

Enoncé du DS commun de physique n°9

Ce sujet porte sur le laser hélium-néon. Un document est joint au sujet.

Si un élève note une erreur, il explique les choix qu'il est amené à prendre pour la suite.

1 Niveaux d'énergie du système

Le système He-Ne montre des niveaux d'énergie discrets. Cette partie se propose de comprendre pourquoi.

1.1 Particule quantique

On appelle parfois quanton, un objet quantique qui présente des aspects corpusculaire et ondulatoire : à toute particule d'énergie E et de quantité de mouvement p , on peut associer une onde

- de fréquence ν et de pulsation ω telles que $E = h\nu = \hbar\omega$;
- de vecteur d'onde k et de longueur d'onde λ tels que $p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$.

où $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34}$ J·s est la constante de Planck réduite.

1) Proposer un critère qui permet de savoir si l'étude d'une particule mérite un traitement quantique ou non. Préciser alors si l'étude d'un électron de masse $m = 10^{-30}$ kg et de charge $e = -1,6 \times 10^{-19}$ C dans un atome de taille $d = 10^{-10}$ m, avec une énergie $E = 10$ eV nécessite un traitement quantique ou non.

On s'intéresse à une particule (quantique) de masse m astreinte à se déplacer dans un espace unidimensionnel, assimilé à l'axe Ox . À cette particule est associée une fonction d'onde $\tilde{\psi}(x, t)$.

2) Rappeler la probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$ à l'instant t . En déduire la condition de normalisation portant sur l'intégrale de cette probabilité. Montrer que $\tilde{\psi}(x, t)$ est fixée à une phase près. Dire si c'est gênant.

1.2 Equation de Schrödinger

La fonction d'onde $\tilde{\psi}(x, t)$ suit l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + V \tilde{\psi}$$

où V est le potentiel dans lequel évolue la particule (énergie potentielle dont dérivent les forces auxquelles est soumise la particule). On suppose dans la suite que le potentiel n'est fonction que de l'espace : $V(x)$.

3) En cherchant la fonction d'onde sous la forme $\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{\varphi}(x) \tilde{\chi}(t)$, montrer que $i\hbar \frac{\tilde{\chi}'}{\tilde{\chi}} = E$ où E est une constante dont on donnera les unités. Etablir que $\tilde{\chi}(t) = e^{-i\omega t}$ est une solution sous réserve que la normalisation porte sur la partie spatiale. Relier E et ω .

1.3 Particule quantique dans un puits infini

On s'intéressera à une particule quantique astreinte à se déplacer dans un espace unidimensionnel limité ($x \in [0; \ell]$). On prendra un potentiel $V = 0$ si $x \in [0; \ell]$ et $V = \infty$ sinon.

4) Donner les conditions aux limites du puits infini imposées à $\tilde{\varphi}(x)$.

On suppose que $E > 0$.

5) Déterminer la forme des solutions $\tilde{\varphi}(x)$ qui conviennent en exprimant en particulier l'énergie E relative à chacune de ces solutions. Donner, sans calculer explicitement, la condition qui permet d'exprimer la constante de proportionnalité qui fixe parfaitement la solution.

6) Tracer, sur un même graphique représentant suivant Ox le puits de potentiel, pour les trois premières solutions trouvées :

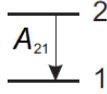
- le niveau d'énergie,
- la fonction $\varphi(x)$,
- la fonction $|\tilde{\psi}(x, t)|^2$.

7) Développer une analogie avec une corde vibrante fixée à ses deux extrémités pour retrouver rapidement les niveaux d'énergie quantifiés possibles.

