Lycée Naval, Spé 2.

Devoir non surveillé n°04 (correction)

1 Échauffement d'un bloc solide

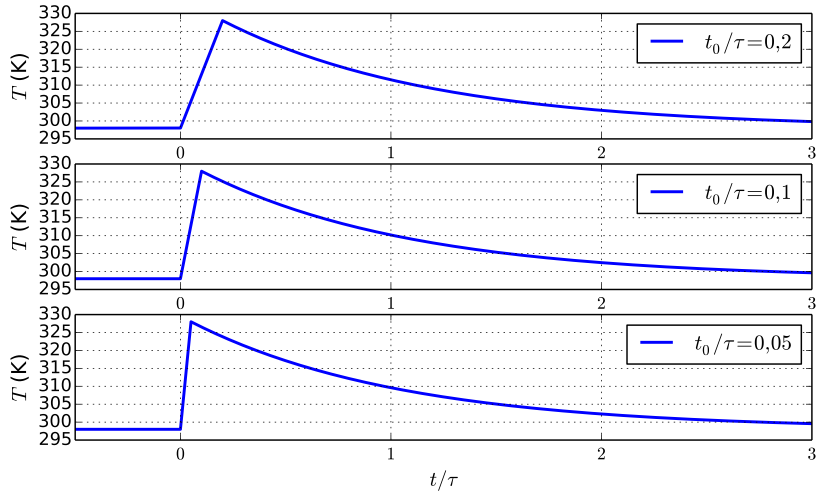
1. On applique le premier principe de la thermodynamique au bloc solide supposé indilatable et indéformable entre deux instants voisins. On prend en compte l'apport en volume associé à la puissance P et les pertes à la surface :
$$\rho c \times e\pi r^2 \mathrm{d}T = P\mathrm{d}t - h\left[T(t) - T_0\right] S\mathrm{d}t$$
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\forall t > 0, \quad \frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{hS}{\rho c e\pi r^2} T(t) = \frac{hST_0}{\rho c e\pi r^2} + \frac{P}{\rho c e\pi r^2}}$$

2. On pose $\boxed{\tau = \dfrac{\rho c e\pi r^2}{hS}}$. La solution de l'équation est la somme d'une solution particulière et de la solution de l'équation homogène :
$$T(t) = T_0 + \frac{P}{hS} + Ae^{-t/\tau}$$
La condition initiale impose $T(t=0) = T_0$ et donc :
$$\boxed{\forall t > 0, \quad T(t) = T_0 + \frac{P}{hS}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$$

3. On effectue un développement au premier ordre au sein de l'exponentielle pour $t/\tau \ll 1$.
$$T(t) \approx T_0 + \frac{P}{hS} \times \left[1 - (1 - t/\tau)\right] \approx T_0 + \frac{P}{hS\tau} \times t$$
$$\boxed{\forall t \in [0, t_0], \quad T(t) = T_0 + \frac{P}{\rho c e\pi r^2} \times t}$$
La valeur maximale atteinte a pour expression :
$$\boxed{T_{max} = T_0 + \frac{E}{\rho c e\pi r^2} \quad \text{avec} \quad E = Pt_0}$$
Notons que le résultat ne dépend pas de la constante h. Le phénomène de dissipation joue aux temps longs de l'ordre de τ, pour des durées très inférieures, la dissipation est tout à fait négligeable vis-à-vis du processus d'échauffement.

4. $\forall t > t_0$, la source de chauffage est supprimée et l'équation différentielle prend la forme simplifiée :
$$\forall t > t_0, \quad \frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{T(t)}{\tau} = \frac{T_0}{\tau}$$
La solution de cette équation est $T(t) = T_0 + Be^{-t/\tau}$ avec pour la condition initiale :
$$T(t = t_0) = T_{max} = T_0 + \frac{Pt_0}{hS\tau} = T_0 + Be^{-t_0/\tau} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{Pt_0}{hS\tau}e^{t_0/\tau}$$
On en déduit finalement :
$$\boxed{\forall t > t_0, \quad T(t) = T_0 + \frac{Pt_0}{\tau hS}e^{-(t-t_0)/\tau} = T_0 + \frac{E}{\rho c e\pi r^2}e^{-(t-t_0)/\tau}}$$

5. Si le produit $E = Pt_0$ est conservé, la température maximale atteinte est préservée. Pour $t_0 \to 0$, on se rapproche d'un **échelon de température** à l'instant initial.



