propre par unité de longueur  $L'_0$ .
- 6) Quelle est la densité volumique d'énergie magnétique ? En déduire l'énergie magnétique  $W_m$  emmagasinée par le câble et retrouver l'expression de  $L$ .
- 7) Application numérique : calculer la valeur de  $L'_0$ .
- 8) Que vaut le produit  $L'_0 C'_0$  ?

*Données :*

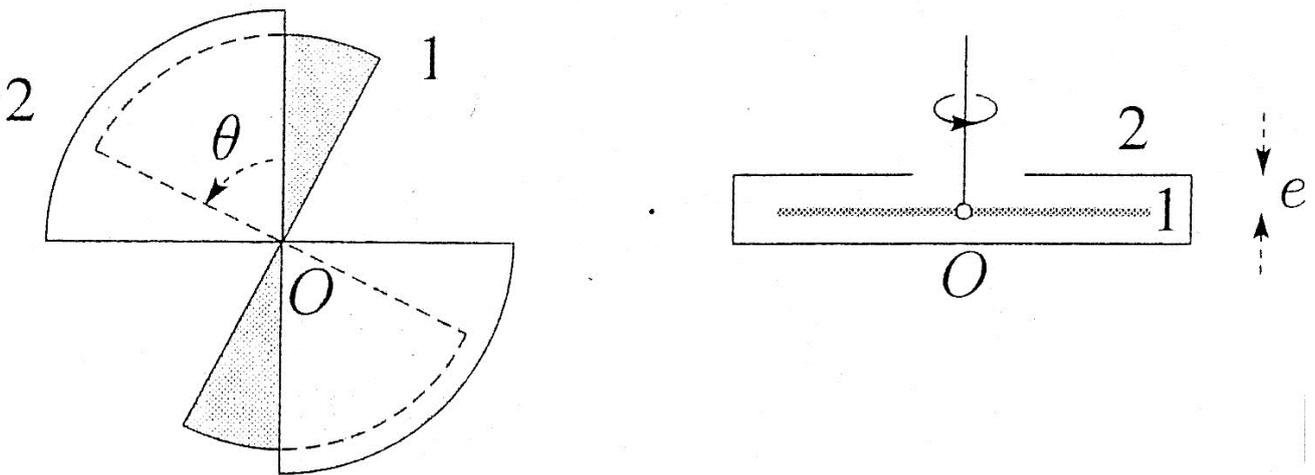
- $\ln(1,65) \approx 0,5$
- On donne la relation de passage pour  $\vec{E}$  en présence de charges surfaciques séparant deux milieux 1 et 2 de part et d'autre de cette surface chargée :  $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$ , où  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la surface,  $\vec{n}_{12}$  est le vecteur unitaire normal localement à cette surface et allant du milieu 1 vers le milieu 2. Cette relation traduit la continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  et la discontinuité de sa composante normale en présence de charges surfaciques.
- On donne la relation de passage qui traduit la continuité de la composante normale de  $\vec{B}$  et la discontinuité de sa composante tangentielle en présence de courants surfaciques :  $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s(M) \wedge \vec{n}_{12}$  où  $\vec{n}_{12}$  désigne le vecteur unitaire normal à la surface de séparation entre les deux milieux et est dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la surface.

**TROISIEME PROBLEME : Action exercée sur un condensateur à quadrants**

*L'usage de calculatrice est interdit pour ce problème.*

On considère le condensateur plan, représenté ci-dessous, aux bornes duquel s'exerce une tension  $U$ . L'armature 1, mobile autour d'un axe ( $Oz$ ) qui lui est perpendiculaire, est formée de deux quadrants circulaires, de rayon  $R_1$ , symétriques par rapport à ( $Oz$ ) ; l'armature 2 fixe est, elle, constituée de quatre quadrants, deux à deux superposés, réalisant ainsi un logement cylindrique, d'épaisseur  $2e$ , dans lequel pénètre la première armature.

On rappelle l'expression de la capacité  $C$  d'un condensateur plan :  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ , avec  $\epsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide,  $S$  la surface des armatures en regard, et  $e$  la distance entre les armatures.



1) Montrer que la capacité  $C$  du condensateur à quadrants s'écrit  $C = K \theta$ ,  $\theta$  étant l'angle de pénétration de 1 dans 2. Donner l'expression de  $K$ .

2) En déduire l'expression de l'énergie électrostatique  $E_e$  en fonction de  $K$ ,  $\theta$  et  $U$ .

Les armatures sont reliées à un générateur, lequel maintient constante la différence de potentiel  $U$  appliquée. Un opérateur effectue réversiblement un déplacement infinitésimal d'un angle  $d\theta$  de l'armature 1.

