

TD07 : électrostatique (correction)

EM001. Potentiel dans le plan médiateur d'un doublet (*)

- Le potentiel V est égal à la somme des potentiels créés par chacune des charges prises isolément, soit en un point $M(y)$ de l'axe :

$$V(M) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + y^2}}$$

- L'axe (Oy) est un axe de symétrie de la distribution, en un point de cet axe, le champ \vec{E} est selon cet axe, soit $\vec{E}(M) = E_y\vec{u}_y$; connaissant $V(y)$, on détermine alors E_y :

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{soit} \quad \vec{E}(M) = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)^{3/2}}\vec{u}_y$$

- La charge située en A crée un champ électrostatique en M :

$$\vec{E}_A(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)}\vec{u}_{AM}$$

Le champ résultant étant selon (Oy) , seule la composante selon (Oy) est à considérer :

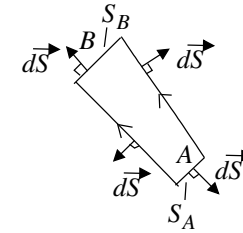
$$E_{A,y}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)}\vec{u}_{AM} \cdot \vec{u}_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)} \times \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

Le point B étant symétrique de A par rapport à l'axe (Oy) , il crée un champ électrique ayant même composante selon Oy , au final :

$$\vec{E}(M) = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)^{3/2}}\vec{u}_y$$

EM013. Analyse d'une carte de champ (*)

- Les lignes de champ électrique fuient les **deux fils chargés positivement sur les côtés**, le fil au centre où les lignes de champ convergent est chargé négativement.
- On constate que, loin des fils, les lignes de champ sont toutes sortantes, ce qui assure une charge globale positive. Pour s'en assurer, on peut appliquer le théorème de Gauss sur un cylindre de grand rayon, $Q_{int} = \epsilon_0 \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} > 0$.
- On considère la surface de Gauss qui s'appuie sur le tube de champ suivant :



L'application du théorème de Gauss dans cette région vide de charge conduit à :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad -E_A \times S_A + E_B \times S_B = 0$$

Avec $S_B \approx 2S_A$, on en déduit $E_B \approx 50 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

EM014. Cylindre chargé en surface (**)

- Soit M un point de l'espace, les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Au point M , le champ électrique \vec{E} est contenu dans ces plans et donc dans leur intersection, il est donc radial ; de plus la distribution est invariante par toute rotation d'angle θ et toute translation selon Oz , la composante radiale du champ ne dépend que de la distance à l'axe :

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$$

- On choisit comme surface de Gauss, un cylindre d'axe Oz , de rayon r et de hauteur h :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r(r) \times 2\pi r h$$

En effet, sur les bases inférieure et supérieure du cylindre, le champ électrique est perpendiculaire au vecteur surface, le flux se limite donc au flux à travers la surface latérale.

★ pour $r < R$, $Q_{int} = 0$ donc $E_r(r) = 0$

★ pour $r > R$, $Q_{int} = \sigma \times 2\pi R \times h$ donc $E_r(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$

- On utilise l'expression valable en $r < R$ (resp. $r > R$) pour évaluer $\vec{E}(R_-)$ ($\vec{E}(R_+)$) :

$$\vec{E}(R_+) - \vec{E}(R_-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_r - \vec{0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_r$$

- Comme $E_z = 0$ et $E_\theta = 0$, $V(r, \theta, z) = V(r)$

★ À l'intérieur de la sphère :

$$E_r(r) = -\frac{dV}{dr} = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{V(r) = cste = V(R) = V_0}$$

★ À l'extérieur de la sphère :

$$E_r(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \quad \text{donc} \quad V(r) = \frac{-\sigma R}{\varepsilon_0} \ln(r) + cste$$

Avec $V(R) = V_0$, on en déduit $\boxed{V(r) = V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right)}$

EM004. Champ créé par une couche uniformément chargée (**)