2 Détermination de la diffusivité thermique

1. On applique un premier principe de la thermodynamique entre deux instants voisins pour un élément de longueur dx supposé indéformable. En l'absence d'apports en volume (tout l'énergie est apportée à la surface à l'instant initial) :
$$\mathrm{d}U = \rho c S\mathrm{d}x\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t = j_Q(x,t)S\mathrm{d}t - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_Q(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}xS\mathrm{d}t$$

Compte tenu de la loi de Fourier, $j_Q(x,t) = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}$, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}}$$

Dimension de la diffusivité : $\boxed{\mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-1}}$.

2. On reporte la forme proposée dans l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall x \in]0,e[,\ \forall t > 0,\quad g'(t)f(x) = Df''(x)g(t) \quad \text{équation (1)}$$

f n'étant pas identiquement nulle, $\exists\ x_0$ t.q. $f(x_0) \neq 0$, et la relation précédente appliquée pour $x = x_0$ se simplifie selon :

$$\forall t > 0,\quad g'(t) = \frac{Df''(x_0)}{f(x_0)}g(t)$$

Le coefficient en facteur de $g(t)$ est nécessairement une constante (au sens indépendant du temps) et cette constante est négative sinon l'équation serait celle d'un système instable (or la diffusion dans le matériau va tendre à répartir l'énergie fournie sur la face avant), une constante réelle négative peut toujours être appelé $-A^2$ et on en déduit :

$$\boxed{\forall t > 0,\quad g'(t) = -A^2 g(t)}$$

Cette équation s'intègre immédiatement : $\boxed{\forall\ t > 0,\quad g(t) = g_0 \exp\left(-A^2 t\right)}$, g_0 étant une constante d'intégration inconnue à ce stade.

3. En reportant l'expression de $g(t)$ dans l'équation (1) obtenue au début de la question précédente, on en déduit :

$$\forall x \in]0,e[,\quad -A^2 f(x) = Df''(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f''(x) + k^2 f(x) = 0}$$

avec $\boxed{k^2 = A^2/D}$.

Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique et la forme générale pour la solution est :

$$\boxed{\forall x \in]0,e[,\quad f(x) = \alpha\cos(kx) + \beta\sin(kx)}$$

4. Partons de la forme générale du champ de température :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = g(t)\frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

La fonction g ne s'annulant jamais, les conditions proposées sont équivalentes à :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0^+} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=e^-} = 0$$

ou compte tenu de la loi de Fourier $\forall t > 0,\ \ j_Q(0^+,t) = j_Q(e^-,t) = 0$, ce qui, physiquement correspond à l'absence de flux thermique aux limites du domaine en accord avec le passage du document 1 : « **Les pertes convectives sont supposées nulles sur toutes les faces** ». En pratique les parois ne sont pas thermiquement isolées mais il suffit comme indiqué au début de cette partie que les pertes thermiques s'effectuent en un temps long vis à vis du phénomène de diffusion thermique étudié.

Appliquons alors ces conditions aux limites :

$$\forall x \in\ ]0,e[\,,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x) = -\alpha k\sin(kx) + \beta k\cos(kx)$$

La condition en $x = 0^+$ impose $\beta = 0$ et la condition en $x = e^-$ impose :

$$\sin(ke) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_n = \frac{n\pi}{e} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^\star$$

Au final, la forme spatiale peut s'écrire :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^\star,\quad f(x) = \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi x}{e}\right).$$

