

Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion

Les phénomènes de propagation que nous avons jusqu'à présent considérés (propagation le long d'une corde, ondes acoustiques, propagation d'une onde EM dans le vide) vérifiaient l'équation de d'Alembert. La propagation s'effectuait sans atténuation et, dans le cas d'une onde plane progressive et harmonique, il existait une relation linéaire entre le vecteur d'onde et la pulsation du type $k = \omega/c$ caractérisant le fait qu'une onde se propageait à la célérité c et ceci quelle que soit sa fréquence. On parle alors de propagation non dispersive.

De nombreux phénomènes physiques (décomposition de la lumière blanche par un prisme, atténuation d'un signal au sein d'une fibre optique, ...) mettent en jeu les phénomènes de dispersion ou d'atténuation. C'est l'objet de ce chapitre.

1 Onde dans un milieu linéaire absorbant et dispersif

1.1 Équation modèle

Reprenons l'exemple de la corde vibrante en présence de frottements modélisés par une force de frottement fluide linéique $-\lambda \frac{\partial y}{\partial t}$ opposée à la vitesse.

L'équation de propagation s'écrit alors :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial y}{\partial t}$$

Cette équation de propagation est **linéaire** mais elle diffère de l'équation de d'Alembert par la présence d'une dérivée première par rapport au temps.

En posant $c^2 = T_0/\mu$ et $\tau = \mu/\lambda$, on aboutit à une équation modèle qui décrit la propagation d'une onde dans un milieu linéaire absorbant et dispersif :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

1.2 Forme générique des solutions

L'équation étant linéaire et à coefficients réels, on cherche des solutions sous la forme d'ondes planes harmoniques de la forme :

$$\underline{\psi}(x, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \quad \text{avec } \underline{k} \text{ a priori complexe}$$

Très généralement, une solution quelconque consiste en une superposition d'ondes de ce type.

1.3 Relation de dispersion

On reporte l'expression de $\underline{\psi}(x, t)$ dans l'équation de propagation :

$$-\omega^2 \underline{\psi} + \frac{i\omega}{\tau} \underline{\psi} + c^2 \underline{k}^2 \underline{\psi} = 0$$

On en déduit l'équation de dispersion reliant le vecteur d'onde à la pulsation :

$$\underline{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \frac{i\omega}{\tau c^2}$$

On constate que la relation entre le vecteur d'onde \underline{k} et ω n'est plus linéaire, le vecteur d'onde pouvant de plus s'écrire :

$$\underline{k} = k_r(\omega) + ik_i(\omega)$$

1.4 Interprétation

La fonction d'onde prend alors la forme simplifiée :

$$\underline{\psi}(x, t) = \psi_0 e^{k_i x} e^{i(\omega t - k_r x)}$$

ou tout aussi bien en notation réelle :

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{k_i x} \cos(\omega t - k_r x)$$

→ **Propagation** : $\cos(\omega t - k_r x)$ décrit, pour $k_r > 0$, une onde qui se propage dans le sens des x croissants.

La phase de cette onde est $\varphi = \omega t - k_r x$, on en déduit la vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r(\omega)}$

→ **Absorption** : avec $k_i < 0$, le terme $e^{k_i x}$ décrit une atténuation de l'amplitude de l'onde sur une distance caractéristique $\delta = 1/|k_i|$.

Dans un milieu linéaire absorbant et dispersif, une onde plane harmonique s'écrit

$$\underline{\psi}(x, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \quad \text{avec } \underline{k} = k_r(\omega) + ik_i(\omega)$$

→ k_r , partie réelle du vecteur d'onde, est liée à la vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r}$

Un milieu est **dispersif** si la vitesse de phase est une fonction de la fréquence.

→ k_i , partie imaginaire du vecteur d'onde, est liée à l'absorption qui s'effectue sur une distance caractéristique $\delta = 1/|k_i|$

Remarques :

→ dans le cas général, la vitesse de phase dépend de la fréquence et n'est pas

nécessairement égale à la célérité c , elle peut même être supérieure à celle-ci !
 → Pour un laser, le milieu peut se comporter comme un amplificateur : $k_i > 0$.

