

## TD00 : Thermodynamique première année

### ThermoSup016. Détente brutale d'un gaz parfait (\*\*)

- À l'état final, l'équilibre mécanique permet d'affirmer que la pression du gaz est égale à la pression extérieure  $p_2 = p_0$ ; le premier principe appliqué au gaz lors de la détente s'écrit :

$$\Delta U = W + Q = W \text{ avec } Q = 0 \text{ car système calorifugé.}$$

La transformation étant monobare, on a :  $W = -p_0(V_2 - V_1)$ ; d'autre part, pour une mole de gaz parfait de coefficient  $\gamma$ , la variation d'énergie interne s'écrit :

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = -p_0(V_2 - V_1) = -p_0V_2 + p_0V_1$$

On utilise la loi des gaz parfaits pour faire apparaître les températures dans le membre de droite :  $p_0V_2 = p_2V_2 = RT_2$  et  $p_0V_1 = xp_1V_1 = xRT_1$  et finalement :

$$\frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = -RT_2 + xRT_1$$

Ce qui donne après simplification :

$$T_2 = T_1 \left( \frac{1 + x(\gamma - 1)}{\gamma} \right)$$

- La loi des gaz parfaits écrite à l'instant initial et à l'instant final donne :

$$p_0V_2 = RT_2 \quad \text{et} \quad p_1V_1 = \frac{p_0V_1}{x} = RT_1 \quad \text{soit} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{xV_2}{V_1}$$

C'est à dire pour le volume final :

$$V_2 = V_1 \left( \frac{1 + x(\gamma - 1)}{x\gamma} \right)$$

### ThermoSup047. Bilan entropique de la formation de glaçons (\*\*)

- Le congélateur impose la température finale du système. **L'eau est sous forme de glace à la température  $T_2$ .**
- On décompose la transformation en trois étapes : refroidissement de l'eau liquide de  $T_1$  à  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ , solidification de l'eau à  $T_0$ , puis refroidissement de la glace jusqu'à la température  $T_2$  :

$$\Delta S = 12 \times m \left[ c_L \ln \left( \frac{T_0}{T_1} \right) + \frac{-l_f}{T_0} + c_s \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \right]$$

Application numérique :

$$\Delta S = 12 \times 0,015 \times \left[ 4,18 \times \ln \left( \frac{273}{298} \right) + \frac{-333}{273} + 2,09 \times \ln \left( \frac{255}{273} \right) \right]$$

$$\Delta S = -0,311 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$$

Le système n'est pas isolé, la variation d'entropie peut avoir un signe quelconque.

- La transformation se fait au contact de l'intérieur du congélateur à  $T_2$ ,  $S_e = \frac{Q}{T_2}$ , avec  $Q$  le transfert thermique reçu par les glaçons.

Pour une transformation monobare, le transfert thermique s'identifie à la variation d'enthalpie :

$$S_e = \frac{12 \times m [c_L(T_0 - T_1) + (-l_f) + c_s(T_2 - T_1)]}{T_2} \Rightarrow S_e = -0,335 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\text{On en déduit : } S_c = \Delta S - S_e \Rightarrow S_c = 24 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

La transformation est fondamentalement irréversible, du fait de la différence de température initiale entre l'eau liquide et l'intérieur du congélateur.

### ThermoSup043. Diagramme ( $P, h$ ) de l'eau (\*)

- L'enthalpie de vaporisation étant positive, à pression fixée, l'enthalpie de la phase gazeuse est nécessairement supérieure à l'enthalpie de la phase liquide. **Le liquide se situe sur la gauche du diagramme, le domaine diphasé au centre et la vapeur sur la partie droite du diagramme.**
- Pour un gaz parfait (gaz réel à basse pression), l'enthalpie massique n'est fonction que de la température. **Les isothermes se confondent avec des isenthalpiques, c'est à dire des droites verticales.** On constate que ceci n'est plus valable lorsque la pression dépasse 10 à 100 bars (le modèle GP ne s'applique plus).