2 Etude énergétique

2.1 Modélisation d'un tube au néon par un système à 2 niveaux

On s'intéresse dans un premier temps à une lampe à vapeur de néon (source classique), qu'on modélise par un système à 2 niveaux :

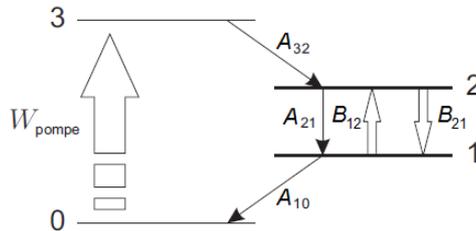


8) Rappeler le processus mis en jeu dans la transition entre les deux niveaux. Ecrire l'équation d'évolution de la population N_2 du niveau 2. Donner l'expression de la solution $N_2(t)$ et tracer la courbe de son évolution temporelle.

9) Dire en quoi le précédent processus impose une largeur spectrale à l'émission. Estimer cette largeur spectrale.

2.2 Modélisation d'un tube hélium-néon par un système à 4 niveaux

On modélise le milieu présent dans un tube hélium-néon comme un système à 4 niveaux :



La population totale est $N = N_0 + N_1 + N_2 + N_3$ et on note N_a la population du niveau a . On note :

- A_{ab} , le coefficient d'émission spontanée de a vers b ,
- $W_{pompe} N_0 dt$, la probabilité pendant dt de passage du niveau 0 au niveau 3 par pompage,
- $B_{12} = B_{21} = B$ le coefficient d'Einstein pour l'absorption et l'émission stimulée.

Ainsi on notera $W N_1 dt = B_{12} u_\nu(\nu) N_1 dt$, la probabilité d'absorption pendant dt d'un photon de fréquence ν , où $u_\nu(\nu)$ est la densité spectrale d'énergie électromagnétique volumique en fréquence.

10) Donner les unités de $u_\nu(\nu)$ dans le système international.

11) Ecrire les quatre équations d'évolution donnant les variations $\frac{dN_a}{dt}$ pour $a \in [0; 3]$. En déduire, en régime stationnaire, trois équations portant sur N_0 , N_1 et N_2 .

On suppose que $N_3 \approx 0$.

12) Donner un sens physique à $N_3 \approx 0$.

13) Montrer par un calcul assez fastidieux que

$$\frac{N_2 - N_1}{N} = \frac{(A_{10} - A_{21}) W_{pompe}}{A_{10} (W + A_{21}) + (A_{10} + A_{21} + 2W) W_{pompe}}$$

Par la suite, on supposera que la différence de population par unité de volume $n_2 - n_1$ est une constante.

2.3 Amplification laser

On note $I_\nu(z, t)$ la densité spectrale d'intensité lumineuse d'une onde plane qui se propage à la vitesse c suivant \vec{u}_z dans le milieu amplificateur.

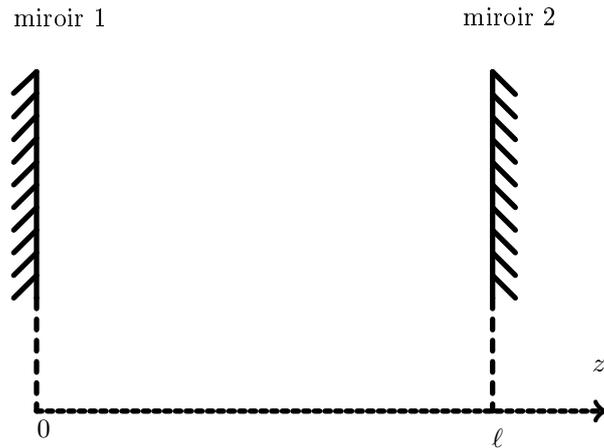
14) Montrer que $u_\nu = \frac{I_\nu}{c}$.

On ne considèrera dans cette sous-partie que l'émission stimulée et l'absorption entre les niveaux 1 et 2, dont la différence d'énergie vaut $h\nu$.

15) Faire un bilan d'énergie électromagnétique pour ν comprise entre ν_0 et $\nu_0 + d\nu$ pour un système de section S compris entre les abscisses z et $z + dz$. Montrer que le bilan peut se réécrire $\frac{\partial I_\nu}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} = \gamma I_\nu$. On donnera l'expression de γ .