1. Soit M un point de l'espace, les plans $(M, \vec{u}_z, \vec{u}_x)$ et $(M, \vec{u}_z, \vec{u}_y)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Au point M , le champ électrique \vec{E} est contenu dans ces plans et donc dans leur intersection, il est donc selon \vec{u}_z ; de plus la distribution est invariante par toute translation selon Ox et Oy , la composante du champ ne dépend donc que de z :

$$\boxed{\vec{E} = E(z)\vec{u}_z}$$

2. $\Pi = (xOy)$ est un plan de symétrie de la distribution de charges :

$$\boxed{E(z) = -E(-z)}$$

3. On considère comme surface de Gauss un cylindre dont la surface supérieure d'aire S se trouve en z et la surface inférieure en $-z$; on applique le théorème de Gauss sur cette surface sachant que le flux de \vec{E} à travers la surface latérale est nul (car \vec{E} est selon \vec{u}_z et le vecteur normal à la surface latérale du cylindre est \vec{u}_r) :

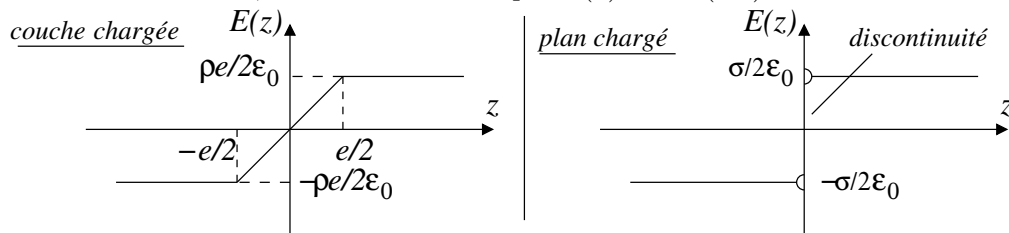
$$\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(z)\vec{u}_z \cdot S\vec{u}_z + E(-z)\vec{u}_z \cdot (-S\vec{u}_z) = 2E(z)S$$

★ pour $z > e/2$, $Q_{int} = \rho \times Se$ donc $\boxed{E(z) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0}}$

★ pour $0 < z < e/2$, $Q_{int} = \rho \times S \times 2z$ donc $\boxed{E(z) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}}$

4. Allure de la fonction $E(z)$:

Pour les $z < 0$, on a utilisé le fait que $E(z) = -E(-z)$:



5. Dans ce cas de figure on applique les formules valables à l'extérieur de la distribution en posant $\sigma = \rho \times e$ et on retrouve le cas limite du plan infini chargé en surface :

$$z > 0 \quad \boxed{\vec{E}' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z} \quad \text{et} \quad z < 0 \quad \boxed{\vec{E}' = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z}$$

EM119. Énergie électrostatique (**)

On assimile le proton à une boule de rayon R et portant une charge e uniformément répartie en volume selon une densité de charges ρ . L'application du théorème de Gauss (Cf. cours) conduit à :

$$- \forall r \geq R, \quad \vec{E}_{ext} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r; \quad \forall r \in [0, R], \quad \vec{E}_{int} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{u}_r = \frac{er}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \vec{u}_r.$$

L'énergie électrostatique est l'intégrale de la densité volumique d'énergie électrostatique, $\omega_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ étendue à tout l'espace :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \iiint_{\text{espace}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\varphi \\ \Leftrightarrow \mathcal{E} &= \int_{r=0}^R \frac{\varepsilon_0 E_{int}^2}{2} \times 4\pi r^2 dr + \int_{r=R}^{\infty} \frac{\varepsilon_0 E_{ext}^2}{2} \times 4\pi r^2 dr \end{aligned}$$

Il reste à effectuer l'intégration sur les deux domaines :

$$\rightarrow \mathcal{E}_{int} = \int_{r=0}^R \frac{\varepsilon_0}{2} \times \frac{e^2 r^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 R^6} \times 4\pi r^2 dr = \frac{e^2}{40\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\rightarrow \mathcal{E}_{ext} = \int_{r=R}^{\infty} \frac{\varepsilon_0}{2} \times \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 r^4} \times 4\pi r^2 dr = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

