

### Conversion électro-magnéto-mécanique

Le phénomène d'induction électromagnétique a mis en évidence la possibilité de convertir de l'énergie électrique en énergie mécanique et réciproquement.

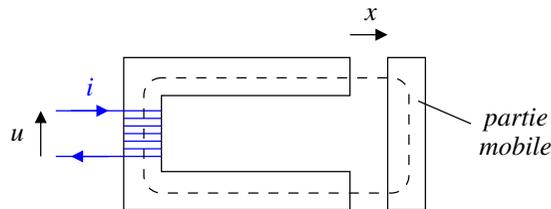
L'étude d'une machine électromécanique nécessite de connaître l'expression de la force (translation) ou du couple (rotation) s'exerçant sur la partie mobile. Les machines réelles sont constituées de matériau ferromagnétique, le calcul direct des actions électromécaniques n'est alors pas envisageable.

Sur un premier exemple en translation, on présente une méthode générale permettant de déterminer la force électromagnétique *via* une étude énergétique. Cette technique sera alors mise en œuvre pour l'étude des machines synchrones et à courant continu.

## 1 Le contacteur électromagnétique

### 1.1 Énergie magnétique

On considère dans un premier temps le dispositif représenté ci-dessous. Le matériau ferromagnétique est supposé linéaire, de perméabilité magnétique relative  $\mu_r$ , et on suppose qu'il n'y a pas saturation. La section du matériau ferromagnétique est  $S$  et sa longueur moyenne  $l$ . On appelle  $x$  l'épaisseur de l'entrefer



La bobine est constituée de  $N$  spires et parcourue par un courant  $i(t)$ .

→ Excitation magnétique : l'application du théorème d'Ampère sur le contour en pointillé conduit à :

$$H_{fer} \times l + H_{ext} \times 2x = Ni$$

→ Champ magnétique : le champ magnétique étant à flux conservatif, l'hypothèse d'une canalisation parfaite des lignes de champ à section constante impose :

$$B_{fer} = B_{ext} = B$$

→ Linéarité des matériaux :  $B_{ext} = \mu_0 H_{ext}$  et  $B_{fer} = \mu_0 \mu_r H_{fer}$

En combinant les différentes relations, on en déduit :

$$\frac{B \times l}{\mu_0 \mu_r} + \frac{B \times 2x}{\mu_0} = Ni \Rightarrow B = \frac{\mu_0 Ni}{2x + l/\mu_r}$$

→ Inductance propre :

On obtient alors le flux du champ magnétique à travers le bobinage :

$$\Phi = NBS \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 N^2 S}{2x + l/\mu_r} i$$

On en déduit l'inductance propre du système  $L(x) = \frac{\mu_0 N^2 S}{2x + l/\mu_r}$  qui est une fonction décroissante de  $x$ .

L'énergie magnétique du dispositif vaut :  $\mathcal{E}_m(x, i) = \frac{1}{2} L(x) i^2$ .

Remarque : il est possible d'obtenir l'expression de l'énergie magnétique à l'aide de la densité volumique d'énergie magnétique en sommant les contributions dans le fer et dans l'air :

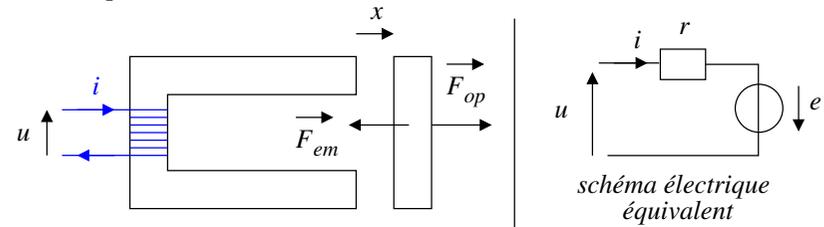
$$\iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r} dv = \iiint_{fer} \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r} dv + \iiint_{air} \frac{B^2}{2\mu_0} dv$$

### 1.2 Force électromagnétique

Dans cette partie, on cherche à déterminer la force électromagnétique s'exerçant sur la partie mobile.

#### Bilan énergétique (non exigible)

On considère le système constitué de l'ensemble {noyau + bobine}. On suppose qu'un opérateur extérieur déplace le barreau en exerçant la force  $F_{op} \vec{u}_x$ , la bobine étant traversée par un courant  $i$  et soumise à la tension  $u$ .



L'action de l'opérateur modifie le flux (inductance propre fonction de la position), ceci entraîne l'apparition d'une force électromotrice.

→ Équation électrique : en notant  $r$  la résistance du bobinage, l'équation s'écrit :

$$u = ri - e = ri + \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

À ce stade, il ne faut pas sortir  $L(x)$  de la dérivée car l'inductance varie avec le déplacement de la partie mobile.

→ Premier principe : on applique le premier principe à l'ensemble {noyau + bobine} entre deux instants voisins :

$$d(\mathcal{E}_m + E_c) = \delta W + \delta Q = uidt + F_{op}dx - ri^2dt \quad (2)$$

En reportant l'expression de la tension (équation 1) dans l'équation (2), on obtient :

$$d(\mathcal{E}_m + E_c) = id\Phi + F_{op}dx \quad (2')$$

→ Théorème de la l'énergie cinétique : appliqué à la partie mobile seule, le théorème de l'énergie cinétique conduit à :

$$dE_c = F_{op}dx + F_{em}dx \quad (3)$$

On compare alors les équations (2') et (3), ce qui donne :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_m = id\Phi - F_{em}dx &\Rightarrow F_{em}dx = id(Li) - d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \\ F_{em}dx = iLdi + i^2dL - \frac{1}{2}i^2dL - Lidi &\Rightarrow F_{em} = \frac{1}{2}i^2\frac{dL}{dx} \end{aligned}$$

La dernière formule peut se réécrire :

$$F_{em} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}Li^2 \right)_i = \left( \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial x} \right)_{i=cste}$$

### Expression de la force

Connaissant l'expression de l'inductance propre, on en déduit la force électromagnétique exercée sur la partie mobile :

$$F_{em} = -\frac{\mu_0 N^2 S i^2}{(l/\mu_r + 2x)^2}$$

→ Cette force, proportionnelle à  $i^2$ , est une force de rappel quel que soit le signe de  $i$  et est donc non nulle en moyenne dans le temps pour une excitation sinusoïdale.

→ Ce type de dispositif peut servir de contacteur électromagnétique permettant de commander la fermeture ou l'ouverture d'un circuit électrique *via* le déplacement de la partie mobile qui, en l'absence de courant dans la bobine, est ramenée à sa position initiale par l'intermédiaire d'un ressort.

En position verticale, un tel système peut servir à soulever une masse, il s'agit alors d'un électroaimant de levage.

### 1.3 Généralisation

On admet la généralisation de l'expression de la force.

Pour un système électromécanique, la force électromagnétique exercée sur la partie mobile en translation selon  $x$ , se déduit de l'énergie électromagnétique par la relation :

$$F_{em} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial x} \right)_{i=cste}$$

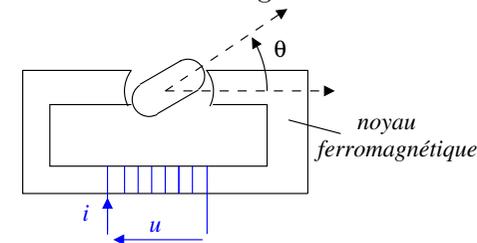
Pour un système électromécanique, le couple exercé sur la partie mobile en rotation d'angle  $\theta$ , se déduit de l'énergie électromagnétique par la relation :

$$\Gamma_{em} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial \theta} \right)_{i=cste}$$

### 1.4 Application : moteur à réluctance variable

#### Présentation

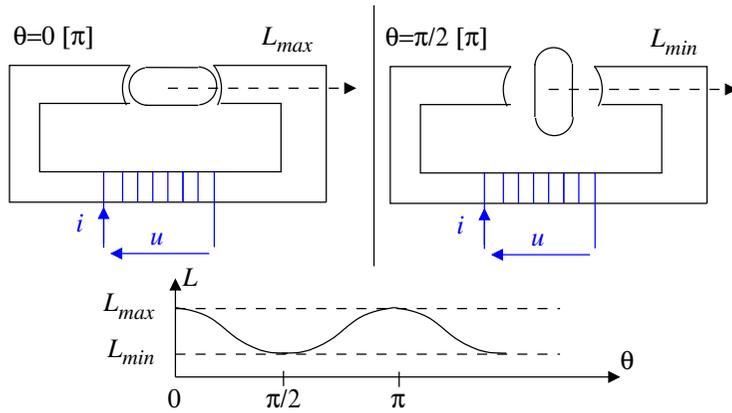
Sur le modèle du contacteur, on cherche à réaliser un convertisseur rotatif à un seul circuit. On propose le dispositif suivant. La partie mobile dans l'entrefer est animé d'un mouvement de rotation d'angle  $\theta$ .