16) Intégrer cette équation différentielle en régime permanent. Montrer que l'amplification de l'onde nécessite l'inversion de population. En déduire ce que cela impose à $A_{10} - A_{21}$ et à W_{pompe} . Donner pour chacune de ces deux précédentes expressions mathématiques une interprétation.

3 Etude de la cavité



On suppose que la cavité est composée

- en $z = 0$ d'un miroir parfait de coefficient de réflexion en amplitude $r_1 = -1$ pour le champ électrique complexe,
- en $z = \ell$ d'un miroir partiellement transparent, de coefficient de réflexion en amplitude $r_2 \in]-1; 0[$ pour le champ électrique complexe.

Le coefficient de réflexion en énergie du miroir n° i est $R_i = r_i^2$.

3.1 Etude qualitative des effets produits par la cavité

17) Expliquer pourquoi il faut qu'un des deux miroirs soit imparfait.

18) Décrire qualitativement (sans calculs mais grâce à des mots bien choisis et des schémas éclairants) l'intérêt que présente la cavité :

- sur l'amplification laser
- sur la cohérence temporelle du laser
- sur la cohérence spatiale

3.2 Effet de la cavité sur l'amplification laser

On suppose que le coefficient d'amplification linéaire de l'intensité de l'onde est $\gamma > 0$, comme dans la partie précédente.

19) Expliquer pourquoi le champ électrique complexe associé à l'onde passe de $\underline{E}(z = 0, t) = \underline{E}_0 e^{-j(\omega t)}$ à $\underline{E}(z = \ell, t) = \underline{E}_0 e^{\frac{\gamma}{2}\ell} e^{-j(\omega t - k\ell)}$ lorsque l'onde se propage de $z = 0$ à $z = \ell$. Exprimer l'expression du champ électrique complexe qu'on notera $\underline{E}_1(z = 0, t)$ après un aller-retour dans la cavité. Généraliser à p aller-retours.

20) Montrer que le champ électrique complexe en $z = 0$ dans la cavité est

$$\underline{E}(z = 0, t) = \underline{E}_0 e^{-j(\omega t)} \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{\gamma \ell} e^{+j2k\ell}}$$

21) En déduire deux conditions pour qu'il y ait résonance, l'une sur la longueur d'onde λ du rayonnement, l'autre sur le coefficient de transmission T_2 du miroir imparfait.

3.3 Effet de la cavité sur le spectre

22) Citer d'autres cas en physique où l'on trouve la relation de résonance sur la longueur d'onde. Interpréter la condition de résonance sur la longueur d'onde en termes d'interférence.

23) En reprenant des données numériques du document fourni, exprimer la valeur de l'écart en fréquence entre deux modes dans la cavité. Donner une valeur numérique majorant la largeur en fréquence d'un mode.

24) Expliquer en quoi la cavité permet d'augmenter la cohérence temporelle du laser.

4 Faisceau laser

4.1 Première modélisation de l'onde

On s'intéresse à l'onde électromagnétique issue du laser hélium-néon.

25) Donner l'expression du champ électrique complexe d'une onde plane progressive harmonique homogène. Expliquer pourquoi ce modèle est mis en défaut par une simple observation.

En fait, l'onde issue du laser hélium néon peut être modélisée par une onde gaussienne dont le champ électrique complexe s'écrit :

$$\underline{E}(r, z, t) = \underline{E}_0 e^{-j(\omega t - k z)} \frac{w_0 e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}}{w(z)} e^{j\left(\frac{k r^2}{2R(z)} - \varphi_G(z)\right)}$$

dans un repère cylindrique d'axe Oz , l'axe optique de la cavité, avec $\varphi_G(z)$ telle que $\tan \varphi_G(z) = \frac{z}{z_R}$.

26) Donner, grâce au document fourni, les noms et les expressions des fonctions $w(z)$ et $R(z)$, le nom des constantes w_0 et z_R ainsi que la relation qui lie ces constantes. Tracer, pour $z \geq 0$, les allures des évolutions avec z de $w(z)$, de $R(z)$ et de $\varphi_G(z)$.