On en déduit :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{int} + \mathcal{E}_{ext} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{3}{5} \times \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

Application numérique : le rayon du proton est de l'ordre de 10^{-15} m

$$- \mathcal{E} = \frac{3}{5} \times \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3}{5} \times \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{4\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 10^{-15}} \Rightarrow \mathcal{E} \approx 1,4 \times 10^{-13} \text{ J};$$

$$- \mathcal{E}_m = m_p c^2 = 1,67 \times 10^{-27} \times (3,0 \times 10^8)^2 = 1,5 \times 10^{-10} \text{ J}.$$

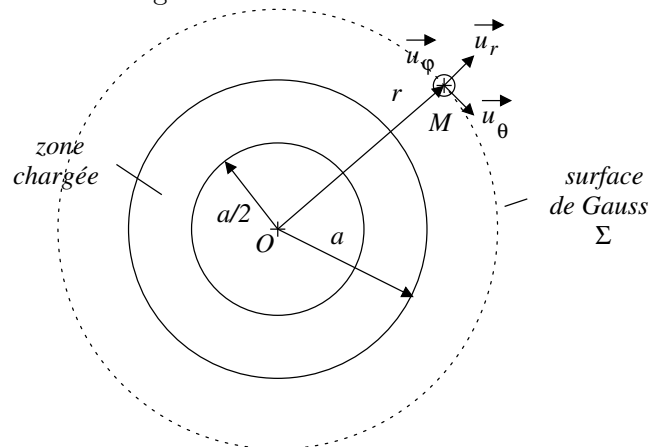
L'énergie électrostatique représente donc de l'ordre de 0,1% de l'énergie de masse.

EM142. Boule chargée en volume (ESM 2019,**)

1. Cf. cours. Le théorème de Gauss découle de l'équation locale de Maxwell-Gauss qui est la même en régime statique ou en régime variable. **Le théo-**

rème de Gauss s'applique donc tout aussi pour les régimes dépendant du temps que pour les régimes statiques.

2. Distribution de charges :



3. La charge s'obtient par intégration de la densité volumique de charges au sein du volume intérieur à la sphère :

$$Q(r) = \iiint \rho(P) dv_p = \int_{\tilde{r}=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho(\tilde{r}) \times d\tilde{r} \times \tilde{r} d\theta \times \tilde{r} \sin(\theta) d\varphi$$

$$\Leftrightarrow Q(r) = \int_{\tilde{r}=0}^r \rho(\tilde{r}) \times 4\pi \tilde{r}^2 d\tilde{r}$$

— pour $r < a/2$: $Q(r) = 0$;

— pour $r \in]a/2, a[$, $Q(r) = \int_{\tilde{r}=a/2}^r A\tilde{r} \times 4\pi \tilde{r}^2 d\tilde{r} = 4\pi A \times \left[\frac{\tilde{r}^4}{4} \right]_{a/2}^r$

$$\Rightarrow Q(r) = \pi A \times \left[r^4 - \left(\frac{a}{2} \right)^4 \right]$$

— pour $r > a$: comme il n'y a pas de charges au-delà de a , il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $r = a$,

$$\Rightarrow Q(r) = \frac{15\pi A}{16} \times a^4$$

4. Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont des plans de symétrie pour la distribution des charges. En M , le champ électrique est nécessairement contenu dans leur intersection et est donc radial :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

La distribution de charges est invariante par toute rotation d'angles θ et φ , on en déduit :

$$\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$$

On considère comme surface de Gauss Σ une sphère de rayon r centrée sur l'origine :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r(r) \times 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

En conséquence :

— pour $r < a/2$: $\vec{E}(r) = \vec{0}$;

— pour $r \in]a/2, a[$, $\vec{E}(r) = \frac{A}{4\epsilon_0} \times \left[r^2 - \frac{1}{r^2} \times \left(\frac{a}{2} \right)^4 \right]$

— pour $r > a$: $\vec{E}(r) = \frac{15A}{64\epsilon_0 r^2} \times a^4$.