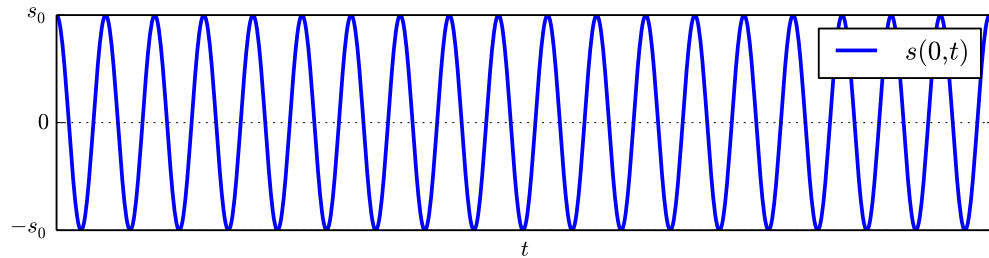
2 Propagation d'un paquet d'onde

Dans cette partie, on considère un milieu **dispersif non absorbant** : le vecteur d'onde est réel $k = k_r(\omega)$.

2.1 Limite physique de l'onde plane harmonique

Une onde plane harmonique et progressive s'écrit, en notation réelle :

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - k_r(\omega)x)$$



Cette onde, d'extension spatio-temporelle infinie, ne peut décrire à elle seule un signal physique localisé dans le temps et l'espace.

2.2 Construction d'une onde localisée

Nous allons montrer qu'il est possible de construire un signal physique en sommant des ondes planes progressives harmoniques.

Superposition de deux ondes harmoniques

On considère deux ondes harmoniques de pulsations voisines :

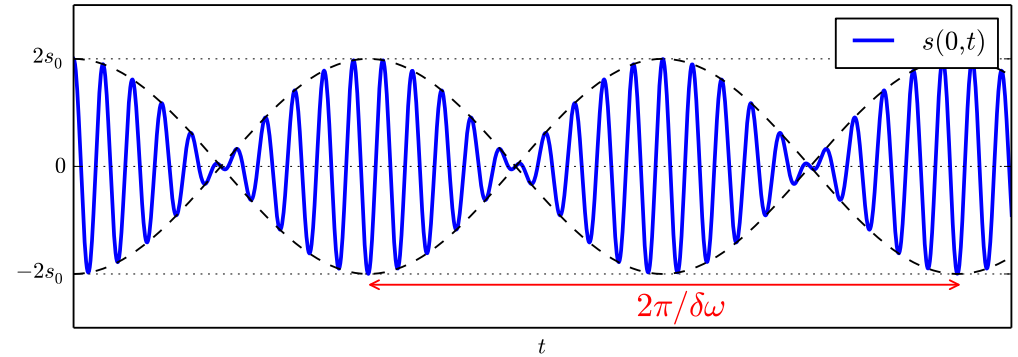
$$s_1(x, t) = s_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{et} \quad s_2(x, t) = s_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

avec $\omega_1 = \omega_0 - \delta\omega$ et $\omega_2 = \omega_0 + \delta\omega$ et, de même, $k_1 = k_0 - \delta k$ et $k_2 = k_0 + \delta k$ sachant que $\delta\omega \ll \omega_0$ et $\delta k \ll k_0$.

Le signal résultant s'écrit alors :

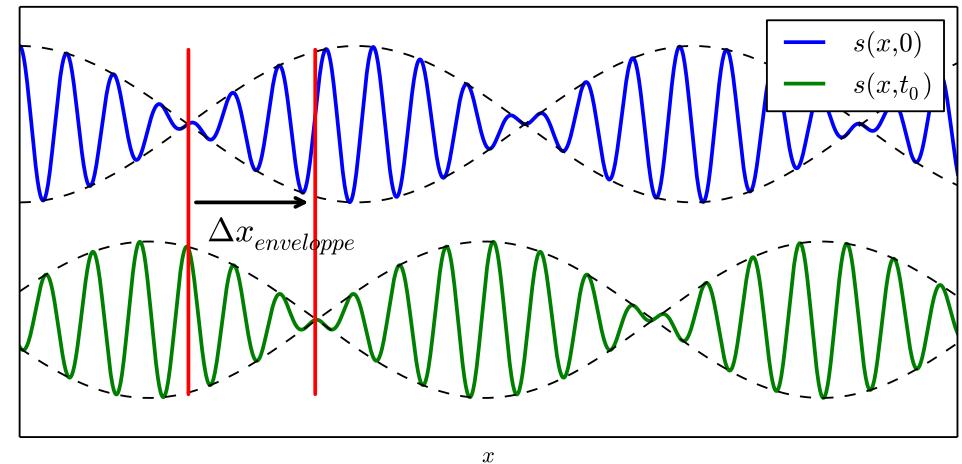
$$s(x, t) = 2s_0 \underbrace{\cos(\delta\omega t - \delta k x)}_{\text{enveloppe}} \underbrace{\cos(\omega_0 t - k_0 x)}_{\text{porteuse}}$$