3) Quelle est la conséquence d'un tel déplacement ?

4) Exprimer le travail électrique élémentaire  $\delta W_{el}$  fourni par la source lors d'une variation de charge  $dQ$  des armatures. On donnera le résultat en fonction de  $U$  et  $dQ$ , puis en fonction de  $K$ ,  $U$  et  $d\theta$ .

5) Faire le bilan énergétique de l'opération et en déduire l'expression du travail élémentaire  $\delta W_{op}$  fourni par l'opérateur, en fonction de  $K$ ,  $U$  et  $d\theta$ .

6) En déduire le couple  $\Gamma_\theta$  auquel est soumise l'armature mobile, en fonction de  $K$  et  $U$ .

7) L'armature 1 est soumise au couple précédent exercé par une tension inconnue  $U$  et à un couple de torsion  $-C_t \theta$ ,  $C_t$  étant la constante de torsion. Un étalonnage préalable de ce condensateur à quadrants a donné le résultat suivant :  $U = 23 \text{ V}$  pour  $\theta = 15^\circ$ . Calculer la tension appliquée lorsque  $\theta = 60^\circ$ .

## QUATRIEME PROBLEME : Four à induction (d'après banque PT 2009)

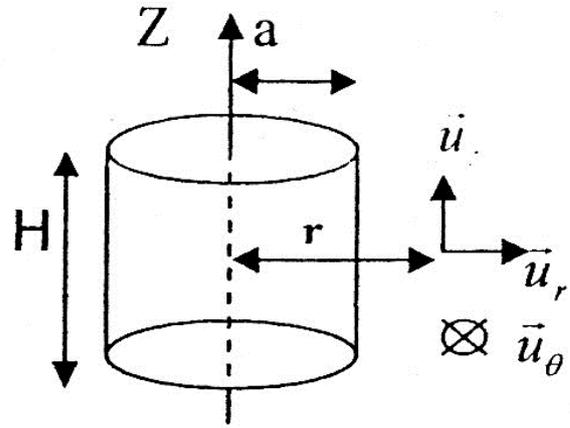
L'usage de calculatrice est interdit pour ce problème.

### I) Distributions orthoradiales de courant électrique :

On cherche à déterminer le champ magnétique créé par diverses distributions orthoradiales de courant électrique continu circulant dans un cylindre de rayon  $a$  et de hauteur  $H$ .

On suppose que  $a$  est très petit devant  $H$  ( $a \ll H$ ) ; de ce fait :

- On négligera les effets de bords (ce qui revient à considérer le cylindre comme illimité dans la direction  $Z$ ).
- Le champ magnétique  $\vec{B}_{\text{ext}}$  à l'extérieur du cylindre est nul.



On utilisera les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  et la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

Dans toute la suite, on considérera que les propriétés électromagnétiques de l'air sont identiques à celles du vide.

Les données sont :  $a$ ,  $H$  et la perméabilité du vide  $\mu_0$ .

#### I-1) Distribution volumique orthoradiale de courants :

Le courant électrique circule dans le cylindre ; la densité de courant volumique en un point  $M(r, \theta, z)$  intérieur au cylindre est :  $\vec{j}_1 = \alpha r \cdot \vec{u}_\theta$  ; elle n'est donc pas uniforme.

Cette distribution crée, au point  $M$ , le champ magnétique  $\vec{B}_1$ .

a) Par des considérations qualitatives précises, déterminer :

a.1) la direction de  $\vec{B}_1$ .

a.2) la (ou les) coordonnée(s) dont dépend la valeur algébrique  $B_1$  de ce champ.

b) Par application du théorème d'Ampère, déterminer  $B_1$  en fonction de  $\alpha$ ,  $r$  et des données, pour tout  $r$  inférieur ou égal au rayon  $a$ .

#### I-2) Distribution surfacique orthoradiale de courants :

À présent, le courant électrique ne circule que sur la surface latérale du cylindre, l'intérieur étant « vide ». Il est caractérisé par le vecteur densité de courant surfacique  $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_\theta$ ,  $j_s$  étant uniforme et constant.

Cette distribution crée, à l'intérieur, le champ  $\vec{B}_0$  (rappelons que  $\vec{B}_{\text{ext}}$  est nul).

a) Montrer qu'un champ uniforme  $\vec{B}_0$  satisfait aux équations de Maxwell à l'intérieur du cylindre.

b) On donne la relation de passage qui traduit la continuité de la composante normale de  $\vec{B}$  et la discontinuité de sa composante tangentielle en présence de courants surfaciques :

$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s(M) \wedge \vec{n}_{12}$  où  $\vec{n}_{12}$  désigne le vecteur unitaire normal à la surface de séparation entre les deux milieux et est dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la surface.