EM015. Charges aux sommets d'un carré (*)

1. L'axe (Oy) est un axe de symétrie de la distribution de charges, le champ en O est donc parallèle à (Oy) , de même l'axe (Ox) est un axe de symétrie, le champ en O est donc parallèle à (Ox) ; les deux conditions imposent

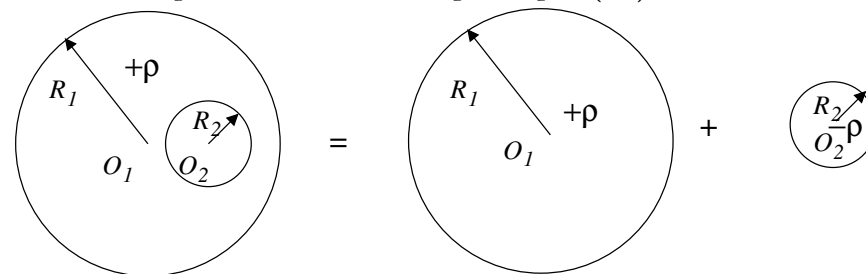
$$\vec{E}(O) = \vec{0}$$

2. Même raisonnement.

3. La distribution de charges peut être vue comme la superposition de la distribution (1) et d'une charge q sur le sommet du bas ; la distribution (1) créant un champ nul en O , le champ résultant est le champ créé par la charge q en $(0, -a/\sqrt{2})$:

$$\vec{E}(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a^2/2)} \vec{u}_y \Rightarrow \vec{E}(O) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_y$$

EM006. Champ dans une cavité sphérique (**)



★ Champ créé par la sphère de charge volumique $+\rho$:

On applique le théorème de Gauss pour une surface sphérique centrée sur O_1 intérieure à la sphère de rayon R_1 :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r^+(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho r^3}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{u}_{r1} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{O_1 M}$$

★ Champ créé par la sphère de charge volumique $-\rho$:

Avec un raisonnement identique et pour un point M intérieure à la petite sphère :

$$\vec{E}_- = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{O_2 M}$$

★ Champ dans la cavité :

Le champ résultant est égale à la somme des champs créés par chacune des distributions :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\overrightarrow{O_1 M} - \overrightarrow{O_2 M} \right) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{O_1 O_2}}$$

EM017. Condensateur sphérique (**)

1. Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont des plans de symétrie pour la distribution des charges. En M , le champ électrique est nécessairement contenu dans leur intersection et est donc radial :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

La distribution de charges est invariante par toute rotation d'angles θ et φ , on en déduit :

$$\boxed{\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r}$$

2. On considère comme surface de Gauss Σ une sphère de rayon r centrée sur l'origine avec $R_1 < r < R_2$:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

En régime stationnaire, et pour un problème à symétrie sphérique $E_r(r) = -\frac{dV}{dr}$, on en déduit la formule recherchée :

$$\boxed{-\frac{dV}{dr} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

3. On intègre cette relation entre R_1 et R_2 :

$$\int_{R_1}^{R_2} dV = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr$$

$$V_2 - V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Sachant que $Q = C \times \Delta V$, on en déduit : $C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

4. Avec $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ et $Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_1$, on en déduit :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{V_1}{r^2} \vec{u}_r}$$

5. Le champ est maximal pour $r = R_1^+$, on veut :

$$E(R_1^+) = \frac{R_2}{R_1(R_2 - R_1)} V_1 < E_d \Rightarrow \boxed{V_1 < V_d = \frac{E_d R_1 (R_2 - R_1)}{R_2}}$$

6. La densité volumique d'énergie électrostatique a pour expression, au sein du condensateur :

$$\omega_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_2 - R_1)^2} \frac{V_1^2}{r^4}$$

Pour obtenir l'énergie électrostatique du condensateur, on intègre sur le volume intra-armatures :

$$\mathcal{E}_e = \int_{R_1}^{R_2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_2 - R_1)^2} \frac{V_1^2}{r^4} \times r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$$

$$\mathcal{E}_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_2 - R_1)^2} V_1^2 \times 4\pi \times \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_2 - R_1)^2} V_1^2 \times 4\pi \times \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

C'est à dire $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \times \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_1^2$.