Plaçons-nous à x fixé. Le signal se décompose en un terme d'oscillation rapide à la pulsation ω_0 , la porteuse, et un terme d'oscillation lente à la pulsation $\delta\omega$, l'enveloppe.



Si l'onde progressive purement monochromatique n'est absolument pas localisée, on peut considérer que la superposition de deux ondes l'est partiellement au niveau des ventres.

Observons la propagation de l'onde au cours du temps



→ la porteuse se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$,

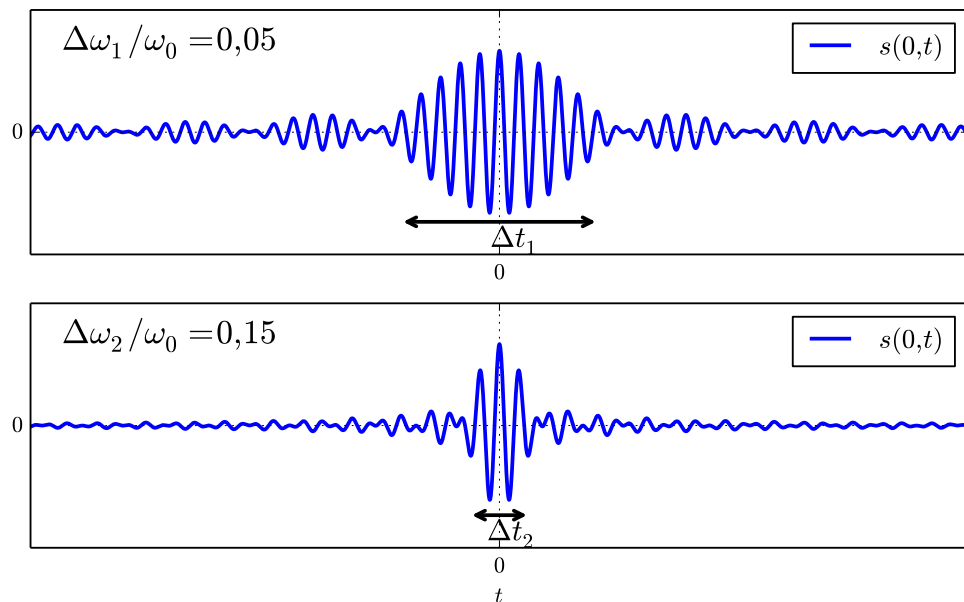
→ l'enveloppe se propage à la vitesse $v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$, appelée **vitesse de groupe**.

2.3 Paquet d'onde

Un paquet d'onde est une superposition d'un nombre infini d'ondes de pulsations ω comprises dans un intervalle $\left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$ avec $\Delta\omega \ll \omega_0$.

→ *Largeur temporelle du paquet d'onde.*

Plaçons-nous à x fixé. La figure ci-dessous illustre ce que l'observateur, placé en $x = 0$, perçoit au cours du temps.



On constate que le signal se localise temporellement (Δt diminue) quand la largeur spectrale augmente.

Essayons d'interpréter qualitativement ce résultat pour un observateur placé en $x = 0$.

→ Onde harmonique : $s(0,t) = s_0 \cos(\omega_0 t)$, l'onde harmonique dont le spectre est composé d'une seule fréquence ($\Delta\omega = 0$) a une extension temporelle infinie.

→ Superposition de deux ondes : si l'extension temporelle reste infinie, on observe une concentration au niveau des ventres.

→ Paquet d'onde : le signal est constitué d'une infinité ondes du type $\cos(\omega t)$ avec $\omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$

★ À $t = 0$ toutes les composantes sont en phase ($\forall t, \omega t = 0$), les composantes s'ajoutent, le signal est maximal.