#### Calcul du couple électromagnétique

Pour ce système à un seul circuit, l'énergie magnétique s'exprime à l'aide de l'inductance propre  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}L(\theta)i^2$ .

Par analogie avec le contacteur, on conçoit que l'inductance varie avec l'angle  $\theta$ , qu'elle est maximale pour  $\theta = 0[\pi]$  (entrefer minimal) et minimale pour  $\theta = \frac{\pi}{2}[\pi]$  (entrefer maximal).



À défaut de déterminer l'expression exacte de  $L(\theta)$ , on peut proposer l'approximation suivante pour cette fonction  $\pi$ -périodique :

$$L(\theta) = \frac{L_{min} + L_{max}}{2} + \frac{L_{max} - L_{min}}{2} \cos(2\theta)$$

Ce qui donne pour le couple :

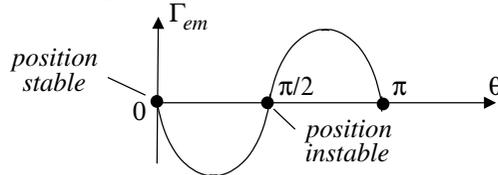
$$\Gamma_{em} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} \Rightarrow \Gamma_{em} = -\frac{1}{2} i^2 (L_{max} - L_{min}) \sin(2\theta)$$

→ Pour optimiser le couple, il faut maximiser l'écart entre  $L_{max}$  et  $L_{min}$  ; a contrario un rotor cylindrique isotrope pour lequel  $L = cste$  ne subirait aucun couple. Pour un moteur à un seul circuit, un rotor anisotrope est indispensable.

### Analyse du fonctionnement

→ Première situation :  $i = i_0 = cste$

Dans ce cas de figure, le couple a l'allure suivante :

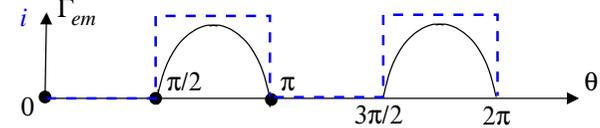


$\theta = 0[\pi]$  sont des positions d'équilibre stable et  $\theta = \frac{\pi}{2}[\pi]$  sont des positions d'équilibre instable. On retrouve l'idée qu'un aimant cherche à s'aligner selon le champ magnétique.

Pour  $i = i_0$ , les phases motrices  $\Gamma_{em} > 0$  sont exactement compensées par les phases de freinage  $\Gamma_{em} < 0$ . Le couple est nul en moyenne, le dispositif ne fonctionne pas en moteur.

→ Seconde situation :  $i = i_0$  pour  $\theta = [\pi/2, \pi]$  à  $\pi$  près et  $i = 0$  sinon.

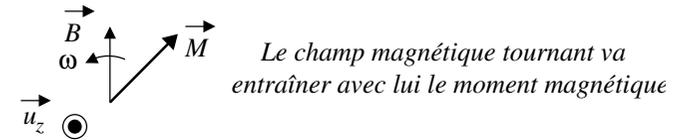
En fournissant le courant uniquement lorsque  $\Gamma_{em} > 0$ , le système peut alors fonctionner en moteur.



## 2 Machine synchrone

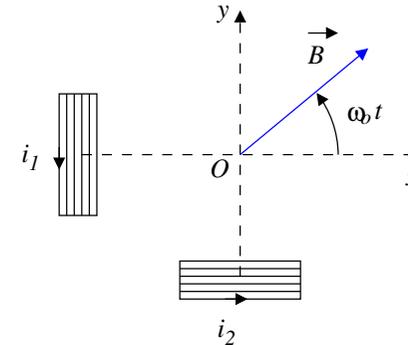
### 2.1 Principe du moteur synchrone

Pour obtenir une conversion électromécanique, on peut utiliser un champ magnétique tournant et mettre à profit le couple  $\vec{\Gamma}$  exercé par le champ magnétique sur le moment magnétique :  $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ .



### Création d'un champ magnétique tournant

La manière la plus simple de générer un champ magnétique tournant consiste à utiliser deux bobines placées en quadrature spatiale (bobines d'axes  $Ox$  et  $Oy$ ) et de les faire parcourir par des courants en quadrature temporelle (déphasés de  $\pi/2$ ).



En tout point de son axe, une bobine crée un champ magnétique dirigé selon cet axe et proportionnel à l'intensité du courant.

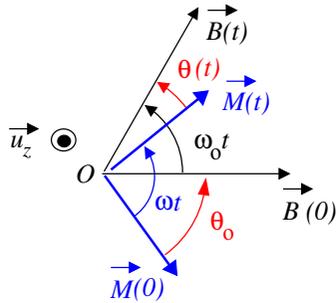
Avec  $i_1(t) = i_0 \cos(\omega_0 t)$  et  $i_2(t) = i_0 \sin(\omega_0 t)$ , on obtient un champ magnétique tournant :

$$\vec{B} = ki_1(t)\vec{u}_x + ki_2(t)\vec{u}_y \Rightarrow \vec{B} = ki_0 [\cos(\omega_0 t)\vec{u}_x + \sin(\omega_0 t)\vec{u}_y]$$

Remarque : le courant distribué étant triphasé, on utilise préférentiellement trois bobines dont les axes font entre eux des angles de  $2\pi/3$  et dont les courants sont déphasés de  $2\pi/3$ .

### Mise en équation du mouvement du moment magnétique

On considère le mouvement d'un moment magnétique en rotation dans un champ magnétique tournant :



À l'instant  $t$ , le champ magnétique  $\vec{B}(t)$  et le moment magnétique  $\vec{M}(t)$  forment entre eux un angle  $\theta(t)$  tel que :

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \omega t = \theta_0 + (\omega_0 - \omega) t$$

L'action du champ magnétique tournant se traduit par un couple dont le moment par rapport à l'axe de rotation est :

$$\Gamma_z(t) = \mathcal{M}B \sin[\theta(t)] = \mathcal{M}B \sin[(\omega_0 - \omega) t + \theta_0]$$

En moyenne dans le temps, le couple est non nul ssi  $\boxed{\omega = \omega_0}$ , l'action du champ magnétique tournant se traduit alors par un couple de moment :

$$\boxed{\Gamma_z = \mathcal{M}B \sin \theta_0}$$

Le moment magnétique et le champ magnétique tournent à la même vitesse : on parle de machine synchrone.

### Limite du modèle

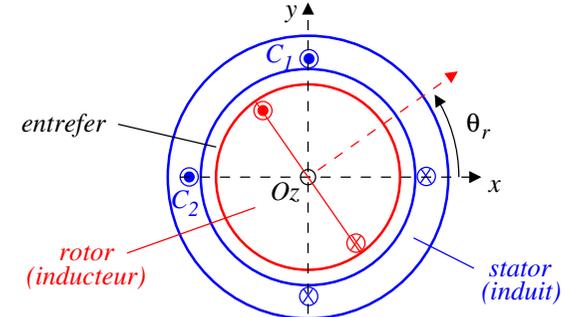
L'exemple précédent présente le modèle de la machine synchrone. Cependant pour réaliser une machine synchrone plus puissance, il faut disposer d'un rotor plus

imposant avec un faible entrefer (Cf. expression de l'inductance du contacteur), l'approximation dipolaire du moment magnétique n'est alors plus valable.

Dans la suite, on présente le cas d'une machine réelle pour lequel on réalise une étude énergétique afin de déterminer le couple électromagnétique.

## 2.2 Structure de la machine synchrone

On s'intéresse à une machine synchrone à pôles lisses et à excitation séparée.



→ Le matériau constituant le stator (fixe) et le rotor (mobile) est un matériau magnétique linéaire de perméabilité relative infinie.

→ L'épaisseur de l'entrefer est constante. On parle de machine à pôles lisses.

→ Les deux circuits bobinés sur le stator sont parcourus par un courant sinusoïdal ; le circuit bobiné sur le rotor est parcouru par un courant permanent. On parle de machine à excitation séparée.

