

Électromagnétisme dans l'ARQS

Dans les précédents chapitres, nous avons successivement étudié le champ électrique et le champ magnétique en régime stationnaire. Nous poursuivons l'étude en élargissant aux régimes « lentement » variables (ARQS).

1 Les équations de Maxwell

1.1 Formulation générale

Dans le cas le plus général, les équations de Maxwell se présentent sous la forme suivante :

→ Équation de Maxwell-Gauss : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Cette équation indique comment une charge volumique crée un champ électrique. Dans sa version intégrale, elle prend la forme du théorème de Gauss.

→ Équation de Maxwell-Thomson : $\text{div} \vec{B} = 0$

Cette équation indique que le champ magnétique est à flux conservatif.

→ Équation de Maxwell-Faraday : $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Cette équation indique qu'un champ magnétique variable est source d'un champ électrique, c'est le phénomène d'induction.

→ Équation de Maxwell-Ampère : $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Cette équation indique que les sources du champ magnétique sont les courants électriques et les champs électriques variables. En régime stationnaire, on retrouve le théorème d'Ampère. Plus généralement, on peut écrire un théorème d'Ampère généralisé :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{c^2} \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

1.2 Courant de déplacement et loi de conservation de la charge

Vers 1865, James Maxwell a unifié les travaux de ses prédécesseurs pour écrire les équations qui portent son nom.

Un apport important de Maxwell a été l'introduction du **courant de déplacement** qu'aucune expérience n'avait alors identifié :

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Pour s'en convaincre, on considère la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\underbrace{\text{div}(\text{rot} \vec{B})}_{=0} = \mu_0 \left(\text{div} \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \text{div} \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

On retrouve alors l'équation de conservation de la charge.

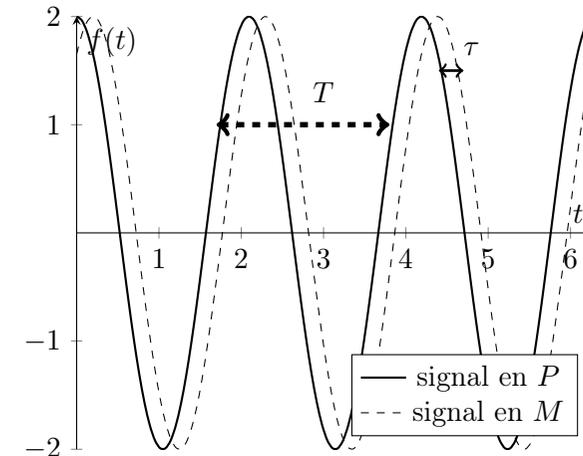
Le terme de courant de déplacement permet d'assurer la compatibilité des équations de Maxwell avec l'équation locale de conservation de la charge électrique.

Ce courant de déplacement prédit l'existence des ondes électromagnétiques qui seront mises en évidence par Heinrich Hertz une vingtaine d'années plus tard.

2 L'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires

2.1 Domaine de validité

L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) consiste à négliger τ la durée de propagation du signal vis à vis de T le temps caractéristique d'évolution des grandeurs physiques.



★ Considérons deux points P et M distants de L ; le signal, de célérité c , se propage de P à M en une durée $\tau = L/c$; pour un phénomène sinusoïdal, $\lambda = c \times T$,

l'approximation des régimes quasi-stationnaires conduit à :

$$\tau \ll T \quad \text{donc} \quad \boxed{\lambda \gg L}$$

L'ARQS s'applique pour des circuits dont la taille est faible vis à vis de la longueur d'onde du signal. Ainsi, en électrocinétique, on considère que l'intensité du courant est la même en tout point d'un fil, négligeant en cela le temps de propagation.

Le tableau suivant montre que l'ARQS est une approximation tout à fait légitime en électronique.

fréquence ν (Hz)	période $T = 1/\nu$ (s)	longueur d'onde $\lambda = c \times T$ (m)
50	2×10^{-2}	6×10^6
10^5	10^{-5}	3×10^3

2.2 ARQS et équations de Maxwell

Équations de Maxwell en ARQS

On admet que l'ARQS revient à négliger le courant de déplacement vis vis des autres termes de l'équation de Maxwell-Ampère.

Les équations de Maxwell prennent alors la forme simplifiée suivante :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Conséquences

→ Champ magnétique : les équations décrivant le champ magnétique de l'ARQS sont identiques à celles des régimes stationnaires ; **en ARQS, le champ magnétique vérifie les lois de la magnétostatique** (propriétés de symétrie, flux conservatif, théorème d'Ampère dans sa version simple).