★ Progressivement, les phases des composantes de pulsation différente se décalent, à l'instant t , $\varphi_{min} = \omega_{min}t$, $\varphi_{max} = \omega_{max}t$, donc $\Delta\varphi = \Delta\omega \times t$.

★ Quand $\Delta\omega \times t = 2\pi$, on peut considérer que les composantes se compensent deux à deux et le signal est alors quasiment nul.

Pour un paquet d'onde, la largeur fréquentielle Δf et la durée temporelle Δt sont reliées par :

$$\Delta f \times \Delta t \simeq 1$$

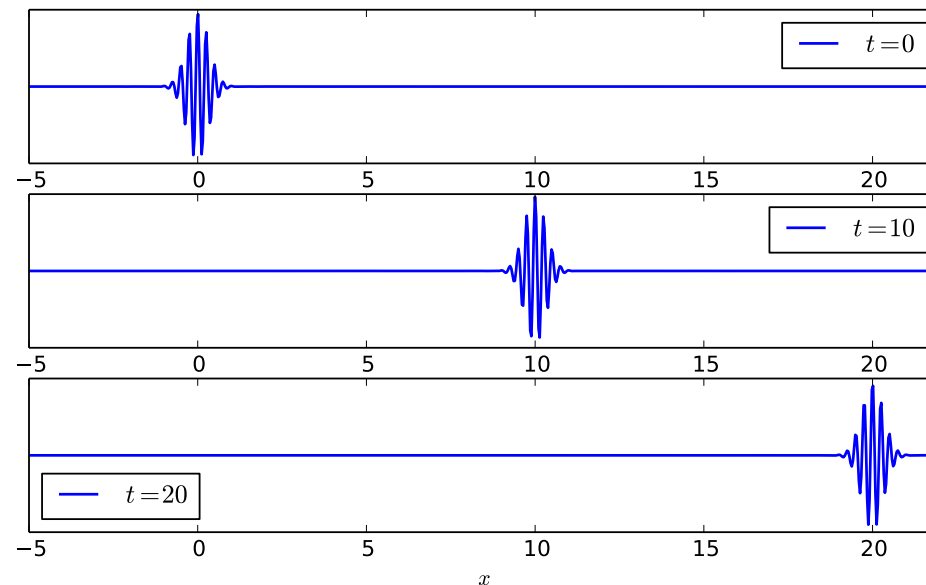
→ *Propagation du paquet d'onde.*

Un paquet d'onde centré sur ω_0 et évoluant dans un milieu peu dispersif se déplace à la **vitesse de groupe** :

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0}$$

La vitesse de groupe est la vitesse de l'enveloppe du paquet d'onde.

Milieu non dispersif (simulation numérique, unités arbitraires)