→ L'ensemble du dispositif est de longueur  $L$  selon l'axe  $Oz$ . On négligera les effets de bord.

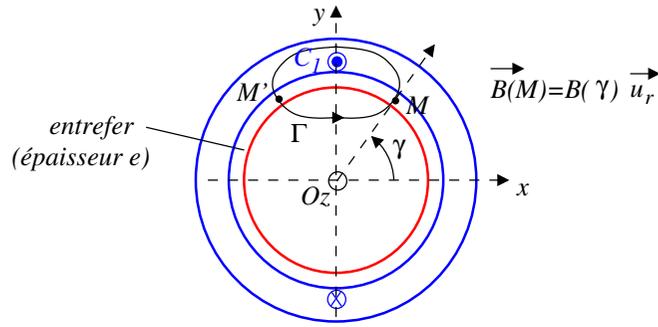
Il faut maintenant déterminer  $\vec{B}$  dans l'entrefer pour en déduire l'énergie magnétique afin de calculer le couple électromagnétique.

## 2.3 Champ magnétique dans l'entrefer

### Champ magnétique créé par une spire statorique unique

On s'intéresse pour l'instant au champ magnétique créé par une unique spire statorique.

→ Le plan  $(xOy)$  est un plan d'antisymétrie de la distribution des courants, le champ magnétique est contenu dans le plan  $(xOy)$ .



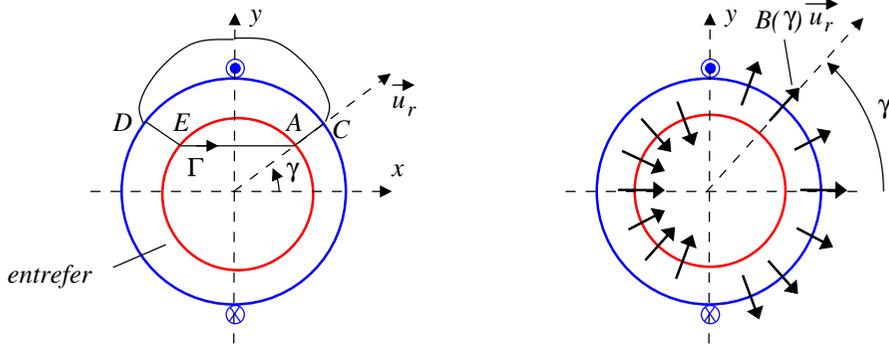
→ La perméabilité magnétique du matériau étant supposée infinie, les lignes de champ magnétique dans l'air de l'entrefer sont radiales et l'excitation magnétique  $H = B/(\mu_0\mu_r)$  est nulle dans le fer.

→ Le plan  $(yOz)$  est un plan de symétrie des courants et donc un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique, au niveau de l'entrefer :

$$B(\gamma) = -B(\pi - \gamma)$$

On applique alors le théorème d'Ampère pour l'excitation magnétique le long du contour  $\Gamma$ , l'excitation magnétique n'étant non nulle que dans l'entrefer :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = i$$



$$\text{avec } \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A^C \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_D^E \vec{H} \cdot d\vec{l} = H(\gamma)e - H(\pi - \gamma)e = 2H(\gamma)e = \frac{2B(\gamma)e}{\mu_0}$$

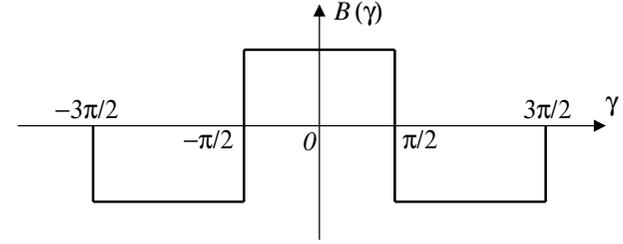
En conséquence :

$$\forall \gamma \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , \quad B(\gamma) = \frac{\mu_0 i}{2e}$$

et par symétrie :

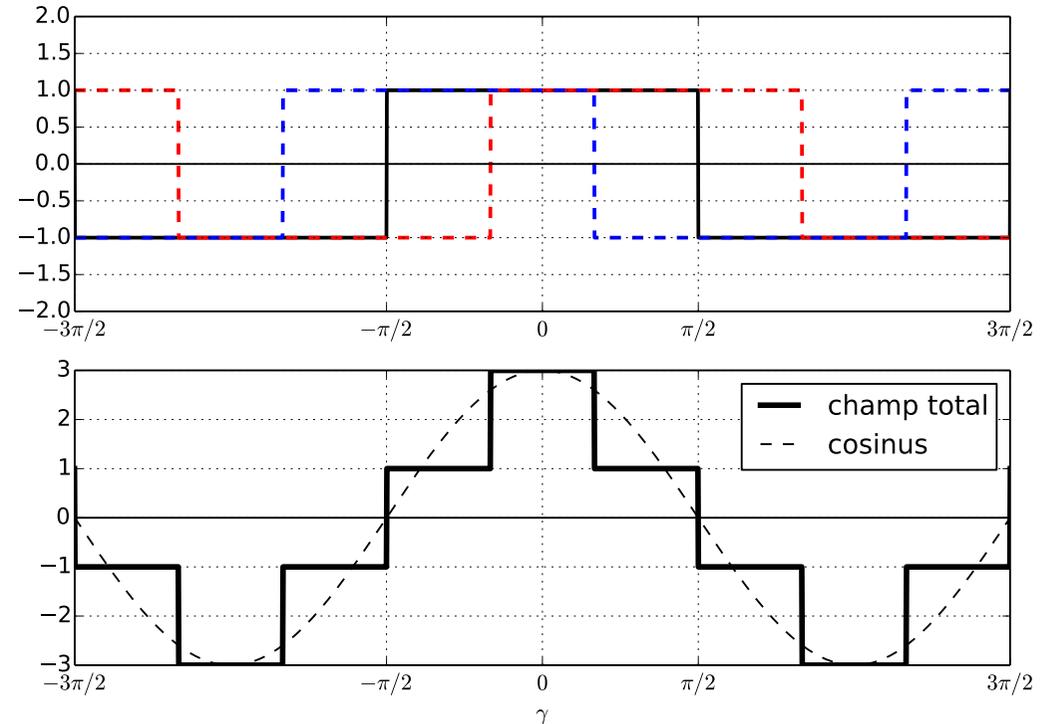
$$\forall \gamma \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ , \quad B(\gamma) = -\frac{\mu_0 i}{2e}$$

On en déduit le profil du champ magnétique radial dans l'entrefer :



Le champ créé dans l'entrefer par une seule spire n'est pas sinusoïdal. En plaçant d'autres spires parcourues par le même courant et placées dans des encoches décalées, on peut approcher une forme sinusoïdale.

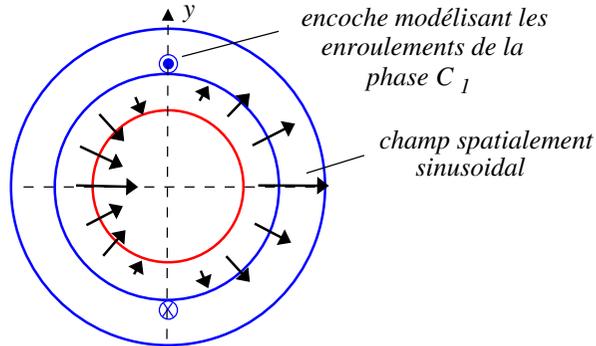
La figure ci-dessous présente l'allure du champ magnétique si on ajoute deux spires décalées respectivement de  $+\pi/3$  (rouge) et  $-\pi/3$  (bleu).



À la limite, en combinant suffisamment de spires parcourues par le **même courant** avec une répartition spatiale bien choisie, on parvient à approcher un champ sinusoïdal que l'on notera :

$$\vec{B}(\gamma) = K_s i \cos(\gamma) \vec{u}_r$$

Par la suite, on se contente de modéliser les enroulements de cette phase par deux encoches diamétralement opposées.



### Champ glissant statorique

Il s'agit maintenant de générer à l'aide des deux phases du stator le champ magnétique tournant qui va entraîner le rotor (Cf. principe du moteur synchrone).