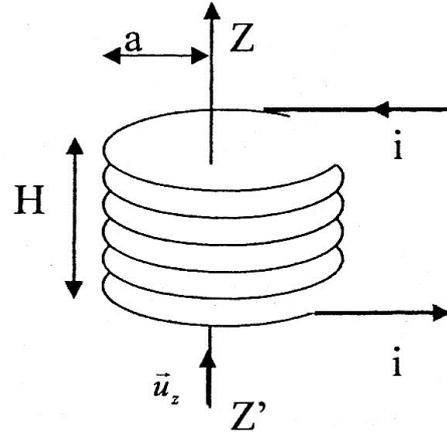
En déduire l'expression de  $\vec{B}_0$ .

## II) Four à induction :

Il est constitué d'une bobine cylindrique formée de  $N$  spires régulièrement espacées, de rayon  $a$ , réparties sur une couche de hauteur  $H$  noyée dans une matrice réfractaire.

Un courant électrique d'intensité  $i = I_m \cdot \cos(\omega t)$  circule dans chaque spire.

**On se place dans le cadre d'un régime électromagnétique quasi-stationnaire : les expressions des champs trouvés dans la partie I) restent valables.**



### II-1) Champ magnétique à l'intérieur du four « vide » :

On assimile cette distribution de courant formée par les  $N$  spires à une distribution surfacique orthoradiale de courant, de densité surfacique  $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_\theta$ ,  $j_s$  étant uniforme.

Les données sont :  $N$ ,  $i$ ,  $H$ ,  $a$ ,  $\mu_0$ .

a) Evaluer  $j_s$  en fonction de  $i$ ,  $N$  et  $H$ .

b)  $\alpha$ - Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}_0$  à l'intérieur.

$\beta$ - On met sa valeur algébrique sous la forme  $B_0 = K I_m \cos(\omega t)$  ; donner l'expression de  $K$ .

### II-2) Terme principal du champ électromagnétique du four « chargé » :

L'intérieur de la bobine est complètement rempli du matériau non ferreux à fondre.

Dans la suite, on fera les hypothèses suivantes :

- Ce matériau est conducteur électrique : il obéit localement à la loi d'Ohm avec la conductivité électrique  $\gamma$  constante et uniforme.

- Les champs électrique et magnétique dans le matériau obéissent aux mêmes équations de Maxwell que dans le vide sauf la relation de Maxwell-Ampère qui s'écrit :  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \left[ \vec{j} + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$ .

- On est en régime électromagnétique quasi-stationnaire.

- On néglige le champ magnétique créé par les courants induits, de sorte que le champ magnétique dans le matériau vaut  $\vec{B}_0$  (avec  $B_0 = K I_m \cos(\omega t)$  trouvé en II-1-b)).

**Les données sont :  $K$ ,  $a$ ,  $H$ ,  $I_m$ ,  $\gamma$  et  $\omega$ .**

a) On cherche le champ électrique induit en un point  $M$  du matériau à la distance  $r$  de l'axe de la bobine sous la forme  $\vec{E}_1 = E_1(r, t) \cdot \vec{u}_\theta$ .

A l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, trouver  $E_1(r, t)$  en fonction de  $r$ ,  $t$  et des données.

b) Rappeler la loi d'Ohm locale.

En déduire l'expression de la densité volumique de courant induit ( $\vec{j}_1$ ) au point  $M$ .

### II-3) Puissance transférée :

- a) Donner l'expression de la puissance volumique locale  $P_v$  cédée par le champ électrique aux porteurs de charge.
- b) Evaluer la puissance instantanée totale transférée au matériau conducteur contenu dans le four.
- c) En déduire la puissance moyenne  $P$  (on donnera l'expression en fonction des données et du volume  $V$  occupé par le matériau).
- d) On évalue les fuites énergétiques par rayonnement à  $\eta = 15 \%$  de l'énergie requise pour la fusion. Déterminer littéralement puis calculer numériquement la durée  $t_f$  de cette fusion ; on donne :
  - $f = 4000 \text{ Hz}$  ;  $I_m = 150 \text{ A}$  ;  $K = 10^{-5} \text{ T.A}^{-1}$  ;  $a = 15 \text{ cm}$  ;  $\gamma = 1,6 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$  ;
  - l'enthalpie massique de fusion du matériau est  $\Delta_{\text{fus}h} = 350 \text{ kJ.kg}^{-1}$  ;
  - Au départ, le matériau est solide à la température de fusion ; sa masse est  $M = 80 \text{ kg}$  et il occupe un volume  $V = 0,03 \text{ m}^3$  supposé quasi invariant pendant toute la fusion.