À ce titre, on devrait en tout rigueur parler d'ARQS magnétique.

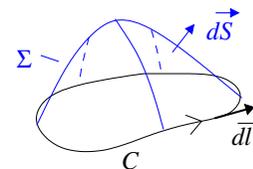
→ Vecteur courant : considérons la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère, sachant que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle :

$$0 = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{B}) = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \underline{\operatorname{div} \vec{j} = 0}$$

- dans le cadre de l'ARQS, le vecteur courant est à flux conservatif ;
- le flux de \vec{j} à travers une surface fermée et orientée est nul ;
- on retrouve la loi des nœuds appliquée en électrocinétique.

★ Circulation du champ électrique :

Par rapport au cas des régimes stationnaires, l'équation de Maxwell-Faraday est modifiée. Évaluons la circulation du champ électrique sur un contour \mathcal{C} supposé fixe en utilisant le théorème de Stokes :



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \left(\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

La circulation du champ électrique sur un contour fermé est égale à l'opposé de la dérivée du flux du champ magnétique à travers toute surface **orientée conforme** et s'appuyant sur ce contour :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Remarque : la relation a été obtenue pour un circuit fixe. On admettra qu'elle reste applicable au cas d'un circuit mobile.

Conséquence :

En ARQS, le champ électrique ne dérive plus d'un gradient ($\operatorname{rot} \vec{E} \neq \vec{0}$) ; le champ électrique n'est plus à circulation conservative et **les lignes de champ électrique peuvent se refermer sur elles-mêmes**.

3 Induction

3.1 Cas des circuits filiformes (rappels de première année)

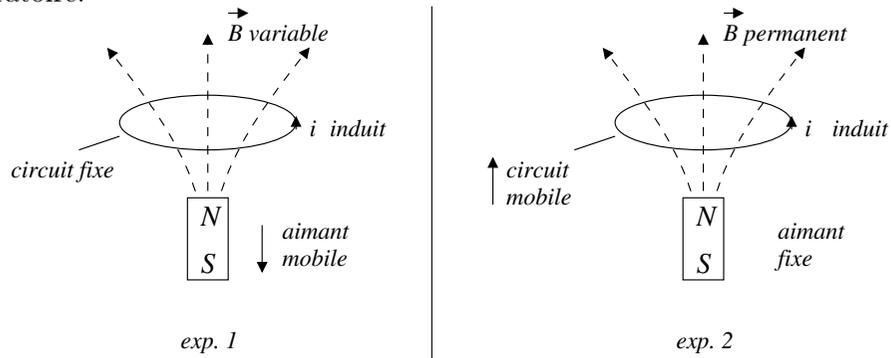
Le phénomène d'induction

Expérience 1 : un circuit fixe soumis à un champ magnétique variable peut se comporter comme un générateur électrocinétique ; on parle d'**induction de Neumann**.

Expérience 2 : un circuit se déplaçant dans un champ magnétique stationnaire peut se comporter comme un générateur électrocinétique ; on parle d'**induction de Lorentz**.

Notons que ces deux expériences ne sont que deux facettes d'un même phénomène selon que l'on étudie le problème dans le référentiel du circuit ou dans celui du

laboratoire.



Relations utiles

Loi de Lenz : l'induction, par ses effets, tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

Définition : Soit un circuit filiforme (\mathcal{C}) conducteur et orienté. On appelle force électromotrice, f.e.m., la circulation du champ électrique le long du circuit :

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Loi de Faraday : la force électromotrice est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux du champ magnétique au travers du circuit :

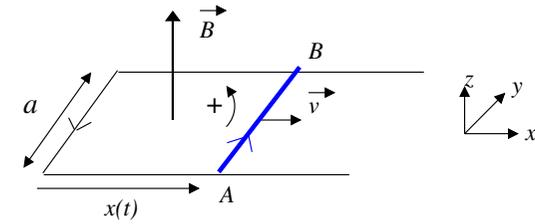
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

L'induction de Neumann sera approfondie dans le dernier paragraphe de ce chapitre, on traite pour terminer l'exemple classique des rails de Laplace.

Exemple : rails de Laplace

On considère un circuit électrique constitué d'une partie fixe et d'une barre AB de longueur a et de masse m , l'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant ; la barre se déplace à la vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$; la barre possède une résistance R (on néglige la résistance du reste du circuit) et on néglige l'inductance propre du circuit.