Pour un liquide, l'enthalpie massique n'est fonction que de la température, **les isothermes se confondent avec des isenthalpiques, c'est à dire des droites verticales.**

Pour un corps pur diphasé, fixer la température impose la pression. **Une isotherme est donc une isobare et les isothermes sont donc des droites horizontales.**

- Partons d'un kilogramme de liquide, l'enthalpie de vaporisation s'identifie à la différence d'enthalpie entre le liquide pur et la vapeur sèche à  $100^\circ\text{C}$ , c'est à dire, par lecture graphique :  $h_{L \rightarrow V} \approx 2700 - 400$ ,

$$h_{L \rightarrow V} = 2,3 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

De plus pour un changement d'état à la température  $T$  :

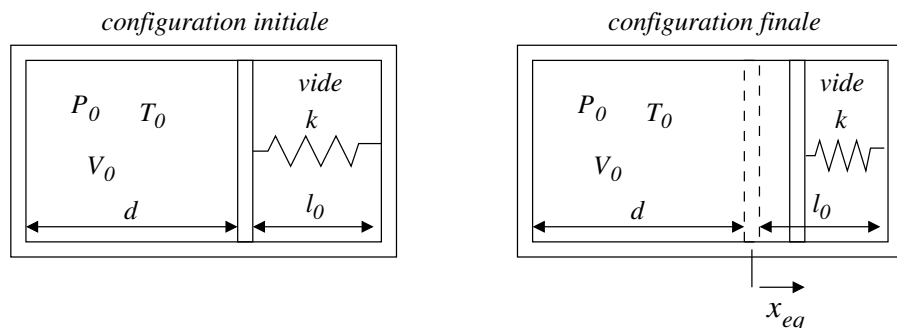
$$s_{L \rightarrow V} = \frac{h_{L \rightarrow V}}{T} = \frac{2300}{373} \Rightarrow s_{L \rightarrow V} = 6,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

4. Partant d'un kilogramme de liquide pur, le point d'enthalpie massique  $h = 1500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  représente une variation d'enthalpie massique de  $\Delta h = 1500 - 400 = 1100 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ , c'est à dire pour le titre massique en vapeur :

$$w_v = \frac{1100}{2300} \Rightarrow \boxed{w_v = 48\%}$$

### ThermoSup062 - Équilibre d'un piston (\*\*)

Le compartiment de droite étant vide et le ressort étant initialement au repos, lorsqu'on libère la contrainte, la force de pression à gauche pousse le piston vers la droite.



Il y a *a priori* **trois inconnues** : le déplacement  $x_{eq}$ , la pression finale  $P_f$  et la température finale  $T_f$  ; on pourrait ajouter le volume du compartiment de gauche mais il est trivialement lié à  $x_{eq}$ . Nous avons donc besoin de trois équations pour résoudre le problème : une **équation mécanique** (ici un équilibre de forces), une **équation thermodynamique** (premier principe de la thermodynamique) et une **équation d'état** caractérisant le fait que le gaz est supposé parfait.

→ *équilibre mécanique* : la paroi est à l'équilibre sous l'effet de deux forces, la force de pression et la force du ressort, les normes de ces forces sont donc égales :

$$P_f S = k x_{eq}$$

→ *équilibre thermodynamique* : on applique un premier principe à l'ensemble constitué du gaz dans le compartiment de gauche, de la paroi mobile et du ressort. La boîte étant calorifugée et indéformable, ce système est isolé et le premier principe conduit à :

$$\Delta(U + E_c + E_p) = W^{ext} + Q^{ext} = 0$$

L'énergie interne est celle du gaz parfait diatomique pour lequel on applique la première loi de Joule et l'énergie potentielle est celle du ressort, en conséquence :

$$\frac{5}{2} nR (T_f - T_0) + \frac{1}{2} k x_{eq}^2 = 0$$

→ *équation d'état* : pour éliminer le nombre de moles de l'équation précédente, il

reste à utiliser la relation des gaz parfaits :

$$\frac{5}{2} (P_f V_f - P_0 V_0) + \frac{1}{2} k x_{eq}^2 = 0$$

En utilisant l'équilibre mécanique et les propriétés géométriques :

$$P_f V_f - P_0 V_0 = \frac{k x_{eq}}{S} \times S (d + x_{eq}) - P_0 V_0 = k x_{eq} (d + x_{eq}) - P_0 S d$$

On aboutit à une équation du second degré :

$$6k \times x_{eq}^2 + 5kd \times x_{eq} - 5P_0 S d = 0$$

On conserve finalement la racine positive :

$$x_{eq} = \frac{-5kd + \sqrt{25k^2 d^2 + 120P_0 S k d}}{12k} = \frac{d}{12} \left( -5 + \sqrt{25 + 120 \frac{P_0 S}{kd}} \right)$$