27) Montrer que l'intensité lumineuse est de la forme $I(r, z) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 e^{-\frac{2r^2}{w(z)^2}}$. Tracer sur un même graphique les allures de $I(r, z = z_1)$ et $I(r, z = z_2)$ avec $z_2 > z_1$. Dire si cela est cohérent avec l'observation.

4.2 Deuxième modélisation de l'onde, par parties

28) Donner, dans le domaine $|z| \ll z_R$ une simplification des fonctions $w(z)$, $R(z)$, $\varphi_G(z)$ et de la divergence $\theta(z)$ du faisceau. Proposer une modélisation de l'onde dans ce domaine (on donnera un qualificatif à cette onde et on donnera les limites géométriques dans lesquelles cette modélisation est valable).

29) Faire de même dans le domaine $|z| \gg z_R$.

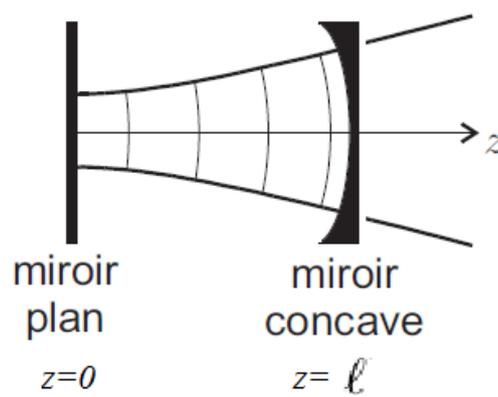
30) Définir la divergence $\theta(z)$ du faisceau dans le dernier cas et donner son expression. Vérifier que la précédente modélisation est cohérente avec les lois de la diffraction.

31) En utilisant l'inégalité de Heisenberg, expliquer pourquoi le faisceau laser diverge nécessairement.

4.3 Caractéristiques du faisceau gaussien et cavité

On suppose que la cavité est composée

- en $z = 0$ d'un miroir parfait plan (de rayon de courbure infini),
- en $z = \ell = 30$ cm d'un miroir partiellement transparent concave, de rayon de courbure $R_c = 1,0$ m.



La forme des miroirs et la taille de la cavité imposent pour un laser les caractéristiques de l'onde gaussienne émise. En effet, le faisceau laser doit être tel que sa surface d'onde au niveau des miroirs épouse la forme des miroirs et donc que les rayons de courbure de l'onde gaussienne et du miroir soient égaux au niveau de ceux-ci.

32) Montrer que $z_R = \sqrt{\ell (R_c - \ell)}$.

33) Faire différentes applications numériques donnant z_R , w_0 et θ .

34) Estimer le diamètre du faisceau du laser hélium néon en $z = 10$ cm puis en $z = 0,10$ km en disant dans quel domaine de modélisation on se place à chaque fois.

3.1 Optical stability

The optical resonator of the He-Ne laser is designed according to the given active material (Ne) and the required beam quality.

The objective is to achieve the best possible beam output in the basic Gaussian mode (TEM₀₀).

Generally speaking these are two contradictory requirements since a high power output requires the use of a large volume of the active material, whereas the fundamental mode is restricted to its own volume. This is why the hemispherical resonator has the optimal configuration for the He-Ne laser.

3.2 Gaussian beams

This can be explained by the characteristics of Gaussian beams. The beam radius w (w = waist) is a result of the following relationship:

$$w(z) = w_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

w_0 is the smallest beam radius at the minimum of the beam waist and z_R is the Rayleigh length.

$$z_R = \pi \cdot \frac{w_0^2}{\lambda}$$

Fig. 25 shows the relationship between the beam diameter and the length z . z points into the direction in which the beam is propagating.