On choisit une orientation dans le sens trigonométrique pour le circuit. **Cette orientation s'impose alors à la f.e.m., au courant induit et à la surface qui s'appuie sur le contour.**



→ **Description des phénomènes** :

La barre, en mouvement dans le champ magnétique stationnaire, est le siège d'une induction de Lorentz. Une f.e.m induite apparaît au sein du circuit qui est donc parcouru par un courant.

La barre parcourue par un courant est alors soumise à une force de Laplace qui va tendre à s'opposer au mouvement de la barre (loi de Lenz).

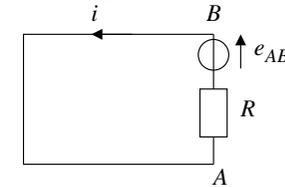
→ **Calcul de la force électromotrice induite** :

À l'instant t , la surface du circuit a une aire $a \times x(t)$ et est orientée selon \vec{u}_z . Le champ magnétique est responsable d'un flux $\Phi(t) = Bax(t)$ ce qui conduit à :

$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -Ba \frac{dx(t)}{dt} = -Bav$$

→ **Équation électrique** :

L'action d'un champ magnétique stationnaire sur un circuit en mouvement est équivalente à celle d'un générateur de tension de force électromotrice e_{AB} , on peut donc proposer le circuit électrique équivalent pour le montage :



La f.e.m vaut $e_{AB} = -Bav(t)$. On en déduit l'intensité qui circule dans le circuit :

$$Ri = e_{AB} = -Bav(t) \quad (1)$$

Remarque : le courant induit (< 0) tend à créer un champ magnétique induit opposé à \vec{B} (loi de Lenz en terme de flux).

→ **Équation mécanique** :

Supposons que la barre ait été lancée avec une vitesse initiale v_0 . En l'absence de frottements, la seule force s'appliquant sur la barre et possédant une composante

horizontale non nulle est la force de Laplace :

$$\vec{F}_L = \int_A^B i d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_A^B i dl \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = iB \left(\int_A^B dl \right) \vec{u}_x = iBa \vec{u}_x$$

Comme $i < 0$, alors $\vec{F}_L \cdot \vec{u}_x < 0$. La force de Laplace générée tend à s'opposer au mouvement de la barre (loi de Lenz en terme de forces).

On applique alors la deuxième loi de Newton à la barre en projection sur l'axe horizontal pour en déduire :

$$m \frac{dv}{dt} = iBa \quad (2)$$

Le système d'équations (1) et (2) traduit le couplage électromécanique.

Résolution

En combinant les équations (1) et (2), on en déduit :

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 a^2}{R} v$$

Cette équation admet comme solution : $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{mR}{B^2 a^2}$

On obtient une évolution caractéristique d'un frottement fluide. L'effet est d'autant plus efficace que B est élevé.

Aspects énergétiques

→ Un exemple de transducteur électromécanique

De manière générale, pour obtenir les équations énergétiques, il faut multiplier l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v :

$$Ri^2 = ei = -Bavi \quad \text{et} \quad m \frac{dv}{dt} v = iBav$$

On combine alors les deux équations pour en déduire :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = -Ri^2$$

L'énergie cinétique fournie à la barre lors du lancement est convertie en énergie électrique (apparition d'un générateur induit) finalement dissipée par effet Joule. Le système se comporte comme un générateur électrique.

Inversement, si on impose un courant électrique dans le circuit à l'aide d'un générateur, la barre se met en mouvement sous l'effet des forces de Laplace. Le système fonctionne en récepteur.

→ Puissance des forces de Laplace

D'après les équations précédentes, on a, pour les puissances :

$$P_{fem} = ei = -Bavi \quad \text{et} \quad P_{Lap.} = Bavi \quad \text{soit} \quad P_{Lap.} + P_{fem} = 0$$

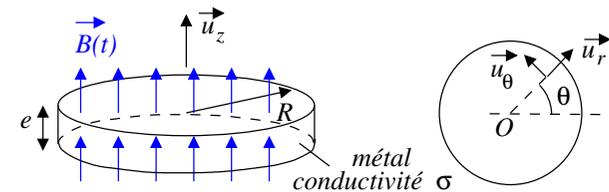
Ce résultat, obtenu sur un cas particulier, est très général. L'induction ne crée ni ne détruit d'énergie. Elle permet des échanges d'énergie entre phénomènes mécanique et électrique.

