

Devoir non surveillé n°04 (mercredi 06 novembre 2019)**Méthode Flash-Laser (adapté de Centrale MP Oral)****1 Échauffement d'un bloc solide**

On considère un bloc cylindrique de rayon r , de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c , de masse volumique ρ et d'épaisseur e .

On suppose d'abord l'épaisseur e « très petite », la température $T(t)$ est alors uniforme au sein du bloc à un instant donné. Le bloc est chauffé uniformément par une source de puissance P mise en route à l'instant $t = 0$, instant auquel la température intérieure initiale vaut T_0 , température de l'extérieur.

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la température T du bloc en considérant que le flux thermique des pertes conducto-convectives est modélisé par une loi de Newton de la forme $P_{th} = h(T - T_0)S$, h est le coefficient d'échange et S la surface d'échange du bloc solide.
- Montrer que l'expression de la température T du bloc cylindrique en fonction du temps a pour expression :

$$\forall t > 0, \quad T(t) = T_0 + \frac{P}{hS} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

avec τ une constante de temps dont on précisera l'expression.

- On suppose que le chauffage s'effectue uniquement pendant une durée t_0 très inférieure à τ . En déduire une expression approchée de la température sur l'intervalle de temps $[0, t_0]$.

Montrer que la valeur maximale atteinte a pour expression :

$$T_{max} = T_0 + \frac{E}{\rho c e \pi r^2} \quad \text{avec} \quad E = P t_0$$

- Donner alors l'expression de la température sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$.
- On continue à apporter la même quantité d'énergie mais en une durée de plus en plus courte. En supposant donc que $\forall t_0, P t_0 = E$ (constant), que devient l'allure de la température si $t_0 \rightarrow 0$.

Pour la suite, on va prendre en compte la diffusion au sein du matériau et ne plus considérer la température comme uniforme. En revanche, l'expérience se faisant sur des échelles de temps courtes par rapport à la durée τ , on négligera la dissipation d'énergie par les transferts en surface.

2 Détermination de la diffusivité thermique, méthode flash**Doc 1. Description de la méthode de Parker**

La technique flash laser a été développée par Parker (1960) afin d'obtenir des mesures rapides de la conductivité thermique d'échantillons de petites dimensions. Elle consiste à envoyer une impulsion très brève sur la face avant d'un échantillon cylindrique de faible épaisseur. Ensuite, l'analyse de l'évolution de la température sur la face arrière en fonction du temps permet la détermination de la diffusivité thermique. Le Modèle de Parker consiste à considérer un disque parfaitement isolé d'épaisseur e et de rayon r . Initialement, l'échantillon reçoit une impulsion énergétique de très courte durée, l'absorption de l'énergie s'effectue en surface de façon uniforme. Les pertes convectives sont supposées nulles sur toutes les faces et le flux thermique se propage parallèlement à l'axe optique. La résolution de l'équation de la chaleur dans ces conditions s'obtient par une méthode de séparation de variables ou à l'aide de la transformation de Laplace. À une profondeur x donnée de l'échantillon, la solution s'écrit comme suit où D est la diffusivité thermique du matériau :

$$T(x, t) = T_0 + (T_{max} - T_0) \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{e}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D t}{e^2}\right) \right]$$

La mesure des variations de température en faces avant ou arrière, peut être réalisée à l'aide de thermocouples ou de détecteurs de rayonnement infrarouge. Les thermocouples sont utilisés en général pour les basses températures et des matériaux épais. Cependant pour l'étude en régimes transitoires rapides, ou dans les conditions de hautes températures, l'utilisation de détecteurs infrarouges est préconisée. Le choix du détecteur s'effectuant suivant la gamme de température de travail. Le principe du montage est donné Figure 1 (cf. page suivante).

On tient donc maintenant compte de la diffusion thermique au sein du matériau, l'énergie étant apportée par une impulsion laser sur la face avant à l'instant initial.

- Au sein du solide, établir l'équation de la diffusion thermique pour $T(x, t)$:

$$\forall x \in]0, e[, \quad \forall t > 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

avec D la diffusivité thermique à exprimer en fonction des caractéristiques du matériau. On précisera la dimension de cette grandeur.

On cherche une solution du problème à l'aide d'une méthode de séparation

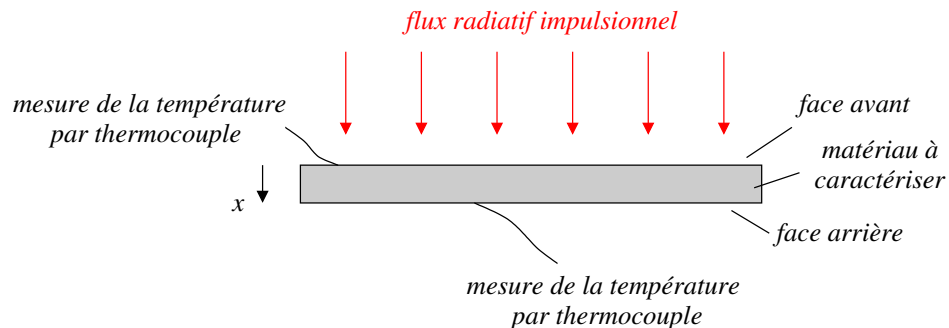


FIGURE 1 – Principe de la méthode de Parker

des variables (T_{max} étant l'expression précédemment obtenue) :

$$\forall x \in]0, e[, \forall t > 0, T(x, t) = T_{max} + \theta(x, t) = T_{max} + f(x)g(t)$$