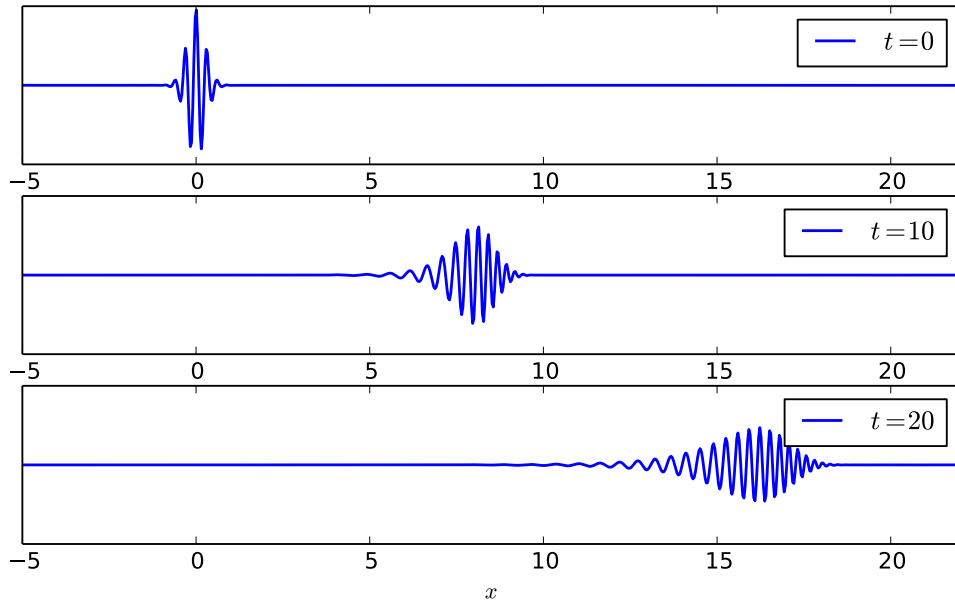


Pour une relation de dispersion de la forme $k = \omega/c$, on a :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \quad \text{et} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c$$

Le milieu est non dispersif, toutes les fréquences se propagent à l'identique, le paquet d'onde se propage sans se déformer.

Milieu dispersif (simulation numérique, unités arbitraires)



Le tracé a été réalisé avec une relation de dispersion de la forme $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}}{c}$.

Avec cette relation, on obtient :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}}} > c \quad \text{et} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}} < c$$

→ Le milieu est dispersif, la vitesse de phase dépend de la fréquence. Chaque composante « chemine » avec sa propre célérité, on observe une déformation du paquet d'onde.

→ L'enveloppe du paquet d'onde se propage à la vitesse de groupe avec $v_g < c$.

Remarque : il est possible de retrouver l'expression de la vitesse de groupe avec un argument qualitatif : l'amplitude est significative si les composantes du signal s'ajoutent de façon positive, autrement dit, si les phases des cosinus sont voisines et donc varient peu autour de la valeur centrale ; cela revient à résoudre :

$$\left(\frac{d(\omega t - kx)}{d\omega} \right)_{\omega_0} = 0 \quad \text{donc} \quad t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0} t$$

3 Application 1. Propagation dans un plasma

3.1 Modèle du plasma

Un plasma est un gaz ionisé formé d'ions positifs (cations) et d'électrons. Au repos, l'ensemble est globalement neutre :

$$\rho = \rho_{cat.} + \rho_{elec.} = 0$$

Le milieu est supposé suffisamment dilué pour que l'on puisse négliger les interactions des particules entre elles. On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique plane progressive et harmonique au sein du plasma.

Le champ électromagnétique va agir *via* la force de Lorentz sur les particules chargées modifiant *a priori* la densité de charge et le vecteur courant qui vont à leur tour *via* les équations de Maxwell être des sources du champ électromagnétique.

Les cations étant beaucoup plus massifs que les électrons ($m_{nucléon} \simeq 1800 m_e$), on supposera les cations fixes pour la suite de l'étude.

3.2 Mise en équation

Structure de l'onde

On considère une OPPH que l'on peut, sans perte de généralité, écrire en notation complexe :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_x$$

Attention que le nombre d'onde k est *a priori* complexe.

Avec ces conventions $\text{div} \vec{E} = 0$ et l'équation de Maxwell-Gauss assure que le milieu reste neutre ($\rho = 0$) même en présence de l'onde.

Expression de la conductivité du milieu

On applique la deuxième loi de Newton à un électron soumis à la force de Lorentz :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Dans le cas d'une OPPH se propageant dans le vide, on sait que $B = E/c$; en supposant que ce résultat reste vrai, au moins en ordre de grandeur, dans le plasma, on en déduit :

$$\left| \frac{\vec{v} \wedge \vec{B}}{\vec{E}} \right| \leq \frac{vB}{E} \simeq \frac{v}{c} \ll 1$$

On peut donc négliger la partie magnétique de la force de Lorentz et, pour les grandeurs complexes harmoniques, l'équation prend la forme :

$$i\omega m \vec{v} = -e \vec{E} \quad \text{donc} \quad \vec{v} = \frac{-e}{i\omega m} \vec{E}$$

Les électrons (charge $-e$, densité particulière n , vitesse \vec{v}) créent une densité volumique de courant \vec{j} telle que :

$$\vec{j} = -en\vec{v} \quad \text{donc} \quad \vec{j} = \underline{\sigma} \cdot \vec{E} \quad \text{avec} \quad \boxed{\underline{\sigma} = \frac{ne^2}{i\omega m}}$$

La conductivité étant un imaginaire pur, le champ électromagnétique ne transmet pas, en moyenne, d'énergie à la matière.