En présence d'un **champ magnétique stationnaire**, la puissance de la force électromotrice induite est opposée à la puissance des forces de Laplace.

$$P_{Lap.} + P_{fem} = 0$$

3.2 Induction dans un conducteur massif; courants de Foucault

Présentation du dispositif



On considère un conducteur cylindrique de conductivité σ , de rayon R et d'épaisseur e soumis à un champ magnétique uniforme et variable $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$

Champ électrique induit

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, un champ magnétique variable est source d'un champ électrique. Il faut cependant prendre garde que ce champ électrique n'a plus la symétrie d'un champ électrostatique.

→ Forme du champ électrique induit :

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \longleftrightarrow \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



$$\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta \quad \longleftrightarrow \quad \vec{E} = E_\theta(r) \vec{u}_\theta$$

Par analogie avec une distribution de courant selon \vec{u}_z qui crée un champ magnétique orthoradial, on en déduit la forme du champ électrique induit.

→ Expression du champ électrique induit :

On détermine alors le champ électrique en exprimant sa circulation sur un cercle de rayon r centré sur l'origine et orienté selon \vec{u}_θ , la surface à considérer est donc un disque de rayon r :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_\theta(r) \times 2\pi r = -\frac{d}{dt} (B_0 \cos(\omega t) \pi r^2)$$

$$\vec{E} = \frac{B_0 \omega r}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

Courants de Foucault

Au sein d'un conducteur, le vecteur courant et le champ électrique sont reliés par la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{j} = \frac{\sigma B_0 \omega r}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

Le courant est orthoradial, les lignes de courant sont des cercles centrés sur l'origine.

Bilan de puissance

La puissance volumique reçue par le conducteur a pour expression :

$$p_v(r, t) = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \frac{\sigma B_0^2 \omega^2 r^2}{4} \sin^2(\omega t)$$

Par intégration, on en déduit la puissance instantanée totale reçue par le conducteur :

$$\mathcal{P}(t) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^e \int_{r=0}^R \frac{\sigma B_0^2 \omega^2 r^2}{4} \sin^2(\omega t) dr r d\theta dz = \frac{\pi e \sigma B_0^2 \omega^2 R^4 \sin^2(\omega t)}{8}$$

En moyenne sur une période $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2$, on en déduit la puissance moyenne reçue par le conducteur :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\pi \sigma B_0^2 \omega^2 e R^4}{16}$$

Cette puissance est dissipée par effet Joule au sein du conducteur.

Remarque : dans cette étude, on a négligé le champ magnétique propre créé par les courants induits.

Applications

→ **Plaque à induction** : dans une plaque à induction, l'effet Joule au sein du contenant métallique chauffe les aliments au contact. On cherche donc à maximiser les courants de Foucault.

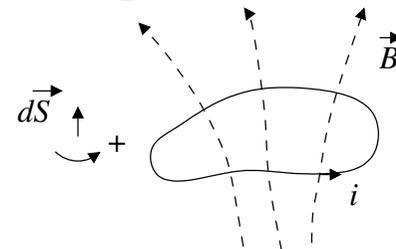
→ **Transformateur** : au sein d'un transformateur, les éventuels courants de Foucault contribuent à échauffer le matériau et à diminuer d'autant la puissance utile. Les bobines des transformateurs sont feuilletées pour minimiser la circulation de ces courants.

4 Énergie magnétique

4.1 Rappels de première année

Inductance propre

Considérons un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité i ; cette source de courant crée un champ magnétique propre \vec{B}_p qui traverse la spire elle-même et génère un flux propre $\Phi_p = \iint_\Sigma \vec{B}_p \cdot d\vec{S}$.



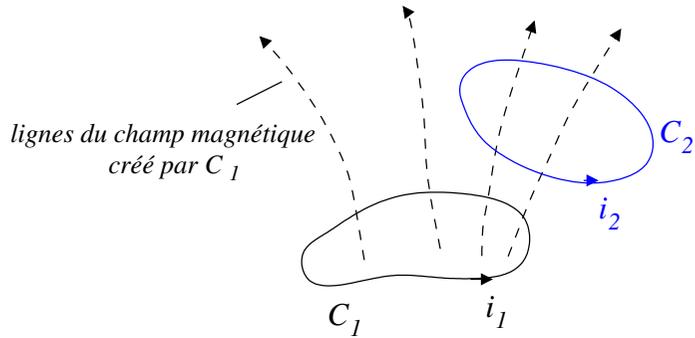
D'après l'équation de Maxwell-Ampère, le champ magnétique \vec{B}_p est proportionnel à l'intensité ; il en est de même pour le flux propre qui peut donc s'écrire :

$$\Phi_p = L \times i$$

L , l'inductance propre de la spire, s'exprime en henry (H) ; c'est un **coefficient positif**, purement géométrique, qui ne dépend que de la forme du circuit.