2. En utilisant l'équation de la diffusion thermique, montrer que la composante temporelle $g(t)$ vérifie l'équation :

$$\forall t > 0, \frac{dg(t)}{dt} = -A^2g(t)$$

où A^2 est une constante réelle positive, inconnue à ce stade de la résolution. Donner l'expression de $g(t)$ à une constante multiplicative près et justifier le signe $-$ figurant devant A^2 .

3. Montrer que la composante spatiale $f(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\forall x \in]0, e[, f''(x) + k^2f(x) = 0$$

avec k à exprimer en fonction de A^2 et D .

À ce stade, on précisera la forme générale de la solution pour la composante spatiale sans chercher à déterminer les constantes d'intégration.

4. On impose les conditions : $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0^+} = 0$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=e^-} = 0$.

Justifier et interpréter ces conditions par des considérations physiques extraites du document 1.

Simplifier alors la forme générale de la solution pour la composante spatiale et en déduire que, pour $\theta(x, t)$, on peut proposer l'expression générale :

$$\forall x \in]0, e[, \forall t > 0, \theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos\left(\frac{n\pi x}{e}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{e^2}\right)$$

On rappelle que E est l'énergie apportée au matériau par l'impulsion laser initiale. On souhaite que le champ de température vérifie la condition :

$$\forall t > 0, \int_0^e \rho c [T(x, t) - T_0] \times \pi r^2 dx = E$$

5. Expliquer le sens physique de cette condition et vérifier que le champ de température obtenu à ce stade est compatible avec celle-ci.

On admettra la possibilité d'inversion de l'intégrale et de la somme infinie.

On admet enfin que : $\lim_{y \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-n^2\pi^2 y) = -1/2$.

6. En exploitant la valeur de la température en face arrière dans les premiers instants, montrer que le champ de température proposé dans le document 1 est acceptable, c'est à dire $\forall t > 0, \forall x \in]0, e[$:

$$T(x, t) = T_0 + (T_{max} - T_0) \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{e}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{e^2}\right) \right]$$

On s'intéresse pour la suite à la température réduite $u(x, t) = \frac{T(x, t) - T_0}{T_{max} - T_0}$.

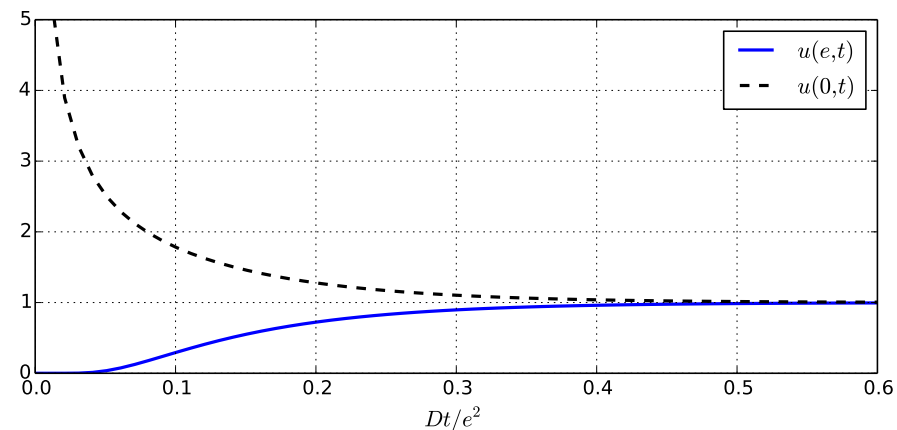


FIGURE 2 – Températures réduites en faces avant et arrière au cours du temps

7. Donner les expressions de la température réduite en face avant et en face arrière, c'est à dire respectivement $u(0^+, t)$ et $u(e^-, t)$.

La figure 2 (page précédente) donne l'évolution au cours du temps de ces deux températures réduites.

8. Expliquer qualitativement, par des arguments physiques et en vous aidant si nécessaire de la première partie, les limites à temps court et à temps long de ces deux courbes.

Pour la suite, on exploite la mesure de température en face arrière et dans le cadre de l'approximation de Fourier, on ne conserve dans l'expression de la température réduite que le terme associé à la constante de temps la plus longue car les autres termes sont rapidement amortis au cours du temps. La courbe associée est représentée en pointillés sur la figure 3 et confirme la validité de l'expression en dehors des temps courts.