Toutes les valeurs de n sont à ce stade possible et **l'équation de la chaleur étant linéaire** la solution la plus générale est une combinaison linéaire de ces solutions. Concernant le coefficient de la partie temporelle :

$$A_n^2 = Dk_n^2 = D\frac{n^2\pi^2}{e^2}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\forall x \in\ ]0,e[,\ \forall t > 0,\quad \theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\cos\left(\frac{n\pi x}{e}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{e^2}\right)}$$

5. Le système reçoit une énergie E à l'instant initial qui va diffuser au sein du matériau. En négligeant les échanges thermiques à la surface du matériau, cette énergie doit se conserver.
Le terme au sein de l'intégrale représente la variation d'énergie interne d'un élément de longueur dx du matériau, variation entre un instant t et l'instant initial. En intégrant sur l'ensemble du matériau, on doit retrouver l'énergie apportée.

Le calcul de l'intégrale conduit à :

$$\int_0^e \rho c\left[T(x,t) - T_0\right]\pi r^2 \mathrm{d}x = \int_0^e \rho c\left[T_{max} - T_0\right]\pi r^2 \mathrm{d}x + \int_0^e \rho c\left[\theta(x,t)\right]\pi r^2 \mathrm{d}x$$

En reprenant l'expression de T_{max} de la première partie, on obtient :

$$\int_0^e \rho c\left[T(x,t)-T_0\right]\pi r^2\mathrm{d}x = \int_0^e \rho c \times \frac{E}{\rho c e \pi r^2}\pi r^2\mathrm{d}x + \int_0^e \rho c\left[\theta(x,t)\right]\pi r^2\mathrm{d}x$$

$$\int_0^e \rho c\left[T(x,t)-T_0\right]\pi r^2\mathrm{d}x = E + \int_0^e \rho c\left[\theta(x,t)\right]\pi r^2\mathrm{d}x$$

Enfin $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \displaystyle\int_0^e \cos\left(\frac{n\pi x}{e}\right)\mathrm{d}x = 0$, on en déduit l'expression recherchée :

$$\boxed{\forall t > 0,\quad \int_0^e \rho c\left[T(x,t)-T_0\right]\pi r^2\mathrm{d}x = E}$$

L'expression proposée est bien compatible avec la conservation de l'énergie.

6. $\forall t > 0,\quad T(x=e^-,t) = T_{max} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\cos(n\pi)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{e^2}\right)$

   En suivant la proposition de l'énoncé, on teste $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\quad \theta_n = \theta_0$:

   $\forall t > 0,\quad T(x=e^-,t) = T_{max} + \theta_0\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{e^2}\right)$

   On prend alors la limite en $t = 0^+$ dans les deux membres en utilisant l'indication de l'énoncé et en considérant qu'en $t = 0^+$ l'énergie n'a pas pu diffuser à l'extrémité du matériau et que la température est nécessairement encore égale à T_0 :

   $$T_0 = T_{max} + \theta_0 \lim_{y\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-n^2\pi^2 y\right) \quad \text{avec} \quad y = \frac{Dt}{e^2}$$

   C'est à dire : $T_0 = T_{max} - \theta_0/2 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_0 = 2\left(T_{max} - T_0\right)$.

   Et finalement : $\forall\ t > 0,\ \forall\ x \in \left]0, e\right[$:

   $$\boxed{T(x,t) = T_{max} + \left(T_{max} - T_0\right) \times 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi x}{e}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{e^2}\right)}$$

   Cette solution est trivialement identique à la forme proposée dans l'énoncé. Notons que cette solution vérifie l'équation aux dérivées partielles, les conditions imposées sur la température et le flux aux limites du domaine.
   La modélisation fait que toute l'énergie est apportée en une fois à la limite du domaine ce qui entraîne une divergence non physique de la température à l'instant initial en $x = 0^+$ qui ne peut être évaluée ; c'est pour cela que la dernière condition portait plutôt sur la conservation de l'énergie apportée (Cf. question 5).

7. Avec la formule du champ de température :

   $$\boxed{\forall t > 0,\ u(0^+,t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{e^2}\right)}$$

   $$\boxed{\forall t > 0,\ u(e^-,t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{e^2}\right)}$$

8. ***Aux temps courts*** : $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} u(0^+,t) \to +\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} u(e^-,t) \to 0$ (grâce à la limite fournie dans l'énoncé).