Relation de dispersion

En injectant l'expression du vecteur densité de courant dans l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{\mu_0 ne^2}{i\omega m} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{ne^2}{i\omega m \epsilon_0} \vec{E} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Pour obtenir l'équation de dispersion, on considère le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right) = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{ne^2}{i\omega m \epsilon_0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$$

ou tout aussi bien :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{E} \right) - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{ne^2}{i\omega m \epsilon_0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$$

Comme $\text{div} \vec{E} = 0$, on en déduit :

$$\underline{k}^2 \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{ne^2}{m \epsilon_0} - \omega^2 \right) \vec{E}$$

et finalement la relation de dispersion :

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m \epsilon_0}}$$

ω_p est appelée la **pulsation plasma**.

3.3 Analyse : comportement du plasma

La relation de dispersion fait apparaître le rôle critique joué par la pulsation plasma ω_p . Deux cas se présentent :

→ $\omega < \omega_p$:

Dans ce cas, $\underline{k}^2 < 0$, le nombre d'onde est alors un imaginaire pur de la forme $\underline{k} = \pm i k_2$, ce qui donne pour le champ électrique (en ne conservant que la solution physiquement acceptable) :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t} e^{-k_2 z} \Rightarrow \vec{E} = E_0 \cos(\omega t) e^{-k_2 z} \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad k_2 > 0$$

Le champ électrique s'atténue sur une épaisseur de l'ordre $\delta = 1/k_2$.

L'onde ne se propage pas, il s'agit d'une onde stationnaire spatialement amortie.
On parle **d'onde évanescence**.

Le plasma refuse la propagation des ondes de pulsation ω inférieure à la pulsation plasma.

Remarque : la conductivité étant un imaginaire pur, le champ électromagnétique ne transmet pas en moyenne son énergie au plasma ; comme l'onde n'est pas transmise, il y a nécessairement une onde réfléchie générée par le mouvement des électrons au sein du plasma.

→ $\omega > \omega_p$:

\underline{k} est réel, il n'y a pas d'absorption, l'onde est transmise sans atténuation !

Le plasma est transparent pour les ondes de pulsation supérieure à la pulsation plasma.

Pour une propagation le long des z croissant, on en déduit :

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

Le caractère non-linéaire de $k(\omega)$ traduit le fait que le plasma est un milieu dispersif. On introduit **l'indice de réfraction du milieu** $n(\omega)$ défini très généralement par :

$$\boxed{k = n \times \frac{\omega}{c}}$$

Pour le plasma, l'indice de réfraction vaut $n(\omega) = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$.

On peut également déterminer :

★ la vitesse de phase v_φ :

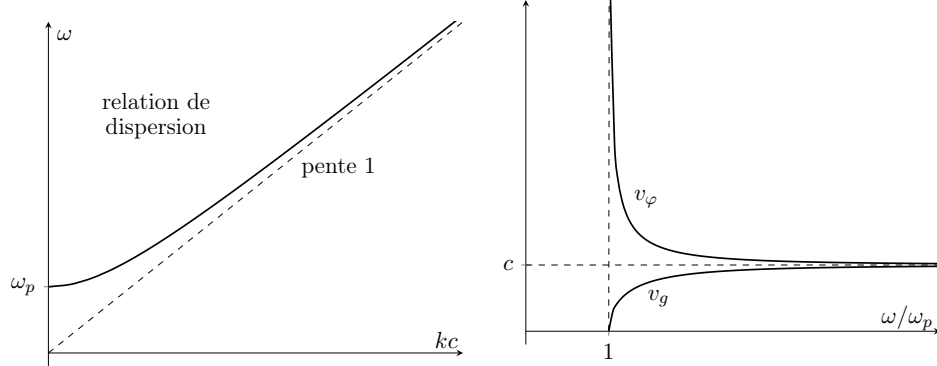
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad \text{donc} \quad v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} > c$$

★ la vitesse de groupe v_g :

$$k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2) \Rightarrow 2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} \quad \text{donc} \quad v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < c$$