Pour cela on utilise deux enroulements orthogonaux, les phases  $C_1$  et  $C_2$ , **alimentés en quadrature** à la pulsation  $\omega$  :

→ Champ créé par la phase  $C_1$  :

$$\text{avec } i_1(t) = I_s \cos(\omega t) \Rightarrow \vec{B}_1 = K_s I_s \cos(\omega t) \cos(\gamma) \vec{u}_r$$

→ Champ créé par la phase  $C_2$  :

$$\text{avec } i_2(t) = I_s \sin(\omega t) \Rightarrow \vec{B}_2 = K_s I_s \sin(\omega t) \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_r$$

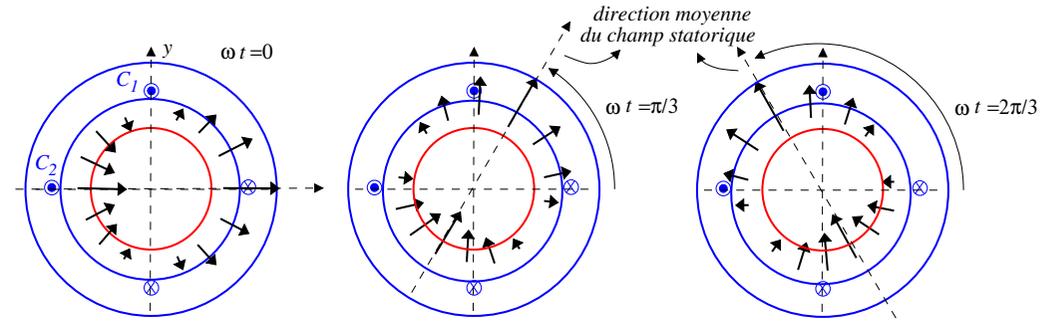
D'après le principe de superposition, le champ statorique résultant dans l'entrefer est la somme des champs créés par chacune des phases :

$$\vec{B}_s = K_s I_s [\cos(\omega t) \cos(\gamma) + \sin(\omega t) \sin(\gamma)] \vec{u}_r$$

$$\vec{B}_s = K_s I_s \cos(\omega t - \gamma) \vec{u}_r = K_s I_s \cos\left(\omega \left[t - \frac{\gamma}{\omega}\right]\right) \vec{u}_r$$

Le champ magnétique est spatialement sinusoïdal, il est maximal dans la direction  $\gamma = \omega t$ . Il tourne donc dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire  $\omega$ .

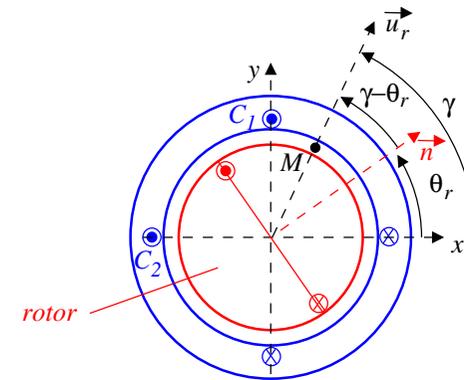
Le champ magnétique statorique est une onde sinusoïdale se propageant dans l'entrefer : on parle de **champ glissant**.



### Champ glissant rotorique

Il s'agit maintenant de créer, au niveau du rotor, « l'équivalent » du moment dipolaire permanent.

Pour cela le bobinage du rotor est parcouru par un **courant permanent** d'intensité  $I_r$ . Comme dans le cas du stator, la disposition des enroulements produit un champ magnétique spatialement sinusoïdal maximal selon la normale  $\vec{n}$  à l'enroulement et solide du rotor.



Contrairement au stator, le rotor tourne autour de l'axe  $Oz$ , la position du rotor est défini par l'angle  $\theta_r$ , le point  $M$  de l'entrefer étant toujours repéré par l'angle  $\gamma$ , l'angle entre le point  $M$  et la normale à l'enroulement rotorique vaut  $\gamma - \theta_r$  :

$$\vec{B}_r = K_r I_r \cos(\gamma - \theta_r) \vec{u}_r$$

Le champ rotorique est un champ glissant qui tourne avec le rotor à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}_r$ .

## 2.4 Énergie et couple

Connaissant le champ magnétique au sein de l'entrefer, on va pouvoir exprimer l'énergie magnétique du dispositif et en déduire le couple électromagnétique qui s'exerce sur le rotor.

### Énergie électromagnétique

L'énergie magnétique du dispositif s'obtient en calculant l'intégrale :

$$\mathcal{E}_m = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} dv$$

Dans l'hypothèse d'une perméabilité infinie du matériau ferromagnétique, l'énergie magnétique est localisée dans l'entrefer. On note  $a \gg e$  le rayon du rotor et  $h$  la longueur selon l'axe  $Oz$  de la machine :

$$\mathcal{E}_m = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} dv = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{(B_r + B_s)^2}{2\mu_0} h \times e \times a d\gamma$$

L'intégrale se décompose en trois termes :

→ le terme propre au rotor :

$$\mathcal{E}_{m,r} = hea \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{B_r^2}{2\mu_0} d\gamma = \frac{hea}{2\mu_0} K_r^2 I_r^2 \int_{\gamma=0}^{2\pi} \cos^2(\gamma - \theta_r) d\gamma = \frac{hea\pi}{2\mu_0} K_r^2 I_r^2$$

→ le terme propre au stator :

$$\mathcal{E}_{m,s} = hea \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{B_s^2}{2\mu_0} d\gamma = \frac{hea}{2\mu_0} K_s^2 I_s^2 \int_{\gamma=0}^{2\pi} \cos^2(\omega t - \gamma) d\gamma = \frac{hea\pi}{2\mu_0} K_s^2 I_s^2$$

→ le terme de couplage entre le stator et le rotor :

$$\mathcal{E}_{m,c} = hea \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{B_s B_r}{\mu_0} d\gamma = \frac{hea}{\mu_0} K_s I_s K_r I_r \int_{\gamma=0}^{2\pi} \cos(\omega t - \gamma) \cos(\gamma - \theta_r) d\gamma$$

$$\text{avec } \cos(\omega t - \gamma) \cos(\gamma - \theta_r) = \frac{\cos(\omega t - \theta_r)}{2} + \frac{\cos(\omega t + \theta_r - 2\gamma)}{2}$$

Seule l'intégrale du premier terme sera non nulle, on en déduit :

$$\mathcal{E}_{m,c} = \frac{\pi hea}{\mu_0} K_s I_s K_r I_r \cos(\omega t - \theta_r)$$

Remarque : les deux premiers termes sont indépendants de  $\theta_r$ , ceci s'explique par la symétrie cylindrique du dispositif, les inductances propres du stator et du rotor ne dépendent pas de  $\theta_r$ , seul le terme de couplage va contribuer au couple électromagnétique.

## Couple électromagnétique

Le rotor est animé d'un mouvement de rotation d'angle  $\theta_r$ , le couple électromagnétique exercé sur le rotor se déduit par dérivation de l'énergie électromagnétique :

$$\Gamma_{em} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial \theta_r} \right)_{i_r, i_s} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{m,c}}{\partial \theta_r} \right)_{i_r, i_s} \Rightarrow \Gamma_{em} = \frac{\pi hea}{\mu_0} K_s I_s K_r I_r \sin(\omega t - \theta_r(t))$$

## 2.5 Condition de synchronisme

### Couple moyen

On souhaite obtenir un couple moyen non nul. Il est donc nécessaire que l'argument du sinus :  $\omega t - \theta_r(t) = \alpha$ , avec  $\alpha$  une constante.

L'expression obtenue conduit à  $\dot{\theta}_r = \omega$ , la vitesse angulaire de rotation du rotor doit être égale à la pulsation du courant des phases du stator. On parle de **machine synchrone**.