### ThermoSup044. L'air, un gaz parfait ? (\*\*)

1. Sur le graphique, le point A est l'intersection de l'isotherme  $T = 20^\circ\text{C}$  et de l'isobare  $P = 10^5 \text{ Pa}$ .
2. On constate que le point A est situé entre les courbes d'isovolume 0,8 et 1,0  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}$ . Vérifions que ce résultat est compatible avec la formule du gaz parfait :

$$PV = nRT = \frac{mRT}{M} \Rightarrow v = \frac{V}{m} = \frac{RT}{MP}$$

Application numérique au point A :

$$v_A = \frac{8,31 \times 293,15}{29 \times 10^{-3} \times 10^5} \Rightarrow \boxed{v_A = 0,84 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}}$$

À la précision de lecture près, cette valeur semble tout à fait en accord avec l'indication des courbes d'isovolume. Sans surprise, à pression et température ambiantes, **le modèle du gaz parfait est applicable**.

3. Pour un gaz parfait, l'enthalpie massique ne dépend que de la température. Les isothermes doivent donc se confondre avec les isenthalpiques et donc être représentées par des droites verticales.

On constate que ce résultat est bien vérifié à basse pression, en particulier au point A, mais qu'il est mis en défaut à plus haute pression  $P > 10 \text{ bars}$  lorsque les interactions entre particules ne sont plus négligeables.

4. Par définition, la capacité thermique à pression constante  $c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P$ .

Il s'agit donc d'évaluer de combien varie l'enthalpie massique du système au voisinage du point A pour une variation de température donnée et ceci à **pression constante**.

Ainsi, en restant sur l'isobare  $P = 10^5 \text{ Pa}$  associée au point A, on constate

que la température passe de 0°C à 40°C quand l'enthalpie massique passe de 400 à 440 kJ · kg<sup>-1</sup> :

$$c_p = \frac{40 \times 10^3}{40} \Rightarrow c_p = 1,0 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

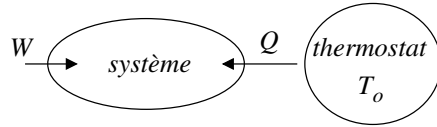
Pour un gaz parfait diatomique :

$$c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) M} \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{1 - \frac{R}{Mc_p}} = \frac{1}{1 - \frac{8,31}{0,029 \times 1,0 \times 10^3}}$$

On en déduit  $\gamma = 1,4$  en accord avec la valeur de ce coefficient pour un gaz parfait diatomique.

### ThermoSup073 - Énoncé de Kelvin (\*\*)

*A priori*, le système reçoit un travail  $W$  de l'extérieur et un transfert thermique  $Q$  d'une unique source de chaleur (thermostat) à la température  $T_0$ . Ces deux échanges thermiques sont algébriques.



Appliquons les deux principes de la thermodynamique **sur un cycle** à cette machine hypothétique :

→ Premier principe :  $0 = \Delta U = W + Q \Rightarrow W = -Q$ .

→ Second principe :  $0 = \Delta S = \frac{Q}{T_0} + S_c$  avec  $S_c \geq 0$

On en déduit  $Q \leq 0$  et finalement, d'après le premier principe,  $W \geq 0$ .

Comme  $W \geq 0$ , le système reçoit effectivement un travail de l'extérieur, **le système est donc nécessairement récepteur**, ce ne peut pas être un moteur ce qui prouve l'énoncé historique de Kelvin.

Ainsi une machine cyclique qui prendrait l'énergie thermique de la mer (en faisant des glaçons) pour en extraire un travail mécanique faisant avancer un navire ne peut exister.

Inversement un être humain est en général au contact d'une seule source de chaleur (l'atmosphère) et peut produire un travail mécanique, simplement l'être humain ne fonctionne pas de manière cyclique.

### ThermoSup029. Rendement d'un cycle (\*)

1. Appliquons l'équation des gaz parfaits en  $A$  et en  $B$  :

$$p_0 \times 2V_0 = RT_A = RT_0 \quad \text{et} \quad p_0 V_0 = RT_B$$

On en déduit :  $T_B = T_0/2$

La transformation entre  $C$  et  $A$  est adiabatique et réversible, la loi de Laplace s'applique pour un gaz parfait :

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \quad \text{soit} \quad T_C = T_A \left( \frac{V_A}{V_C} \right)^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1} T_0$$

2. La détente s'effectue à haute pression et la compression à plus basse pression ; sur un cycle le gaz cède un travail à l'extérieur, il s'agit donc d'un moteur.