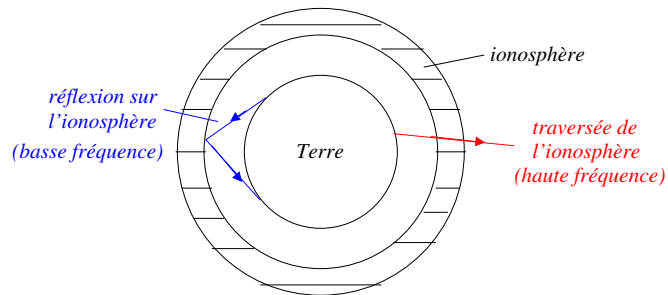
Ces derniers résultats sont synthétisés sous forme graphique :



Remarque : pour $\omega \gg \omega_p$, $k \simeq \frac{\omega}{c}$ et $v_\phi = v_g \rightarrow c$; on retrouve les caractéristiques d'un milieu non dispersif.

Excité à une fréquence très élevée par rapport à sa fréquence propre, le plasma « ne suit plus », il n'interagit plus avec l'onde qui se propage comme si le milieu était le vide.

3.4 Application : ionosphère et communication radio



L'ionosphère est une couche supérieure de l'atmosphère située entre 85 et 600 km d'altitude. Cette zone se caractérise par une pression très faible (inférieure au pascal) et une ionisation importante due au rayonnement solaire ultraviolet.

Avec une densité électronique $n \simeq 10^{11} \text{ m}^{-3}$, l'ionosphère a une fréquence plasma

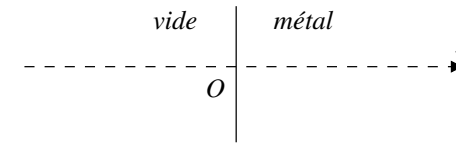
$$\nu_p \simeq 3 \text{ MHz (soit } \lambda_p = \frac{c}{\nu_p} \simeq 100 \text{ m)}.$$

En conséquence, les signaux de basse fréquence (grande longueur d'onde) vont se réfléchir sur l'ionosphère, permettant des communications radio à l'échelle d'un pays ou d'un continent (radio AM par exemple).

En revanche si l'onde doit traverser l'ionosphère (communication avec des satellites), il faut utiliser des fréquences supérieures à la pulsation plasma.

4 Application 2. Effet de peau

On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique harmonique plane progressive de la forme $\vec{E} = E_0 \exp(i\omega t - ikz)\vec{u}_x$ dans un conducteur métallique de conductivité γ réelle, le conducteur occupant le demi-espace $z > 0$.



4.1 Mise en équations

Densité volumique de charge

En couplant l'équation de conservation de la charge, l'équation de Maxwell-Gauss et la loi d'Ohm locale, on obtient :

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \gamma \text{div} \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Toute fluctuation de la densité de charge $\rho(0) = \rho_0$ est atténuée en une durée de l'ordre de τ :

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$$

Pour le cuivre $\tau \simeq 10^{-18} \text{ s}$, en conséquence, tant que la fréquence de l'onde est faible devant 10^{15} Hz , on pourra supposer que **le milieu conducteur est neutre à tout instant**.

Équation de Maxwell-Ampère

$$\text{Très généralement} \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Dans le cas présent, l'évaluation du rapport du courant de conduction et du courant de déplacement conduit à :

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|} \sim \frac{\|\gamma \vec{E}\|}{\|\varepsilon_0 \omega \vec{E}\|} \sim \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 2\pi f} \simeq \frac{10^{17}}{f}$$

Pour les fréquences considérées $f < 10^{15}$ Hz, le **courant de déplacement est négligeable vis à vis du courant de conduction**, on en déduit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Équation de propagation

On obtient l'équation de propagation en considérant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{or } \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

Le champ électrique vérifie l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On reconnaît là une **équation de diffusion**. L'équation est formellement identique à celle obtenue pour une onde de température dans le sol.

Relation de dispersion

L'équation de propagation étant linéaire, elle s'applique à la représentation complexe du champ : $\vec{E} = E_0 \exp(i\omega t - ikz)\vec{u}_x$

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow -k^2 = i\mu_0 \gamma \omega \Rightarrow \boxed{k^2 = -i\mu_0 \gamma \omega}$$

Le vecteur d'onde est complexe, la partie imaginaire traduit l'absorption due à l'effet Joule au sein du métal.