   En face arrière, les effets de la diffusion ne se font pas encore ressentir et $T(e^-,0) = T_0$; la divergence en face avant est, comme expliqué précédemment, due au fait que toute l'énergie est modélisée comme apportée sur la surface à l'instant initial.

   Aux temps longs : $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} u(0^+,t) \to 1$ et $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} u(e^-,t) \to 1$.

   Aux temps longs et en l'absence de dissipation, la diffusion a homogénéisé la température au sein du matériau, on retrouve que l'énergie fournie permet au matériau d'atteindre la température T_{max} déterminée dans la première partie du problème.

9. Les constantes de temps étant de la forme $\tau_n = \dfrac{e^2}{n^2\pi^2 D}$, on ne conserve que le premier terme de la série, c'est à dire pour la face arrière :

   $$\boxed{\forall t > 0,\quad u_{approx.}(e,t) = 1 - 2\exp\left(-\frac{\pi^2 Dt}{e^2}\right)}$$

10. De la définition du temps de montée, on obtient :

    $$\frac{1}{2} = 1 - 2\exp\left(-\frac{\pi^2 Dt_{1/2}}{e^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi^2 Dt_{1/2}}{e^2} = \ln(4)$$

    C'est à dire : $\boxed{D = \dfrac{2\ln(2) \times e^2}{\pi^2 t_{1/2}}}$

3 Étude du Dural

1. Par lecture graphique $t_{1/2} = 0,248$ s, la formule obtenue à la question précédente conduit à :
$$D = \frac{2 \times (1,0 \times 10^{-2})^2 \times \ln(2)}{\pi^2 \times 0,248} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = 5,7 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}}$$
On peut remarquer que la constante de temps associée à la diffusion, de l'ordre de la seconde, est grande devant la durée associée à l'apport thermique initial de l'ordre de la milliseconde. Ceci valide le modèle consistant à considérer l'apport thermique comme une impulsion très brève.

2. En utilisant la valeur obtenue pour D, et les valeurs de la capacité thermique et de la masse volumique du Dural fournies dans le document 2, on en déduit :
$$\lambda = D \times \rho \times c = 5,7 \times 10^{-5} \times 2,8 \times 10^3 \times 880$$
$$\boxed{\lambda = 1,4 \times 10^2\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}}$$
On obtient un **résultat comparable à la valeur proposée à 5% près**.

3. La conduction au sein du matériau s'effectue en une durée caractéristique :
$$\tau_{conduction} \propto \frac{e^2}{D} = \frac{(1,0 \times 10^{-2})^2}{5,7 \times 10^{-5}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{conduction} \approx 2\ \mathrm{s}}$$
Cette valeur est, en ordre de grandeur, en accord avec l'évolution temporelle de la figure 4.

   Dans la première partie, on a montré que la constante de temps liée aux pertes conducto-convectives était donnée par :
$$\tau_{pertes} = \frac{\rho c e \pi r^2}{hS}$$
En négligeant l'aire latérale, on assimile la surface de contact aux deux sections de base du bloc soit $S = 2 \times \pi r^2$, finalement :
$$\tau_{pertes} = \frac{\rho c e}{2h} = \frac{2800 \times 880 \times 0,01}{2 \times 5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{pertes} \approx 40 \text{ minutes}}$$
Comme $\tau_{pertes} \gg \tau_{conduction}$, on peut négliger les pertes thermiques sur la durée de l'expérience.

4. À la fin de l'expérience, la température est uniforme égale à T_{max} contre T_0 au début de l'expérience. En l'absence de pertes, l'énergie apportée E s'identifie à l'augmentation de l'énergie interne du matériau :
$$E = \rho c \times Se \times \Delta T_\infty = 2800 \times 880 \times 0,01 \times 1,0 \times 10^{-2} \times 0,316$$
$$\boxed{E = 78\ \mathrm{J}}$$