Le gaz est en contact avec la source froide entre  $A$  et  $B$  donc  $Q_{AB} = Q_F$  (la diminution de volume à pression constante s'accompagne d'une diminution de température) ; le gaz est en contact avec la source chaude entre  $B$  et  $C$  et donc  $Q_{BC} = Q_c$  (le contact avec la source chaude entraîne à volume constant une augmentation de pression).

Pour un moteur, on sait que le rendement est donné par :

$$\eta = \frac{-W}{Q_c} = \frac{Q_F + Q_c}{Q_c} \Rightarrow \eta = 1 + \frac{Q_{AB}}{Q_{BC}}$$

3. La transformation  $AB$  est une transformation isobare, le transfert thermique s'identifie à la variation d'enthalpie, selon :

$$Q_{AB} = \Delta H_{AB} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} (T_B - T_A)$$

La transformation  $BC$  est une transformation isochore, le transfert thermique s'identifie à la variation d'énergie interne, selon :

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_C - T_B)$$

On en déduit le rendement :

$$\eta = 1 + \frac{\gamma(T_B - T_A)}{T_C - T_B}$$

On utilise alors  $T_A = T_0$ ,  $T_B = T_0/2$  et  $T_C = 2^{\gamma-1} T_0$  pour en déduire :

$$\eta = 1 - \frac{\gamma}{2^{\gamma-1}} = 0,15$$

4. Le gaz est chauffé jusqu'à  $T_C = 2^{\gamma-1} T_0$  qui constitue la température de la source chaude et refroidi jusqu'à  $T_B = T_0/2$ , température de la source froide ; le rendement de Carnot est donné par :

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_F}{T_c} = 1 - \frac{T_B}{T_C} \Rightarrow \eta_{max} = 1 - \frac{1}{2^{\gamma}} = 0,62$$

### ThermoSup030. Centrale thermique (\*\*)

1. Le rendement de la machine de Carnot est  $\eta_{Carnot} = 1 - T_F/T_C$ ; le rendement  $\eta$  de la centrale vaut donc :

$$\eta = 0,60 \left( 1 - \frac{273,15 + 15}{700} \right) = 35\%$$

2. On sait que le rendement d'un moteur est donné par  $\eta = -W/Q_C$ ; et sachant que  $Q_C = -Q_F - W$  on en déduit :

$$\eta = \frac{-W}{-Q_F - W} \quad \text{soit} \quad Q_F = \frac{W(1 - \eta)}{\eta}$$

On sait que pour un moteur  $W < 0$  et  $Q_F < 0$ , donc en considérant les valeurs absolues :  $|Q_F| = \frac{|W|(1 - \eta)}{\eta}$ .

En une durée  $\tau = 1$  s, la centrale fournit  $W = P \times \tau$ ; le transfert thermique reçu par l'eau du fleuve en cette durée  $\tau$  vaut donc :

$$Q_2 = \frac{P \times \tau(1 - \eta)}{\eta} = \frac{1,0 \times 10^9(1 - 0,35)}{0,35} \Rightarrow \boxed{Q_2 = 1,86 \text{ GJ}}$$

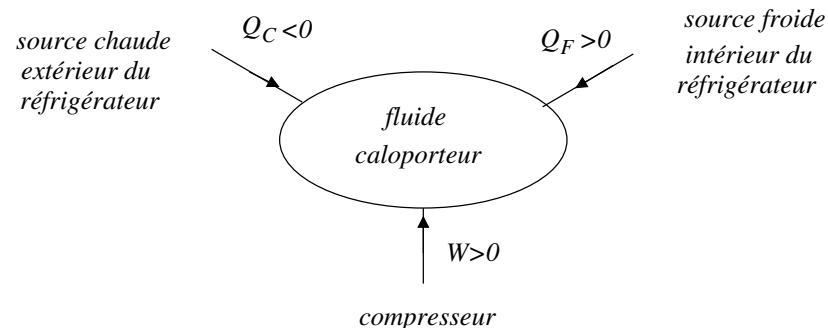
3. Durant cette durée  $\tau$ , il y a un volume  $D_v \tau$  d'eau qui est passé au contact de la centrale, si le transfert thermique sert en totalité à chauffer ce volume d'eau, on en déduit :

$$D_v \tau \rho c \Delta\theta = Q_2$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{Q_2}{D_v \tau \rho c} = \frac{1,86 \times 10^9}{400 \times 10^3 \times 4,18 \times 10^3} \Rightarrow \boxed{\Delta\theta = 1,1^\circ\text{C}}$$