En notant  $he \times 2\pi a = V$  le volume de l'entrefer,  $B_{m,s} = K_s I_s$  l'amplitude du champ magnétique statorique, et  $B_{m,r} = K_r I_r$  l'amplitude du champ magnétique rotorique, on obtient, dans la situation de synchronisme :

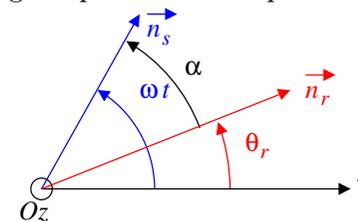
$$\Gamma_{em} = \langle \Gamma_{em} \rangle = \Gamma_{max} \sin \alpha \quad \text{avec} \quad \Gamma_{max} = \frac{V}{2\mu_0} B_{m,s} B_{m,r}$$

Remarque :

→ une machine de grande taille ( $a$  et  $h$ ) peut fournir un couple plus important,

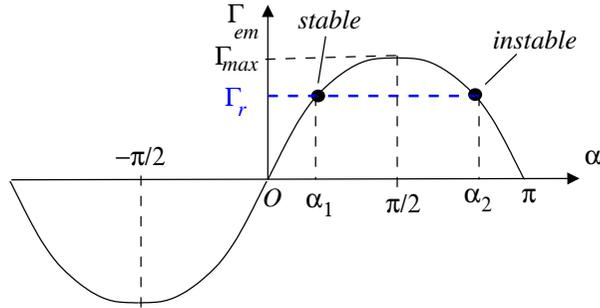
→ les champs magnétiques étant inversement proportionnels à  $e$ , le couple est lui aussi inversement proportionnel à  $e$ , un entrefer réduit augmente le couple dans la limite de non saturation.

→ Le résultant obtenu est en parfaite analogie avec le principe du moteur synchrone  $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_s$  en assimilant les directions moyennes des champs glissant aux directions du moment magnétique et du champ statorique :



## Fonctionnement moteur et stabilité

→ Fonctionnement moteur : le dispositif est moteur pour  $\alpha \in [0, \pi]$ , le champ rotorique est en retard par rapport au champ statorique : « l'aimant est entraîné par le champ tournant, l'aimant tente de s'aligner sur le champ ».



→ Point de fonctionnement : en régime permanent le couple  $\Gamma_{em} > 0$  équilibre la résultante du couple de frottement et du couple imposé par la charge utile, couple résistant que l'on note, en norme,  $\Gamma_r$ . Le point de fonctionnement correspond à  $\Gamma_{em} = \Gamma_r$ . Deux positions de fonctionnement  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  apparaissent.

→ Stabilité :

Partons de la position  $\alpha = \alpha_1$  et supposons que, pour une raison quelconque, le rotor ralentisse légèrement, celui-ci tend à prendre du retard sur le champ magnétique du stator,  $\alpha$  augmente; comme  $\Gamma_{em} = \Gamma_{max} \sin \alpha$  et  $0 < \alpha_1 < \pi/2$ , le couple moteur augmente et le rotor rattrape son retard.

Un raisonnement similaire montre que la position  $\alpha_2$  est instable.

→ Décrochage : au fur et à mesure de l'augmentation du couple résistant, l'angle  $\alpha$  augmente jusqu'à atteindre  $\pi/2$ . Si on impose un couple résistant supérieur au couple maximal  $\Gamma_{max}$ , il y a décrochage et le rotor finit par s'immobiliser.

## Démarrage du moteur synchrone

Le moteur synchrone ne peut démarrer si on alimente directement les bobines du stator à la pulsation  $\omega$  en partant de  $\dot{\theta}_r = 0$ . Il faut soit disposer d'un dispositif annexe qui lance le rotor, soit faire croître progressivement la pulsation  $\omega$  de telle sorte que  $\dot{\theta}_r \simeq \omega$  à tout instant. On parle de machine synchrone auto-pilotée.

## 2.6 Modèle électrique de l'induit, bilan de puissance

Dans cette partie, on cherche à montrer qu'en mode moteur la puissance mécanique fournie  $P_{meca} = \Gamma_{em}\omega$  est prélevée au réseau sous forme électrique.

Si on s'intéresse ici au cas moteur, les équations pourront facilement être transposée pour un fonctionnement en récepteur (alternateur).

## Mise en équation

On note respectivement  $I_r$ ,  $i_1$  et  $i_2$  les intensités des courants dans l'enroulement du rotor, et les deux enroulements du stator. De la même manière, on définit les résistances des enroulements  $R_r$ ,  $r_1$  et  $r_2$  et les flux à travers ces enroulements  $\Phi_r$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ .

→ Équation électrique pour l'enroulement du rotor :

$$u_r = RI_r - e_r = RI_r + \frac{d\Phi_r}{dt}$$

Le flux au niveau du rotor peut se décomposer selon un flux propre et un flux créé par le champ du stator :  $\Phi_r = \Phi_{r,p} + \Phi_{s \rightarrow r}$ . Pour le rotor  $I_r = cste$ , donc  $\Phi_r$  est une constante; de même le rotor tournant à la même vitesse que le champ statorique,  $\Phi_{s \rightarrow r}$  est aussi une constante, en conséquence :

$$\boxed{u_r = RI_r}$$

Remarque : il n'y a pas de phénomène d'induction au niveau du rotor, d'où son nom d'« inducteur ».

→ Équation électrique pour le premier enroulement du stator :

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\Phi_1}{dt}$$

Le flux à travers cet enroulement s'écrit de façon générale :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{1,r} I_r$$

$L_1$  est l'inductance propre du bobinage  $\mathcal{C}_1$ ;  $M_{12}$  est l'inductance mutuelle entre les deux enroulements  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  du stator, ces deux enroulements étant spatialement orthogonaux, il semble raisonnable de poser  $M_{12} = 0$ .

$M_{1,r}$  représente l'inductance mutuelle entre l'enroulement du rotor et  $\mathcal{C}_1$ . Pour  $\theta_r = 0$ , les bobinages coïncident, le couplage est maximal; pour  $\theta_r = \pi/2$ , les bobinages sont spatialement orthogonaux, le couplage est nul, on peut raisonnablement postuler  $M_{1,r} = M_0 \cos \theta_r$ .

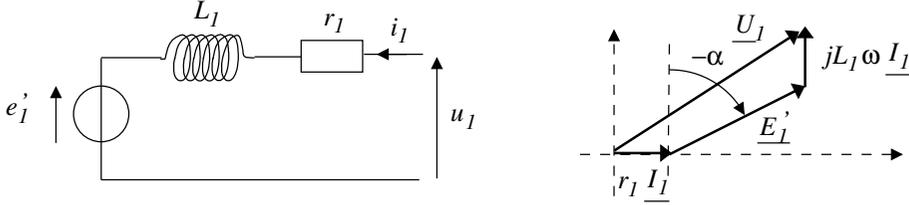
Avec  $\omega t - \theta_r = \alpha$  :  $\Phi_1 = L_1 i_1 + M_0 I_r \cos(\omega t - \alpha)$ , ce qui donne pour l'équation électrique :

$$\boxed{u_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + e'_1 \quad \text{avec} \quad e'_1 = -M_0 I_r \omega \sin(\omega t - \alpha)}$$

où  $e'_1$  désigne la **force contre-électromotrice** due à la rotation du rotor.

Le régime étant sinusoïdal, on peut utiliser les représentations complexes et réaliser le diagramme de Fresnel (l'origine des phases ayant été choisie sur  $i_1$ ).

$$\underline{U}_1 = r_1 \underline{I}_1 + L_1 j \omega \underline{I}_1 + \underline{E}'_1 \quad \text{avec} \quad \underline{E}'_1 = M_0 I_r \omega e^{j(\pi/2 - \alpha)}$$



→ Équation électrique pour le second enroulement du stator :

L'équation électrique est analogue à ceci près qu'il faut tenir compte de l'angle de  $\pi/2$  entre les deux enroulements du stator ( $M_{2,r} = M_0 \cos(\theta_r - \pi/2)$ ) :

$$u_2 = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + e'_2 \quad \text{avec} \quad e'_2 = M_0 I_r \omega \cos(\omega t - \alpha)$$

### Bilan énergétique

La puissance électrique totale fournie par les générateurs et absorbée par la machine vaut :

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_r I_r = \underbrace{r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + R_r I_r^2}_{\text{effet Joule}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2}{2} \right)}_{=0 \text{ en moyenne}} + e'_1 i_1 + e'_2 i_2$$

Et donc en moyenne :  $P_{\text{elec}}^{\text{fournie}} = P_{\text{cuivre}}^{\text{pertes}} + P_{\text{fcem}}^{\text{absorbée}}$ .