Inductance mutuelle

On considère deux circuits C_1 et C_2 fermés et filiformes parcourus respectivement par des courants d'intensité i_1 et i_2 .



Le circuit C_1 crée un champ \vec{B}_1 responsable, au travers du circuit C_2 , d'un flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$, proportionnel à l'intensité i_1 :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = M_{21} \times i_1$$

De même :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = M_{12} \times i_2$$

On peut montrer (théorème de Neumann) que $M_{12} = M_{21} = M$.

M est l'inductance mutuelle des deux circuits, elle ne dépend que des caractéristiques géométriques des deux circuits et de leur position relative, son signe dépend des orientations choisies pour C_1 et C_2 .

Flux total

Dans le cas général, il faut tenir compte du flux propre et du flux extérieur ; ainsi pour le circuit C_2 , on a :

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot d\vec{S} = \Phi_{p2} + \Phi_{1 \rightarrow 2} = L_2 i_2 + M i_1$$

4.2 Énergie magnétique de deux bobines couplées

L'énergie magnétique d'un circuit d'inductance propre L , parcouru par un courant d'intensité i , a pour expression :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L i^2$$

L'énergie magnétique d'un système de deux bobines couplées a pour expression :

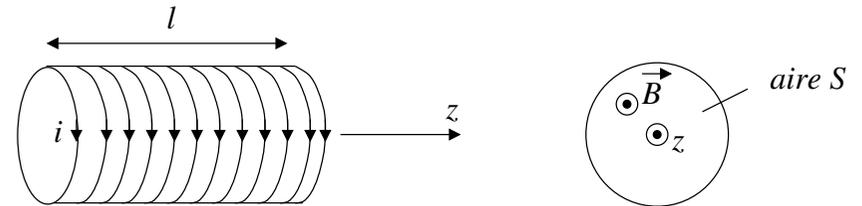
$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

La démonstration vue en première année est disponible en annexe à la fin du chapitre.

4.3 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Inductance propre d'un solénoïde infini

On considère un solénoïde constitué de N spires jointives, de section S , parcourues par un courant d'intensité i . Le solénoïde a une longueur l suffisamment importante devant ses dimensions latérales pour appliquer les résultats du solénoïde infini.



Le champ magnétique est uniforme au sein du solénoïde et vaut $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} i \vec{u}_z$. Ce champ magnétique traverse les N spires pour créer un flux propre total :

$$\Phi_p = \mu_0 \frac{N}{l} i \times N S = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \times i \quad \text{donc} \quad L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

→ On constate que l'inductance propre varie comme N^2 et sera donc significative pour un enroulement important de spires.

→ Pour une bobine de 8 cm de long, comptant 500 spires, réparties sur un carré de côté 5 cm, $L \approx 10$ mH.

Énergie magnétique stockée

Le solénoïde stocke une énergie magnétique $\frac{1}{2} L i^2$. En utilisant les expressions de L et B pour le solénoïde, l'énergie magnétique peut se réécrire :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \times i^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0^2 N^2 i^2}{l^2} \times \frac{l S}{\mu_0} = \frac{B^2}{2 \mu_0} \times V$$

avec $S \times l = V$ le volume du solénoïde.

On en déduit, qu'au sein du solénoïde, la présence du champ magnétique contribue à une densité volumique d'énergie magnétique $\omega_B = \frac{B^2}{2 \mu_0}$. On admettra la généralisation de ce résultat.

En un point où règne un champ magnétique, la densité volumique d'énergie magnétique vaut :

$$\omega_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

5 Couplage parfait, couplage partiel

On considère le cas de deux bobines couplées par une inductance mutuelle M .

→ L'énergie magnétique de ce système vaut : $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2$

→ L'énergie magnétique s'écrit aussi : $\mathcal{E}_M = \iiint_V \omega_B dv$, l'intégrale étant étendue à tout l'espace.

Comme $\omega_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \geq 0$, l'énergie magnétique est nécessairement positive ou nulle.

Le signe de M dépendant de l'orientation des circuits, la positivité de \mathcal{E}_M n'a donc rien d'évident sur la première expression et ceci impose une contrainte sur les coefficients.