### ThermoSup059 - Machine réfrigérante (\*)

1. Le système est constitué du fluide réfrigérant. La source chaude désigne l'extérieur, en pratique la pièce, la source froide représente l'intérieur du réfrigérateur. Dans le cas d'un fonctionnement réel, le fluide est plus chaud que la source chaude à son contact et le transfert thermique est évacué vers la pièce ( $Q_C < 0$ ), le fluide est plus froid que la source froide à son contact et le transfert thermique s'effectue vers le fluide caloporteur ( $Q_F > 0$ ) ce qui permet de refroidir la source froide. Ceci est rendu possible par la présence d'un compresseur qui apporte un travail mécanique  $W > 0$ .



2. L'efficacité représente l'énergie utile, ici  $Q_F$  car il s'agit d'évacuer l'énergie thermique du réfrigérateur, divisée par l'énergie coûteuse, ici  $W$  le travail du compresseur :

$$e = \frac{Q_F}{W}$$

3. Dans le cas d'un fonctionnement réversible, les deux premiers principes sur un cycle conduisent à :

$$0 = W + Q_C + Q_F \quad \text{et} \quad 0 = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F}$$

On en déduit pour l'efficacité :

$$e = \frac{-Q_F}{Q_C + Q_F} = \frac{-Q_F}{Q_F - T_C \times Q_F/T_F} \Rightarrow \boxed{e = \frac{T_F}{T_C - T_F}}$$

4. En une durée  $\tau$  le compresseur fournit un travail mécanique  $W = P \times \tau$  ce qui permet d'évacuer une énergie thermique  $Q_F = e \times W = e \times P \times \tau$  du réfrigérateur. C'est cette énergie extraite à l'eau qui va la solidifier, une énergie  $Q_F$  extraite permet de solidifier une masse  $m_t$  telle que :

$$m_t \times L_f = Q_F = e \times P \times \tau \Rightarrow \boxed{m_t = \frac{eP\tau}{L_f}}$$

5. Application numérique :

$$e = \frac{263}{45} \Rightarrow \boxed{e = 5,8}$$

$$m_t = \frac{5,84 \times 200 \times 1,0}{333 \times 10^3} \Rightarrow \boxed{m_t = 3,5 \text{ g}}$$

### ThermoSup031. Climatiseur et pseudo-sources (\*\*)

1. Le local cède un transfert  $\delta Q_1$  au fluide, le local reçoit donc  $-\delta Q_1$ ; l'application du premier principe au local lors de cette évolution conduit à :

$$\boxed{CdT = -\delta Q_1} \quad \text{relation (1)}$$

2. Sur un cycle élémentaire  $dS = 0$ ; le fluide échange  $\delta Q_1$  avec le local à  $T$  et  $\delta Q_2$  avec l'extérieur à  $T_0$ , la transformation étant réversible, on peut appliquer l'égalité de Carnot-Clausius :

$$0 = dS = \frac{\delta Q_1}{T} + \frac{\delta Q_2}{T_0} \quad \text{relation (2)}$$

3. La relation (1) s'intègre immédiatement :

$$Q_1 = C(T_0 - T_1)$$

Comme  $T_0 > T_1$ ,  $Q_1 > 0$  le local cède un transfert thermique pour se refroidir.

On reporte la relation (1) dans la relation (2) pour en déduire :

$$\delta Q_2 = T_0 C \frac{dT}{T} \quad \text{donc} \quad Q_2 = CT_0 \ln \left( \frac{T_1}{T_0} \right)$$

4. En supposant que le fluide repasse par les mêmes états lors de chaque cycle élémentaire :  $\delta W + \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0$

Ce qui donne pour l'ensemble du processus :

$$W = -Q_1 - Q_2 = C(T_1 - T_0) + CT_0 \ln \left( \frac{T_0}{T_1} \right) = 970 \text{ kJ}$$

5. On en déduit la puissance moyenne :

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{970 \times 10^3}{3600} = 2,7 \times 10^2 \text{ W}$$