La puissance absorbée par les forces contre-électromotrices vaut :

$$P_{\text{fcem}}^{\text{absorbée}} = e'_1 i_1 + e'_2 i_2 = M_0 I_r I_s \omega [\sin(\omega t) \cos(\omega t - \alpha) - \sin(\omega t - \alpha) \cos(\omega t)]$$

$$P_{\text{fcem}}^{\text{absorbée}} = M_0 I_r I_s \omega \sin \alpha$$

Or la puissance mécanique fournie par le couple électromagnétique vaut :

$$P_{\text{meca}}^{\text{fournie}} = \Gamma_{em} \omega = \Gamma_{max} \omega \sin \alpha$$

En identification  $M_0 = \frac{\Gamma_{max}}{I_r I_s} = \frac{K_s K_r \pi h e a}{\mu_0}$ , on en déduit l'égalité des deux puissances :

$$P_{\text{meca}}^{\text{fournie}} = P_{\text{fcem}}^{\text{absorbée}}$$

Et finalement pour le bilan de puissance :

$$P_{\text{elec}}^{\text{fournie}} = P_{\text{cuivre}}^{\text{pertes}} + P_{\text{meca}}^{\text{fournie}}$$

À l'aide du diagramme de Fresnel, on constate que la force contre-électromotrice et l'intensité sont en phase pour  $\alpha = \pi/2$ , la puissance absorbée par les fcem est maximale, en accord avec le fait que le couple électromagnétique est maximal pour  $\alpha = \pi/2$ .

À l'opposé, en l'absence de couple résistant, le couple électromoteur est nul ( $\alpha = 0$ ), dans ce cas, la fcem et l'intensité sont en quadrature, aucune puissance n'est absorbée par la fcem.

### 2.7 Réversibilité : alternateur

En fonctionnement récepteur, la machine synchrone produit de l'énergie électrique.

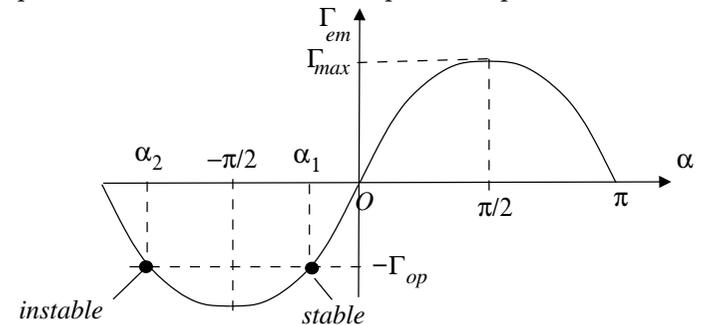
Le rotor est entraîné à la vitesse angulaire  $\omega$  par un opérateur qui fournit un couple moteur  $\Gamma_{op} > 0$ .

Le mouvement du rotor génère un champ magnétique variable dans les enroulements du stator créant une force électromotrice qui fournit de l'énergie électrique et qui, par ses effets, exerce un couple électromagnétique résistant sur le rotor  $\Gamma_{em} < 0$ .

Notons que le synchronisme est automatiquement assuré car, si le rotor tourne à la vitesse angulaire  $\omega$ , son champ magnétique génère un flux variant au même rythme.

#### Point de fonctionnement

En fonctionnement récepteur  $\Gamma_{em} < 0$ , et  $\alpha \in [-\pi, 0]$ . Dans cette situation, le champ rotorique est en avance sur le champ statorique.



Deux points de fonctionnement apparaissent,  $\alpha_1$  est la position stable de fonctionnement. En effet, partant de la situation  $\alpha = \alpha_1$ , on suppose que, pour une raison quelconque, le rotor accélère. Le rotor prend alors de l'avance sur le champ statorique,  $\alpha$  augmente en valeur absolue et se rapproche de  $-\pi/2$ , le couple électromagnétique résistant augmente en valeur absolue et le rotor décélère,  $\alpha$  reprend sa valeur initiale, le système est stable.

### Bilan énergétique

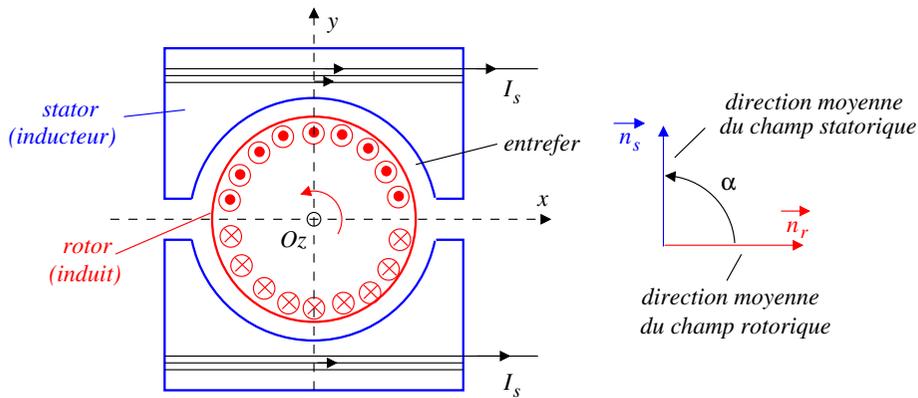
$\Gamma_{em} \times \omega < 0$ , la puissance électrique absorbée par les forces contre-électromotrices est donc négative, ce qui revient à dire que les forces électromotrices fournissent de l'énergie électrique au stator. Le stator n'est alors plus alimenté mais branché sur une impédance  $Z_c$  qui consomme l'énergie fournie par la force électromotrice.

## 3 Machine à courant continu

Les machines à courant continu font partie des convertisseurs électro-magnéto-mécanique réversibles. On s'intéresse par la suite aux machines à pôles lisses et à excitation séparée.

### 3.1 Structure d'un moteur à courant continu

Un moteur à courant continu comporte :



→ un **stator**, également appelé **inducteur**, fabriqué dans un matériau ferro-magnétique doux. L'enroulement inducteur parcouru par un courant permanent d'intensité  $I_s$  génère un champ magnétique, radial dans l'entrefer, et de direction

moyenne  $\vec{u}_y$  (Cf. schéma). Pour un petit moteur, un simple aimant permanent peut suffire.

→ un **rotor**, mobile autour de l'axe  $Oz$ , comportant des encoches parallèles à l'axe abritant les conducteurs de l'enroulement induit. Cet enroulement est alimenté en courant continu d'intensité  $i$  par l'intermédiaire d'un **collecteur** qui assure la circulation du courant telle que représentée sur la figure.

Il en résulte un champ rotorique de direction moyenne  $\vec{u}_x$ .

### 3.2 Rôle du collecteur

#### Principe

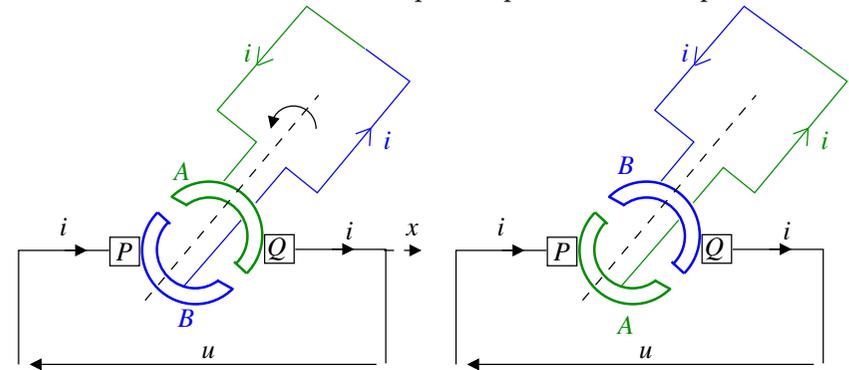
→ Dans le cas du moteur synchrone, nous avons constaté la présence d'un couple moteur lorsque les champs statorique et rotorique tournent de façon synchrone.

→ Pour un moteur à courant continu, le champ statorique  $\vec{B}_s$  étant fixe et dirigé, en moyenne, selon  $\vec{u}_y$ , le champ rotorique doit lui aussi être fixe malgré la rotation du rotor !

→ Ceci est assuré par l'intermédiaire du collecteur qui assure que le courant dans les spires change de signe lorsque les spires traversent le plan neutre  $xOz$ .

#### Réalisation pratique

Pour simplifier, on considère la présence d'un unique enroulement pour le rotor. Le collecteur est un commutateur rotatif constitué de deux lames  $A$  et  $B$  connectées à l'enroulement et de deux balais  $P$  et  $Q$  connectés au circuit électrique extérieur. Les courants s'inversent lorsque la spire traverse le plan neutre.



Le collecteur est le point faible du moteur à courant continu. Le contact glissant entraîne une usure régulière des balais.