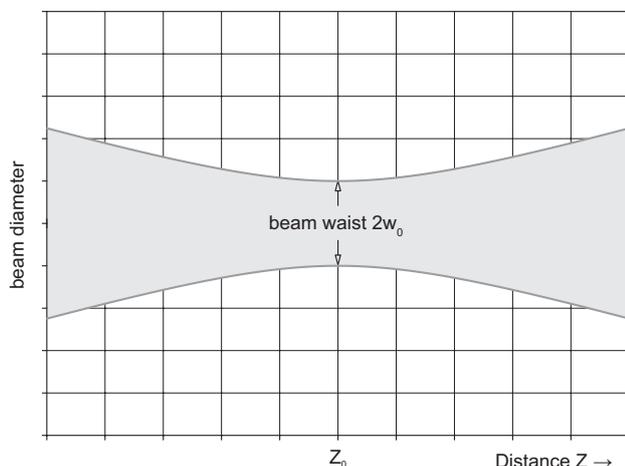


Fig. 25: The beam diameter of a Gaussian beam in the fundamental mode

The beam's radius is smallest at the location z_0 . The beam radius increases in a linear form as the distance increases. Since light waves are spherical waves a radius of curvature of the wave front can be allocated to each location z . The radius of curvature $R(z)$ can be calculated with the following relationship:

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$$

This is illustrated in Fig. 26

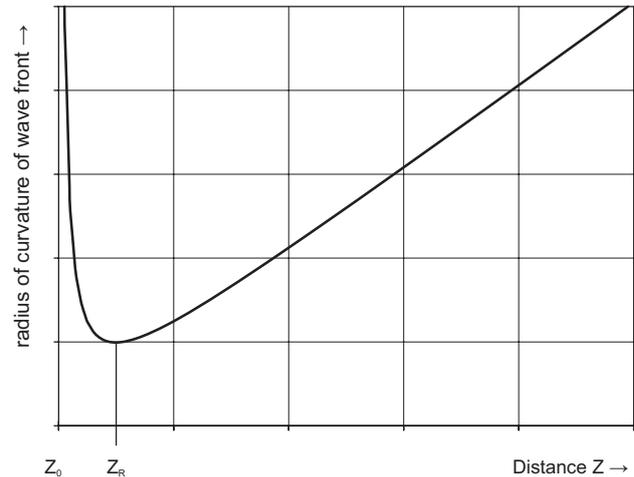


Fig. 26: Radius of curvature of the wave front versus the distance z from the beam waist at $z=0$

At $z = z_R$ the radius of curvature is at a minimum and increases at $1/z$ against zero. The radius of curvature at $z=0$ is infinite. At this point the wave front is plane. Above the Rayleigh length z_R the radius again increases in linear fashion. This is a basic but important statement. It shows that there is a real parallel beam at only one point of the light wave, that is at its focal point. In the range

$$-z_R \leq z \leq z_R$$

a beam can be considered as parallel or collimated. Fig. 27 shows the Rayleigh range as well as the divergence θ in the far field.

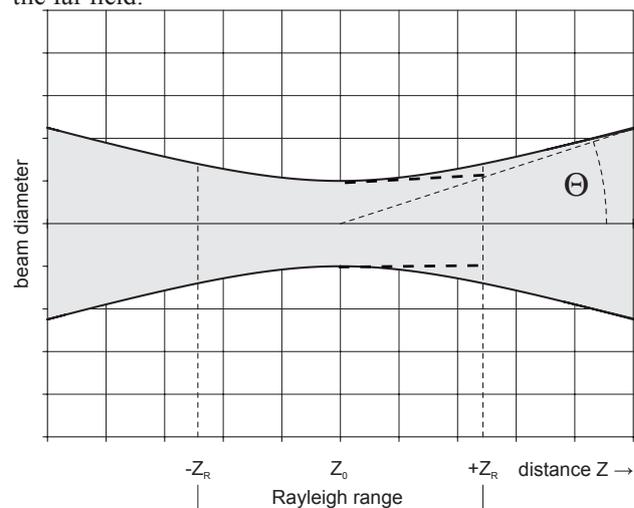


Fig. 27: Rayleigh range and divergence