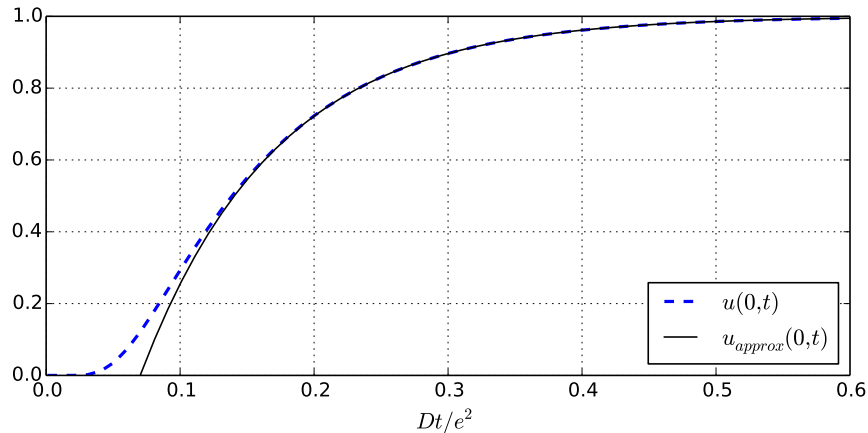


FIGURE 3 – Températures réduites exacte et approchée en face arrière

9. Montrer que la température réduite en face arrière dans le cadre de cette approximation a pour expression :

$$u_{approx.}(e, t) = 1 - 2 \exp\left(-\frac{\pi^2 Dt}{e^2}\right)$$

10. En déduire que le temps de montée $t_{1/2}$ (pour lequel $u(e, t_{1/2}) = 1/2$) permet de déterminer la diffusivité thermique du matériau. On fournira une relation algébrique entre $t_{1/2}$ et la diffusivité D .

3 Étude du Dural

Doc 2. Étude du Dural

Le Dural (ou duralumin ou encore duraluminium) est un alliage d'aluminium et de cuivre utilisé en aéronautique en raison de sa grande résistance aux contraintes et de sa plus faible densité que l'acier. Sa densité n'est que de 2,8. Sa capacité thermique massique est $c = 880 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Des mesures de diffusivité en faces arrière ont été réalisées (Daniel Balageas, ONERA Département Matériaux et Structures) sur une plaque de Dural, illuminée par 2 lampes flash créant des illuminations de 4 ms (maximum de l'intensité à moins de 2 ms) avec au niveau de l'échantillon en face avant une énergie surfacique ε . La température surfacique était enregistrée par une caméra Jade LW Cedip à la fréquence image de 200 Hz. Une mesure en face arrière est faite afin de disposer d'une valeur a priori fiable de la diffusivité (méthode de Parker).

Deux thermogrammes sont présentés : la température d'un pixel unique (courbe grise) et celle de la moyenne d'une zone circulaire centrale de 194 pixels, centrée sur ce pixel. La moyenne d'une zone de 194 pixels conduit à un rapport signal sur bruit de 62.

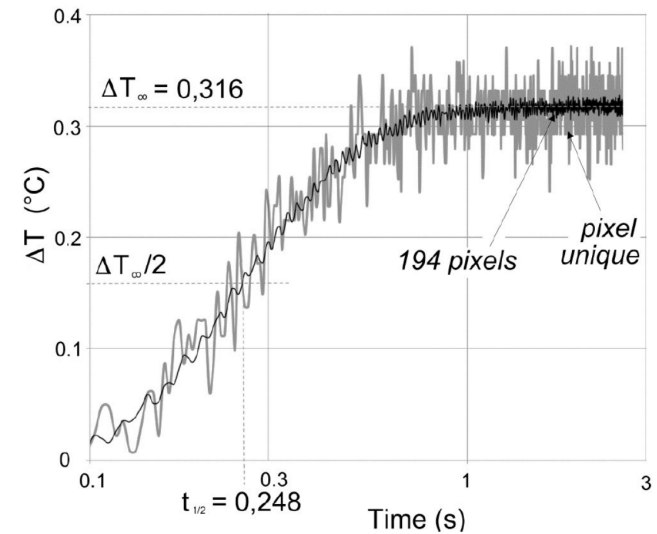


FIGURE 4 – Thermogramme d'une plaque de Dural de surface $S = 0,010 \text{ m}^2$ et d'épaisseur $e = 1,0 \text{ cm}$

1. À l'aide de l'expérience de Balageas (détaillée dans le document 2 et la figure 4), estimer la diffusivité D du Dural.
2. Une recherche en ligne conduit à la valeur $\lambda = 147 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ pour la conductivité thermique du Dural. Comparer au résultat précédent.
3. Comparer les temps caractéristiques de la conduction au sein de la pièce et des pertes convectives (pour $h = 5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$).
Que penser de l'hypothèse consistant à négliger les pertes convectives ?
4. Estimer l'énergie apportée par la source à la face avant.