### 3.3 Couple

On peut alors assimiler la machine à courant continu à un moteur synchrone dans lequel  $\alpha$ , l'angle entre le champ statorique et le champ rotorique est en permanence égal à  $\pi/2$ , ce qui donne pour le couple électromagnétique :

$$\Gamma_{em} = \Gamma_{max} \sin \frac{\pi}{2} = \Gamma_{max}$$

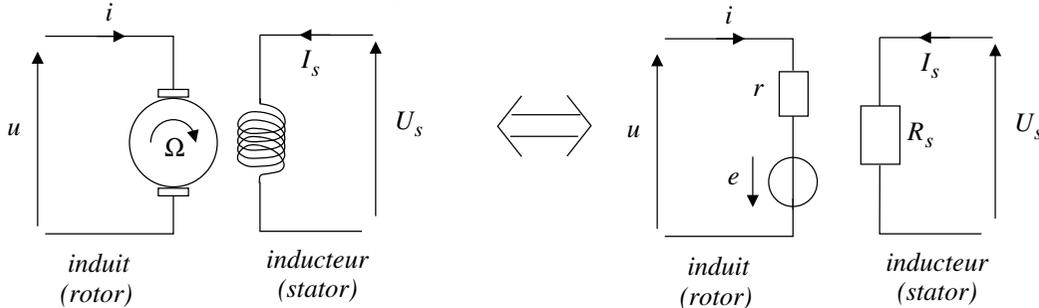
Ce couple est proportionnel à l'intensité  $i$  du courant qui circule dans le rotor et peut donc s'écrire :

$$\Gamma_{em} = \Phi_0 i$$

avec  $\Phi_0$ , la constante de couplage, homogène à un flux en weber (Wb), caractéristique du moteur et proportionnel au champ produit par l'inducteur.

### 3.4 Force contre-électromotrice

Représentons le schéma électrique équivalent du dispositif en régime entretenu, le rotor tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$  fixée.



→ Circuit statorique : le stator est parcouru par un courant permanent et le champ rotorique a une direction fixe, il n'y a pas de phénomène d'induction dans l'enroulement du stator qui est donc assimilé à une simple résistance  $R_s$ . **Le stator est l'inducteur.**

$$U_s = R_s I_s$$

→ Circuit rotorique : les spires du rotor tournant dans le champ du stator, il subit un phénomène d'induction, **le rotor est l'induit.**

$$u = ri - e$$

Le bilan énergétique s'écrit donc :

$$U_s I_s + ui = R_s I_s^2 + ri^2 - ei$$

On peut exprimer directement le bilan énergétique pour ce moteur : l'énergie

magnétique stockée dans le dispositif étant constante, la puissance électrique totale reçue par le système :  $U_s I_s + ui$ , va être dissipée par effet Joule et fournir la puissance mécanique pour faire tourner le rotor à la vitesse angulaire  $\Omega$ , ce qui s'écrit :

$$U_s I_s + ui = R_s I_s^2 + ri^2 + \Gamma_{em} \Omega$$

La comparaison des deux expressions conduit à :

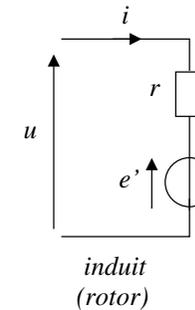
$$-ei = \Gamma_{em} \Omega$$

qui n'est autre que la relation habituelle : la puissance fournie par la force électromotrice est opposée à la puissance du couple électromagnétique.

On en déduit  $-ei = \Gamma_{em} \Omega = \Phi_0 i \Omega$  donc  $e = -\Phi_0 \Omega$ .

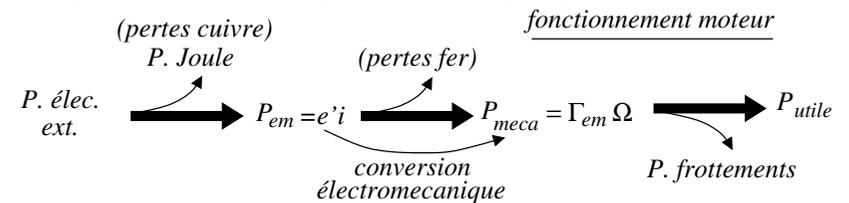
Pour s'affranchir du signe négatif, on introduit la **force contre-électromotrice**  $e' = -e$ , ce qui donne pour les caractéristiques de l'induit du moteur à courant continu :

$$\Gamma_{em} = \Phi_0 i \quad \text{et} \quad e' = \Phi_0 \Omega$$



### 3.5 Bilan énergétique du moteur réel

La puissance électrique fournie par les générateurs est cédée à la force contre électromotrice aux pertes cuivre près. La puissance électromagnétique est transformée en puissance mécanique aux pertes fer près. La puissance mécanique permet de fournir une puissance utile aux pertes mécaniques près dues aux frottements :



### 3.6 Régimes de fonctionnement moteur

#### Équations différentielles

On s'intéresse aux équations différentielles décrivant le fonctionnement du moteur sans supposer nécessairement le régime permanent atteint,  $i$  et  $\Omega$  pouvant varier.

→ Équation électrique : l'équation découle du schéma électrique équivalent de l'induit, on introduit une inductance propre pour tenir compte de l'installation du courant dans l'enroulement :

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + e' \quad \text{avec} \quad e' = \Phi_0 \Omega$$

→ Équation mécanique : l'équation s'obtient en appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe  $Oz$  pour le rotor de moment d'inertie  $J$  qui tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$ .

En plus du couple électromagnétique, on considère que le rotor est soumis à un couple résistant  $\Gamma_r$ , somme du couple utile  $\Gamma_u$  et d'un couple de frottement proportionnel à la vitesse angulaire :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_{em} - \Gamma_u - f\Omega \quad \text{avec} \quad \Gamma_{em} = \Phi_0 i$$

Partant de ces deux équations, on peut décrire les différents fonctionnements possibles du moteur à courant continu.

#### Démarrage et régime permanent

En régime permanent, l'équation électrique se simplifie selon :

$$u = ri + e' \quad \text{avec} \quad e' = \Phi_0 \Omega \quad \text{et} \quad \Gamma_{em} = \Phi_0 i$$

En éliminant  $i$ , on obtient la caractéristique « couple-vitesse » :

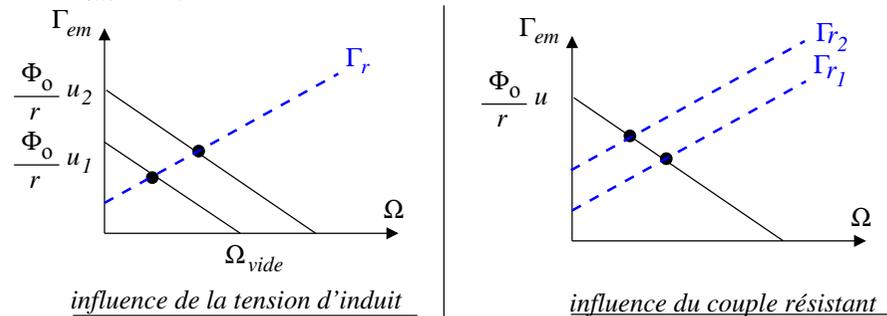
$$\Gamma_{em} = \frac{\Phi_0}{r} u - \frac{\Phi_0^2}{r} \Omega$$

→ Démarrage : pour le moteur à l'arrêt ( $\Omega = 0$ ), le couple est non nul :  $\Gamma_{em} = \frac{\Phi_0}{r} u$ .

**Contrairement au moteur synchrone le moteur à courant continu peut démarrer sans dispositif annexe.**

Le démarrage est possible si le couple moteur dépasse le couple résistant ce qui impose  $\frac{\Phi_0}{r} u(0) > \Gamma_u$ .

→ Point de fonctionnement : en régime permanent, les couples moteur et résistant doivent se compenser. Cette égalité se traduit par l'intersection des droites donnant  $\Gamma_{em}$  et  $\Gamma_r$  en fonction de la vitesse de rotation :



La vitesse de rotation augmente avec la tension de l'induit.

En régime établi, la vitesse  $\Omega$  du moteur est une fonction décroissante du couple résistant.