En identifiant le résultat à $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} C V_1^2$ l'énergie du condensateur obtenue en électrocinétique, on retrouve la formule de la capacité du condensateur.

EM018. Prise de terre (D'après CCP, PSI, 2015 ***)

1. L'intensité électrique est égale au flux du vecteur courant à travers une surface donnée, $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$, j s'exprime en $\boxed{\text{A} \cdot \text{m}^{-2}}$ dans le système international d'unités.

Du fait de la symétrie du problème, le vecteur courant se répartit sur une demi-sphère Σ de centre O :

$$I = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma j(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma j(r) dS = j(r) \iint_\Sigma dS = j(r) \times 2\pi r^2$$

On en déduit : $\boxed{j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}}$

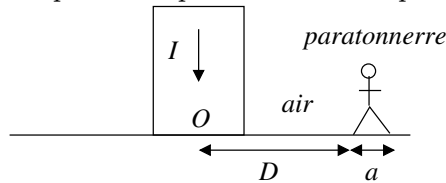
2. À l'aide de la loi d'Ohm locale, on en déduit, $E(r) = \frac{I}{2\pi\gamma_{sol}r^2}$.

3. En régime stationnaire, $\vec{E} = -\text{grad}V$, ce qui donne en projection selon la direction radiale :

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{I}{2\pi\gamma_{sol}r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{I}{2\pi\gamma_{sol}r}$$

La constante est choisie nulle pour assurer un potentiel nul à l'infini.

4. Pour un espacement a donné entre les pieds, la tension aux bornes des pieds est d'autant plus importante que l'individu est proche du paratonnerre.



(a) Déterminons tout d'abord la tension, différence de potentiel, entre les deux pieds :

$$U = V(D) - V(D + a) = \frac{I}{2\pi\gamma_{sol}D} - \frac{I}{2\pi\gamma_{sol}(D + a)} = \frac{I}{2\pi\gamma_{sol}} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D + a} \right)$$

Pour la tension limite U , le corps étant assimilé à un conducteur ohmique de résistance R_h , il est parcouru par un courant I_{max} :

$$U = R_h \times I_{max} \Rightarrow R_h I_{max} = \frac{I}{2\pi\gamma_{sol}} \times \frac{a}{D(D + a)}$$

(b) Avec $D \gg a$, on en déduit :

$$R_h I_{max} \approx \frac{I}{2\pi\gamma_{sol}} \times \frac{a}{D^2} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{I \times a}{2\pi\gamma_{sol} R_h I_{max}}}$$

(c) Application numérique :

$$D = \sqrt{\frac{5 \times 10^4 \times 1,0}{2\pi \times 1,0 \times 10^{-2} \times 2,5 \times 10^3 \times 25 \times 10^{-3}}} \Rightarrow D \approx 1,1 \times 10^2 \text{ m}$$

(d) Si on suppose que les résistances sont assez voisines, les pattes des grands animaux sont plus espacées, la tension est donc plus grande et le risque supérieur.

5. Expression de la résistance d'une coque hémisphérique

(a) Un conducteur cylindrique de section S et de longueur l , possède une résistance $R = \frac{l}{\gamma S}$.