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}i_1^2 \left(L_1 + L_2 \left(\frac{i_2}{i_1} \right)^2 + 2M \frac{i_2}{i_1} \right) = \frac{1}{2}i_1^2 (L_1 + L_2x^2 + 2Mx) \quad \text{avec} \quad x = \frac{i_2}{i_1}$$

$\mathcal{E}_M(x=0) = \frac{1}{2}L_1i_1^2 \geq 0$, le polynôme formé reste positif à condition que son discriminant reste négatif ou nul, ce qui impose :

$$4M^2 - 4L_1L_2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M^2 \leq L_1L_2}$$

→ $|M| = \sqrt{L_1L_2}$ correspond au cas du **couplage parfait**, toutes les lignes de champ issues du circuit 1 traversent le circuit 2.

→ $M = 0$ correspond au cas du **couplage nul**.

Le plus souvent le **couplage est partiel**, et d'autant plus important que les bobines sont rapprochées et alignées.

Capacités exigibles :

→ Vérifier que le terme de courant de déplacement permet d'assurer la compatibilité des équations de Maxwell avec la conservation de la charge.

→ Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans l'ARQS en admettant que les courants de déplacement sont négligeables.

→ Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.

→ Relier la circulation de \vec{E} à la dérivée temporelle du flux magnétique, faire qualitativement le lien avec la loi de Faraday vue en première année.

→ Dans le cas d'un conducteur cylindrique soumis à un champ magnétique parallèle à son axe, uniforme et oscillant, décrire la géométrie des courants de Foucault, exprimer la puissance dissipée par effet Joule en négligeant le champ propre. Expliquer l'influence du feuilletage.

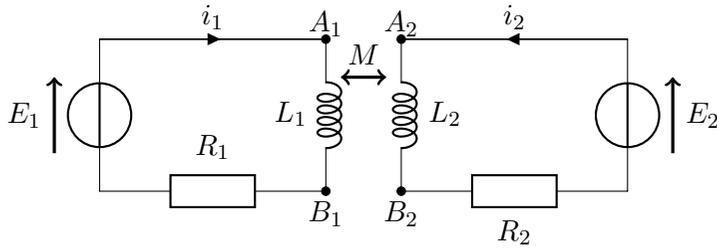
→ Exprimer l'énergie magnétique d'une bobine seule ou de deux bobines couplées en fonction des coefficients d'inductance et des intensités.

→ Citer l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique. La retrouver dans le cas de la bobine dont on néglige les effets de bord à partir de la relation $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Li^2$

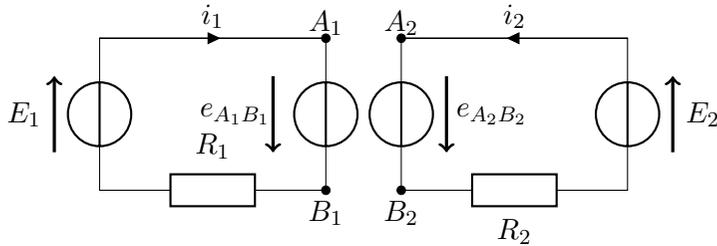
→ Dans le cas de deux bobines couplées, établir l'inégalité $M^2 \leq L_1L_2$.

Annexes : bilan énergétique de deux circuits couplés

On considère le système électrique ci-dessous constitué de deux circuits couplés entre eux par une inductance mutuelle M .



On peut définir le schéma électrique équivalent :



Équations électriques :

Dans le circuit 1, la loi des mailles s'écrit :

$$E_1 = R_1 i_1 - e_{A_1 B_1}$$

$$\text{avec } e_{A_1 B_1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M i_2)$$

On en déduit l'équation électrique pour la maille de gauche :

$$E_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (1)$$

On obtient de même pour le circuit de droite :

$$E_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (2)$$

On est en présence d'un système d'équations différentielles couplées.

Bilan énergétique :

En multipliant ces équations électriques respectivement par i_1 et par i_2 , et en sommant, on voit apparaître le bilan énergétique :

$$E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

$$\Leftrightarrow E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right)$$

En intégrant cette équation entre l'instant initial (intensités nulles) et un instant quelconque τ pour lequel $i_1(\tau) = I_1$ et $i_2(\tau) = I_2$, on obtient :

$$\int_0^\tau (E_1 i_1 + E_2 i_2) dt = \int_0^\tau (R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2) dt + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

★ Le premier membre représente l'énergie fournie par les générateurs durant l'établissement des courants.

★ Une partie de cette énergie est dissipée par effet Joule comme l'indique l'intégrale du membre de droite.

★ La quantité supplémentaire représente l'énergie emmagasinée sous forme d'énergie magnétique au sein du système.