#### Régime transitoire

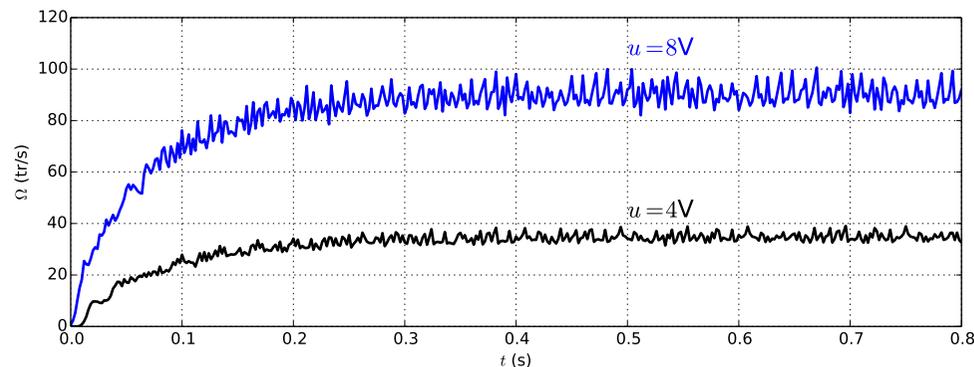
Si on néglige l'inductance propre de l'induit, le système d'équations s'écrit :

$$u = ri + \Phi_0 \Omega \quad \text{et} \quad J \frac{d\Omega}{dt} = \Phi_0 i - \Gamma_u - f\Omega$$

En éliminant l'intensité, on obtient l'équation différentielle pour la vitesse angulaire :

$$\frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{J} \left( \frac{\Phi_0^2}{r} + f \right) \Omega = \frac{1}{J} \left( \frac{\Phi_0 u}{r} - \Gamma_u \right)$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre.



L'étude expérimentale de la réponse à un échelon de tension peut permettre d'accéder aux paramètres du moteur tels que la constante de couplage  $\Phi_0$  ou le moment d'inertie  $J$ .

À titre d'exemple, les courbes sur la page précédente présentent la réponse à un échelon de tension d'un petit moteur à courant continu pour deux valeurs de la tension d'induit.

### 3.7 Réversibilité : fonctionnement en génératrice

#### Principe

Le caractère réversible de la machine à courant continu lui permet de fonctionner en génératrice.

Dans ce cas de figure, la rotation du rotor est imposée par un opérateur extérieur. La rotation de l'induit dans le champ magnétique du stator implique l'apparition d'une force électromotrice qui fournit une énergie électrique à une charge.

Au bilan on observe une conversion mécanique  $\rightarrow$  électrique.

#### Convention d'orientation

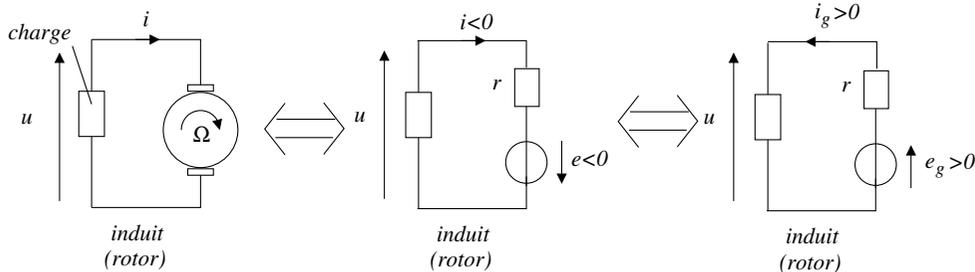
Repartons des formules caractérisant la machine à courant continu :

$$\Gamma_{em} = \Phi_0 i \quad \text{et} \quad e = -e' = -\Phi_0 \Omega$$

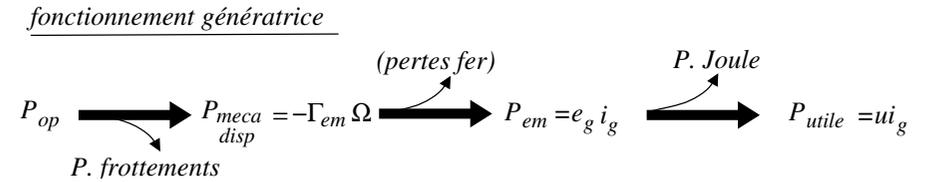
En régime entretenu, pour  $\Omega > 0$ , le couple de l'opérateur  $\Gamma_{op} > 0$  est équilibré par le couple électromagnétique  $\Gamma_{em} < 0$  ce qui impose  $i < 0$  et  $e < 0$  pour les grandeurs électriques.

On préfère souvent travailler avec des grandeurs positives ce qui revient à changer les orientations électriques au sein de l'induit comme indiqué sur la figure ci-après :

$$\boxed{\Gamma_{em} = -\Phi_0 i_g} \quad \text{et} \quad \boxed{e_g = \Phi_0 \Omega}$$



### Bilan énergétique de la génératrice



#### Applications

##### Génératrice tachymétrique :

Le rotor est branché sur une charge de très grande résistance (voltmètre) ce qui permet de négliger le courant dans le circuit électrique de l'induit, l'équation électrique se simplifie selon :

$$u = e_g = \Phi_0 \times \Omega$$

La tension mesurée donne accès à la vitesse angulaire, la génératrice tachymétrique est donc un capteur de vitesse angulaire.

##### Freinage d'une machine :

En fonctionnement générateur, le couple électromagnétique est opposé à la vitesse angulaire et la machine à courant continu se comporte comme un frein.

La machine à courant continu, devenu génératrice, est branchée sur une résistance capable de dissiper la forte puissance délivrée par la force électromotrice.

## Capacités exigibles :

→ Contacteur électromagnétique en translation :

Exprimer l'énergie magnétique d'un enroulement enlaçant un circuit magnétique présentant un entrefer variable.

Calculer la force électromagnétique s'exerçant sur une partie mobile en translation en appliquant l'expression fournie  $F = \left( \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial x} \right)_i$ .

Sur l'exemple du relais, expliquer le fonctionnement d'un contacteur électromagnétique.

→ Machine synchrone :

Décrire la structure d'un moteur synchrone diphasé et bipolaire : rotor, stator, induit, inducteur.

Pour une machine de perméabilité infinie à entrefer constant, exprimer le champ magnétique dans l'entrefer généré par une spire passant dans deux encoches opposées.

Expliquer qualitativement comment obtenir un champ dont la dépendance angulaire est sinusoïdale dans l'entrefer en associant plusieurs spires décalées.

Justifier l'existence d'un champ glissant statorique lorsque les deux phases sont alimentées en quadrature.

Justifier l'existence d'un champ glissant rotorique associé à la rotation de l'inducteur.

Exprimer l'énergie magnétique totale stockée dans l'entrefer en fonction de la position angulaire du rotor.

Calculer le moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor en exploitant l'expression fournie  $\Gamma = \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial \theta}$ .

Justifier la condition de synchronisme entre le champ statorique et le champ rotorique afin d'obtenir un moment moyen non nul.

Discuter qualitativement la stabilité du système en fonction du déphasage entre les deux champs glissants.

Identifier la difficulté du démarrage d'un moteur synchrone, décrire qualitativement le principe de l'auto-pilotage.

En admettant les expressions des coefficients d'inductance, établir les équations électriques vérifiées par les phases de l'induit et donner les représentations de Fresnel associées.

À l'aide d'un bilan énergétique où seules les pertes cuivre sont envisagées, jus-

tifier l'égalité entre la puissance électrique absorbée par les fcm et la puissance mécanique fournie.

Décrire les conditions d'utilisation de la machine synchrone en alternateur.

Citer des exemples d'application de la machine synchrone.

→ Machine à courant continu :

Décrire la structure d'un moteur à courant continu bipolaire à excitation séparée : rotor, stator, induit, inducteur.

Par analogie avec le moteur synchrone, expliquer que le collecteur établit le synchronisme entre le champ statorique stationnaire et le champ rotorique quelle que soit la position angulaire du rotor.

Citer l'expression du moment du couple  $\Gamma = \Phi i$ , établir l'expression de la fcm induite  $e = \Phi \Omega$  par un argument de conservation énergétique.

Décrire qualitativement les pertes existant dans une machine réelle : pertes cuivre, pertes fer, pertes mécaniques.

Établir les équations électrique et mécanique. Tracer la caractéristique  $(\Omega, \Gamma)$  à tension d'induit constante.

Analyser le démarrage d'un moteur entraînant une charge mécanique exerçant un moment  $-f\Omega$ .

**Mettre en œuvre un moteur à courant continu.**

Décrire les conditions d'utilisation de la machine à courant continu en génératrice. Choisir des conventions d'orientation adaptées.

Citer des exemples d'application de la machine à courant continu.