Pour une coquille hémisphérique élémentaire d'aire de base $2\pi r^2$ et d'épaisseur dr , on peut appliquer la relation précédente :

$$\delta R_c = \frac{dr}{\gamma \times 2\pi r^2}$$

(b) Les coquilles hémisphériques élémentaires sont disposées en série, ce qui donne pour la résistance totale :

$$R_c = \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \frac{dr}{\gamma \times 2\pi r^2} = \frac{1}{2\pi\gamma} \left[\frac{-1}{r} \right]_{R_{int}}^{R_{ext}} \Rightarrow R_c = \frac{1}{2\pi\gamma} \left[\frac{1}{R_{int}} - \frac{1}{R_{ext}} \right]$$

6. Résistance de la prise de terre

(a) La prise de terre se compose de deux résistances associées en série, celle du métal et celle du sol ; en appliquant la formule obtenue à la question précédente, on en déduit :

$$R_{glob} = R_{met} + R_{sol} \Rightarrow R_{glob} = \frac{1}{2\pi\gamma_{met}} \left[\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right] + \frac{1}{2\pi\gamma_{sol}} \frac{1}{R_b}$$

(b) Application numérique :

$$R_{glob} = \frac{1}{2\pi \times 6 \times 10^7} \times \left(\frac{1}{0,01} - \frac{1}{0,35} \right) + \frac{1}{2\pi \times 10^{-2}} \times \frac{1}{0,35}$$

$$R_{glob} \approx 45 \Omega$$

(c) **La législation n'est pas respectée** ; afin de diminuer R_{sol} , l'idée est de placer deux prises de terre suffisamment distantes pour qu'elles ne s'influencent pas l'une l'autre ; les résistances étant en parallèle, la résistance équivalente est égale à la moitié de la résistance d'une unique prise de terre.

EM019. Tunnel foré dans le globe terrestre (***)

1. Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont des plans de symétries de la distribution ; en M le champ de gravitation est contenu dans ces deux plans et donc selon la direction radiale.

La distribution des masses étant invariante par toute rotation d'angles θ et φ , la composante du champ ne dépend que de la distance au centre :

$$\vec{G} = \mathcal{G}(r)\vec{u}_r$$

On applique alors le théorème de Gauss gravitationnel avec comme surface fermée une sphère de rayon $r < R_T$.

$$\oiint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int} \Leftrightarrow \mathcal{G}(r) \times 4\pi r^2 = -4\pi G \times \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

On obtient : $\vec{\mathcal{G}} = -\frac{4\pi G\rho r}{3}\vec{u}_r$. Cette formule s'applique à la limite en $r = R_T$, ce qui donne pour la norme à la surface : $\mathcal{G}_0 = \frac{4\pi G\rho R_T}{3}$ et finalement :

$$\vec{\mathcal{G}} = -\frac{\mathcal{G}_0 r}{R_T}\vec{u}_r = -\frac{\mathcal{G}_0}{R_T}\vec{OM}$$

2. Le référentiel terrestre étant supposé galiléen, on applique la deuxième loi de Newton au wagon qui est soumis à la force de gravitation et la réaction du support perpendiculaire à la direction (Ix).

$$m\vec{a} = m\vec{\mathcal{G}} + \vec{R}$$

On projette cette équation selon la direction (Ix) :

$$m\ddot{x} = -m\frac{\mathcal{G}_0}{R_T}\vec{OM}\cdot\vec{u}_x = -m\frac{\mathcal{G}_0}{R_T}(\vec{OI} + \vec{IM})\cdot\vec{u}_x = -m\frac{\mathcal{G}_0}{R_T}x$$

On en déduit : $\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{\mathcal{G}_0}{R_T}$.

3. L'équation différentielle obtenue est celle d'un oscillateur harmonique, le wagon a un mouvement oscillant de période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R_T}{\mathcal{G}_0}}$$

4. La durée τ nécessaire pour relier A à B correspond à une demi-période :

$$\tau = \frac{T_0}{2} = \pi\sqrt{\frac{R_T}{\mathcal{G}_0}} = \pi \times \sqrt{\frac{6,4 \times 10^6}{9,8}} \Rightarrow T_0 \approx 2,5 \times 10^3 \text{ s}$$

C'est à dire une durée légèrement supérieure à une quarantaine de minutes. La vitesse atteinte par le wagon étant alors très conséquente, les frottements seraient très importants et il faudrait envisager de faire circuler le véhicule dans un tunnel sous pression réduite.

EM128. État électrique d'un électrolyte (**)

1. Cette loi est identique à celle rencontrée dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme. Elle stipule que, pour un ensemble de particules indépendantes placées dans un réservoir à la température T et soumises à une énergie potentielle $E_p(z)$ ($qV(z)$ dans le cas présent), la probabilité de trouver la particule dans un état d'énergie $E_p(z)$ est proportionnelle au facteur de Boltzmann $\exp\left(\frac{-E_p(z)}{k_B T}\right)$.

2. La densité volumique de charges s'obtient à partir des densités particulières :

$$\rho(z) = en_+(z) - en_-(z) = en_0 \left[\exp\left(-\frac{eV(z)}{k_B T}\right) - \exp\left(+\frac{eV(z)}{k_B T}\right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \rho(z) = -2en_0 \times \text{sh}\left(\frac{eV(z)}{k_B T}\right)$$

Pour une énergie potentielle petite devant l'énergie cinétique, on peut effectuer un développement à l'ordre 1 :

$$\rho(z) \approx \frac{-2e^2 n_0 V(z)}{k_B T}$$

En régime permanent, on sait que le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho(z)}{\epsilon_0} = 0$$

Le potentiel électrostatique étant une simple fonction de z et en utilisant l'expression de la densité de charges précédemment obtenue, on en déduit :

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} - \frac{V(z)}{D^2} = 0 \quad \text{avec} \quad D^2 = \frac{\epsilon_0 k_B T}{2e^2 n_0}$$

3. La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$\forall z > 0, \quad V(z) = Ae^{-z/D} + Be^{z/D}$$

Les conditions aux limites $V(0^+) = V(0^-) = V_0$ et $\lim_{z \rightarrow +\infty} V(z) = 0$ imposent finalement :

$$\forall z \geq 0, \quad V(z) = V_0 e^{-z/D}$$

4. Expression du champ électrostatique :

$$\vec{E} = -\frac{dV(z)}{dz}\vec{u}_z \Rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{D}e^{-z/D}\vec{u}_z$$

Dans le cas d'un plan infini possédant une densité de charges uniformément répartie en surface, on sait que le champ électrique est uniforme dans le demi-espace. La présence des charges dans le domaine $z > 0$ écrante l'effet des charges en surface et entraîne une décroissance rapide du champ électrostatique sur une distance caractéristique D .

5. On appelle « 1 » le milieu $z < 0$ et « 2 » $z > 0$. Dans le conducteur, le potentiel électrostatique est uniforme et le champ électrostatique est donc nul ; la relation de passage conduit alors à :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_z = \vec{E}(z=0^+) - \vec{E}(z=0^-) = \vec{E}(z=0^+) = \frac{V_0}{D}\vec{u}_z$$

Sur une section S de la surface du conducteur métallique, la charge présente

a donc pour expression :

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_0 V_0}{D} S$$

6. On commence par exprimer la densité volumique de charges dans l'électrolyte à l'aide des expressions précédemment obtenues :

$$\rho(z) = -\frac{2e^2 n_0}{k_B T} V(z) = -\frac{\varepsilon_0}{D^2} V(z) = -\frac{\varepsilon_0}{D^2} V_0 e^{-z/D}$$

Il reste alors à intégrer sur le demi-espace pour une section droite S :

$$Q_2 = S \int_0^{+\infty} \rho(z) dz = -\frac{\varepsilon_0 V_0 S}{D^2} \left[-D e^{-z/D} \right]_0^{+\infty} \Rightarrow \boxed{Q_2 = \frac{-\varepsilon_0 V_0 S}{D}}$$

On constate que $\boxed{Q_2 = -Q_1}$. L'électrolyte étant initialement neutre, l'excédent de charges positives qui se déposent sur le conducteur entraîne l'apparition d'un excédent opposé de charges négatives au sein du volume de l'électrolyte.