4.2 Analyse

Épaisseur de peau

Sachant que $-i = e^{-i\pi/2}$, on obtient :

$$k^2 = \mu_0 \gamma \omega e^{-i\pi/2} \Leftrightarrow \underline{k} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} e^{-i\pi/4} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)$$

Physiquement, on ne conserve dans le cas présent que la solution positive compatible avec une atténuation de l'onde lors de la propagation :

$$\underline{k} = \frac{(1-i)}{\delta} \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}}$$

La distance δ est appelée « **épaisseur de peau** » et représente l'épaisseur caractéristique sur laquelle le champ électromagnétique pénètre dans le conducteur.

f (Hz)	50	10^3	10^6	10^9
δ (m)	9×10^{-3}	2×10^{-3}	6×10^{-5}	2×10^{-6}

→ L'épaisseur de peau décroît avec la fréquence ; si le champ électrique et le vecteur courant peuvent exister en volume dans les fils électriques à 50 Hz, ils se concentrent à la périphérie à plus haute fréquence ce qui a pour effet de diminuer la section effective du fil, d'augmenter la résistance et les pertes par effet Joule, → pour l'émission d'une onde électromagnétique à 1 MHz ou à 1 GHz, une antenne creuse fera parfaitement l'affaire,

→ attention que le raisonnement mené suppose des ondes de fréquence inférieure à 10^{15} Hz, des ondes de plus haute fréquence pourront se comporter différemment (transparence ultraviolette des métaux).

Expression du champ électromagnétique

À l'aide de l'expression de \underline{k} , on en déduit :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

Bien que \underline{k} soit complexe, l'onde étant plane, harmonique et progressive :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k} \vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{(1-i)}{\omega \delta} \vec{u}_z \wedge E_0 e^{i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta} \vec{u}_x$$

Avec $(1-i) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$, on en déduit pour la grandeur réelle :

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{\omega \delta} E_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y$$

Dans le métal, le champ électromagnétique est associé à une onde plane progressive et harmonique qui s'atténue sur une distance caractéristique δ . Il en est de même du vecteur densité de courant avec $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

Aspects énergétiques

Connaissant les expressions réelles des champs, on peut alors calculer le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2 \sqrt{2}}{\omega \delta \mu_0} e^{-2z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_z$$

Avec $\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(2\omega t - 2\frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4} \right]$, on obtient pour la moyenne du vecteur de Poynting :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\omega \delta \mu_0} e^{-2z/\delta} \vec{u}_z$$

L'énergie étant dissipée au sein du conducteur, l'onde transmise transporte de moins en moins d'énergie à mesure que z augmente.

4.3 Cas limite du conducteur parfait

À la limite où $\gamma \rightarrow +\infty$, l'épaisseur de peau tend vers zéro, les champs \vec{E} et \vec{B} sont alors nuls dans le volume du conducteur. Il en est de même des courants qui se concentrent à la surface du métal. L'onde ne peut pénétrer dans le conducteur parfait, elle est entièrement réfléchie.

À la limite où $\gamma \rightarrow +\infty$, on retrouve le cas de la réflexion sur un conducteur parfait traité dans le chapitre précédent.

Capacités exigibles :

→ Relation de dispersion :

Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles de propagation.

Établir la relation de dispersion.

Lier la partie réelle de k à la vitesse de phase, la partie imaginaire de k à une dépendance spatiale de l'amplitude.

Définir la notion de milieu dispersif.

→ Paquet d'onde :

Calculer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.

Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre.

→ Cas d'un conducteur ohmique de conductivité réelle : effet de peau :

Repérer une analogie formelle avec les phénomènes de diffusion.

Établir la relation de dispersion.

Associer l'atténuation de l'onde à une dissipation d'énergie.

Citer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à 50 Hz.

Modèle du conducteur parfait en présence d'un champ électromagnétique variable.

→ Modèle de la conductivité électrique dans un plasma :

Décrire le modèle de la conduction électrique dans un plasma.

Construire une conductivité complexe en justifiant les approximations.

Associer le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance échangée entre le champ et les porteurs.

Établir la relation de dispersion dans le plasma.

Identifier une onde évanescente (onde stationnaire spatialement amortie).

Expliquer la notion de fréquence de coupure et donner son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère.