

Référentiels non galiléens

Notes de cours

mardi 3 octobre 2017

I- Référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen

✳ Référentiel galiléen *s'y retrouver*

un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique : un objet isolé (c'est à dire ne subissant aucune force) suit un mouvement rectiligne uniforme.

Dans un référentiel galiléen R , le principe fondamental de la dynamique s'applique :

$$m\vec{a}_{/R}(M) = \sum \vec{f}_{\rightarrow M}$$

✳ Exemples de référentiels *s'y retrouver*

Le référentiel de Copernic (dans lequel le centre du système solaire et trois étoiles lointaines sont fixes) peut être considéré comme galiléen avec une excellente approximation.

Le référentiel héliocentrique a pour point fixe le centre du Soleil. Il est lui aussi galiléen avec une excellente approximation.

Le référentiel géocentrique a pour point fixe le centre de la Terre et trois étoiles lointaines. Le référentiel géocentrique est donc en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic. Il peut être considéré galiléen pour des expériences de durées courtes devant 1 an.

Le référentiel terrestre est lié à la Terre. Il est en rotation uniforme autour d'un axe fixe du référentiel géocentrique. Il peut être considéré galiléen pour des expériences de durées courtes devant 24 h.

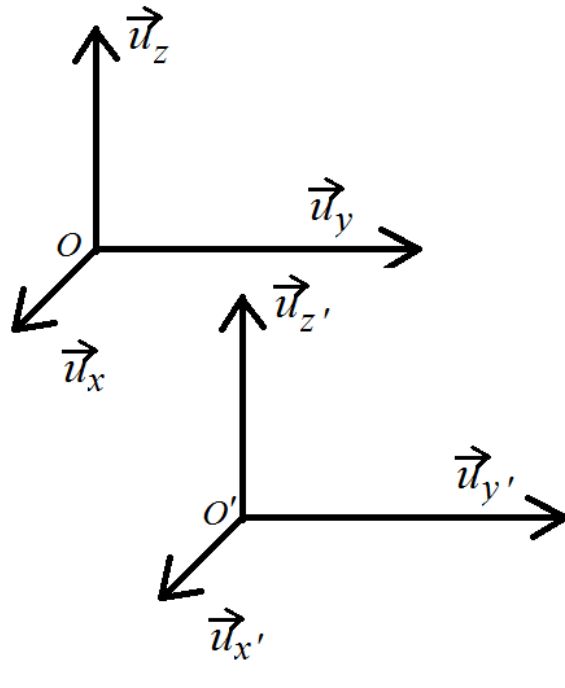
✳ Position du problème : *s'y retrouver*

Le principe fondamental de la dynamique ne peut pas être appliqué directement dans un référentiel non galiléen R' . En effet, les forces sont inchangées entre le référentiel galiléen R et le référentiel R' pourtant, si R' est accéléré par rapport à R , l'accélération du point M est différente dans les référentiels R et R' (ce que l'on va voir).

L'objectif de ce chapitre est de généraliser le principe fondamental de la dynamique en référentiel non galiléen. Cette généralisation est d'autant plus nécessaire que de très nombreuses études s'effectuent en référentiel non galiléen.

1. Lois de composition des vitesses et des accélérations

☼ **Position du problème** *s'y retrouver*



On s'intéresse à deux référentiels :

- R est le référentiel galiléen muni d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et d'une horloge ;
- R' est un autre référentiel muni d'un repère $(O', \vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$ et d'une autre horloge.

Si l'on néglige les effets relativistes, le temps s'écoule de la même façon dans les deux référentiels.

D'autre part, on suppose que R' est en translation par rapport à R . Aussi, on peut choisir

$$\begin{cases} \vec{u}'_x = \vec{u}_x \\ \vec{u}'_y = \vec{u}_y \\ \vec{u}'_z = \vec{u}_z \end{cases}$$

Un point matériel en M est repéré par

- $\overrightarrow{OM}(t) = x(t) \vec{u}_x + y(t) \vec{u}_y + z(t) \vec{u}_z$ dans R ;
- et $\overrightarrow{O'M}(t) = x'(t) \vec{u}'_x + y'(t) \vec{u}'_y + z'(t) \vec{u}'_z$ dans R' .

☼ **1 Loi de composition des vitesses pour deux référentiels en translation** *théorème*

La vitesse du point matériel en M est

- $\vec{v}_{/R}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right)_{/R} = \dot{x}(t) \vec{u}_x + \dot{y}(t) \vec{u}_y + \dot{z}(t) \vec{u}_z$ dans R ;
- et $\vec{v}_{/R'}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} \right)_{/R'} = \dot{x}'(t) \vec{u}'_x + \dot{y}'(t) \vec{u}'_y + \dot{z}'(t) \vec{u}'_z$ dans R' .

Aussi,

$$\vec{v}_{/R}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} \right)_{/R} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} \right)_{/R} = \vec{v}_{/R}(O') + \left(\frac{d(x'(t) \vec{u}_x + y'(t) \vec{u}_y + z'(t) \vec{u}_z)}{dt} \right)_{/R}$$

soit

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R}(O') + (\dot{x}'(t) \vec{u}_x + \dot{y}'(t) \vec{u}_y + \dot{z}'(t) \vec{u}_z)$$

⇒

La vitesse $\vec{v}_{/R}(M)$ du point M dans le référentiel R est liée à la vitesse $\vec{v}_{/R'}(M)$ du point M dans le référentiel R' par

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_e$$

où \vec{v}_e est la vitesse d'entraînement du référentiel R' par rapport à R .

☼ **Point coïncident** *s'y retrouver*

- | Le point coïncident est le point P qui coïncide avec M à l'instant t mais qui serait fixe dans R' .

☼ **Exemple de point coïncident** *s'y retrouver*

- | si un train (assimilé au référentiel R' se déplace par rapport au sol (le référentiel R) et qu'on y lance

une balle (le point matériel M), la trace laissée sur le sol à l'instant t est le point coïncident P .



Vitesse d'entraînement et point coïncident *s'y retrouver*

La vitesse d'entraînement est la vitesse du point coïncident : $\vec{v}_e = \vec{v}_{/R}(P)$.



remarque

Le point coïncident change : à un instant t' ultérieur, le point P est différent du point M . On peut alors définir un nouveau point coïncident P' .



2 Loi de composition des accélérations pour deux référentiels en translation

théorème

L'accélération du point matériel en M est

- $\vec{a}_{/R}(M) = \left(\frac{d\vec{v}_{/R}(M)(t)}{dt} \right)_{/R} = \ddot{x}(t) \vec{u}_x + \ddot{y}(t) \vec{u}_y + \ddot{z}(t) \vec{u}_z$ dans R ;
- et $\vec{a}_{/R'}(M) = \left(\frac{d\vec{v}_{/R'}(M)}{dt} \right)_{/R'} = \ddot{x}'(t) \vec{u}_x + \ddot{y}'(t) \vec{u}_y + \ddot{z}'(t) \vec{u}_z$ dans R' .

Or $\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_e \Rightarrow$

$$\vec{a}_{/R}(M) = \left(\frac{d\vec{v}_{/R'}(M)}{dt} \right)_{/R} + \left(\frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{/R} = \left(\frac{d(\dot{x}'(t) \vec{u}_x + \dot{y}'(t) \vec{u}_y + \dot{z}'(t) \vec{u}_z)}{dt} \right)_{/R} + \vec{a}_e$$

soit

$$\vec{a}_{/R}(M) = (\ddot{x}'(t) \vec{u}_x + \ddot{y}'(t) \vec{u}_y + \ddot{z}'(t) \vec{u}_z) + \vec{a}_e$$

\Rightarrow

L'accélération $\vec{a}_{/R}(M)$ du point M dans le référentiel R est reliée à l'accélération $\vec{a}_{/R'}(M)$ du point M dans le référentiel R' par

$$\vec{a}_{/R}(M) = \vec{a}_{/R'}(M) + \vec{a}_e$$

où \vec{a}_e est l'accélération d'entraînement du référentiel R' par rapport à R .

2. Force d'inertie d'entraînement



3 Expression de la force d'inertie d'entraînement : *théorème*

En partant du principe fondamental de la dynamique dans R

$$m\vec{a}_{/R}(M) = \sum \vec{f}_{\rightarrow M} = m\vec{a}_{/R'}(M) + m\vec{a}_e$$

\Rightarrow

dans R' non galiléen, il faut ajouter aux forces \vec{F} la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_e$$

3. Exemples de translations

Loi galiléenne de composition des vitesses *s'y retrouver*

Si R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R , la vitesse d'entraînement est partout la même et constante au cours du temps : $\vec{v}_e(M) = \vec{v}_0 = \text{cste}$

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_0$$

4 Ensemble des référentiels galiléens *théorème*

Si R' est en translation rectiligne uniforme dans R galiléen alors il n'y a pas de forces d'inertie à considérer dans R' . En effet, $\vec{v}_e = \text{cste} \Rightarrow \vec{a}_e = \vec{0}$. \Rightarrow

Tout référentiel R' en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen R est lui-même galiléen.

5 Energie potentielle de la force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une translation uniformément accélérée *théorème*

Si $\vec{a}_e = a_0 \vec{u}_x$, alors

$$\vec{f}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_e = -m \cdot a_0 \vec{u}_x = -\overrightarrow{\text{grad}}(m \cdot a_0 x)$$

\Rightarrow

Dans le cas d'une translation uniformément accélérée $\vec{a}_e = a_0 \vec{u}_x$, alors la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle $E_p = m a_0 x$.

Voiture qui freine *schéma*

La figure 1 représente une voiture (le référentiel R') qui est en translation rectiligne dans le référentiel (R) du sol ($\vec{v}_e = +v(t) \vec{u}_x$), mais qui freine : $\vec{a}_e = -a \vec{u}_x$. La force d'inertie d'entraînement "pousse" les passagers vers l'avant du véhicule.

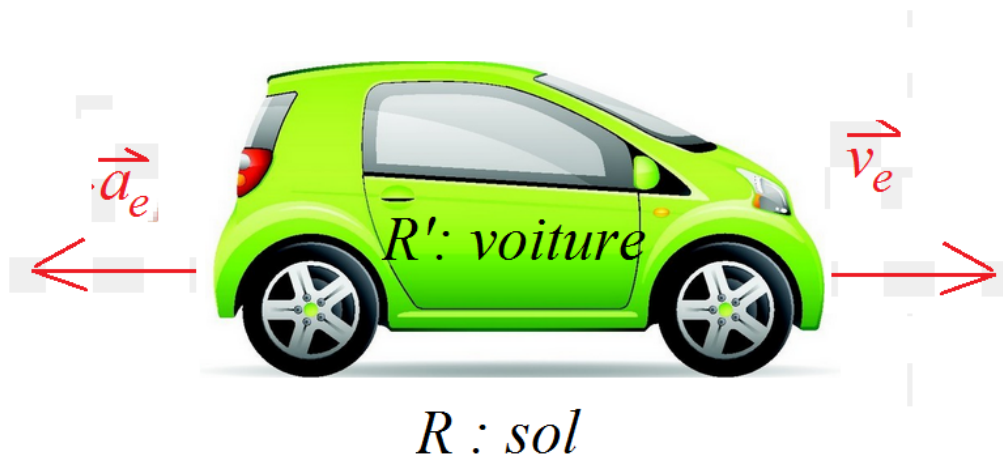


FIGURE 1 – Voiture qui freine

Grande roue *schéma*

La figure 2 représente une cabine (le référentiel R') de grande-roue (de rayon R_0) qui est en translation circulaire uniforme dans le référentiel (R) du sol ($\vec{v}_e = +v_0 \vec{u}_\theta$) : $\vec{a}_e = -\frac{v_0^2}{R_0} \vec{u}_r$.

R' : cabine
de la grande roue

R : sol

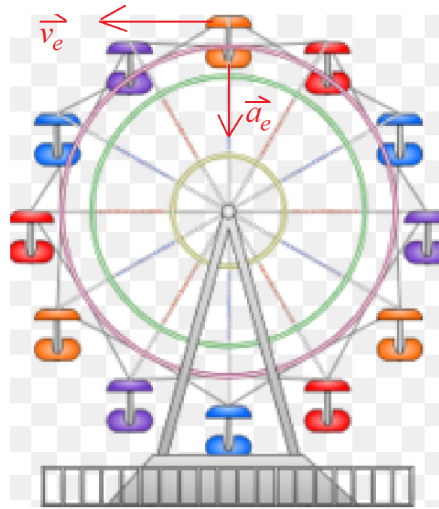


FIGURE 2 – Grande roue

 référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique schéma

La figure 3 représente le référentiel géocentrique qui est en translation par rapport au référentiel héliocentrique

 6 Forces de marées exercice

On s'intéresse à la Terre de centre O seule dans l'univers avec un astre A (ce peut être la Lune ou le Soleil) de masse M_A à la distance d_0 de O .

En utilisant le fait que O est fixe dans le référentiel géocentrique R_G , déterminer l'accélération d'entraînement \vec{a}_e de R_G dans un référentiel galiléen.

On définit la force de marée comme la somme de l'attraction gravitationnelle de A et de la force d'inertie d'entraînement exercée sur une particule de masse m à la surface de la Terre (de l'eau par exemple).

Montrer que l'effet de la force de marée est de générer deux "bourrelets" d'eau à la surface du globe terrestre.

En déduire qu'il existe environ deux marées hautes par 24 heures.

O est fixe dans le référentiel géocentrique R_G , donc la somme des forces est nulle :

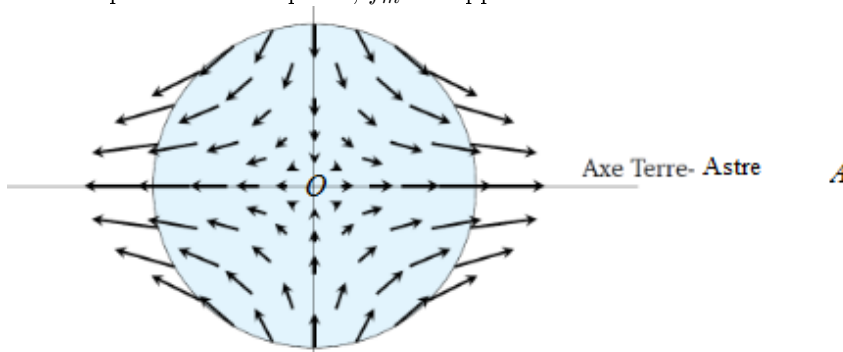
$$-G \frac{M_A M_T}{d_0^2} \vec{u}_{AO} - M_T \vec{a}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_e = -G \frac{M_A}{d_0^2} \vec{u}_{AO}$$

La force de marée au point P est :

$$\vec{f}_m = -G \frac{M_A m}{AP^2} \vec{u}_{AP} - m \vec{a}_e = -G \frac{M_A m}{AP^2} \vec{u}_{AP} + G \frac{M_A m}{d_0^2} \vec{u}_{AO}$$

Si P est plus près de A que O , \vec{f}_m est vers A et crée un bourrelet.

Si P est plus loin de A que O , \vec{f}_m est opposé à la direction de A et crée un bourrelet.



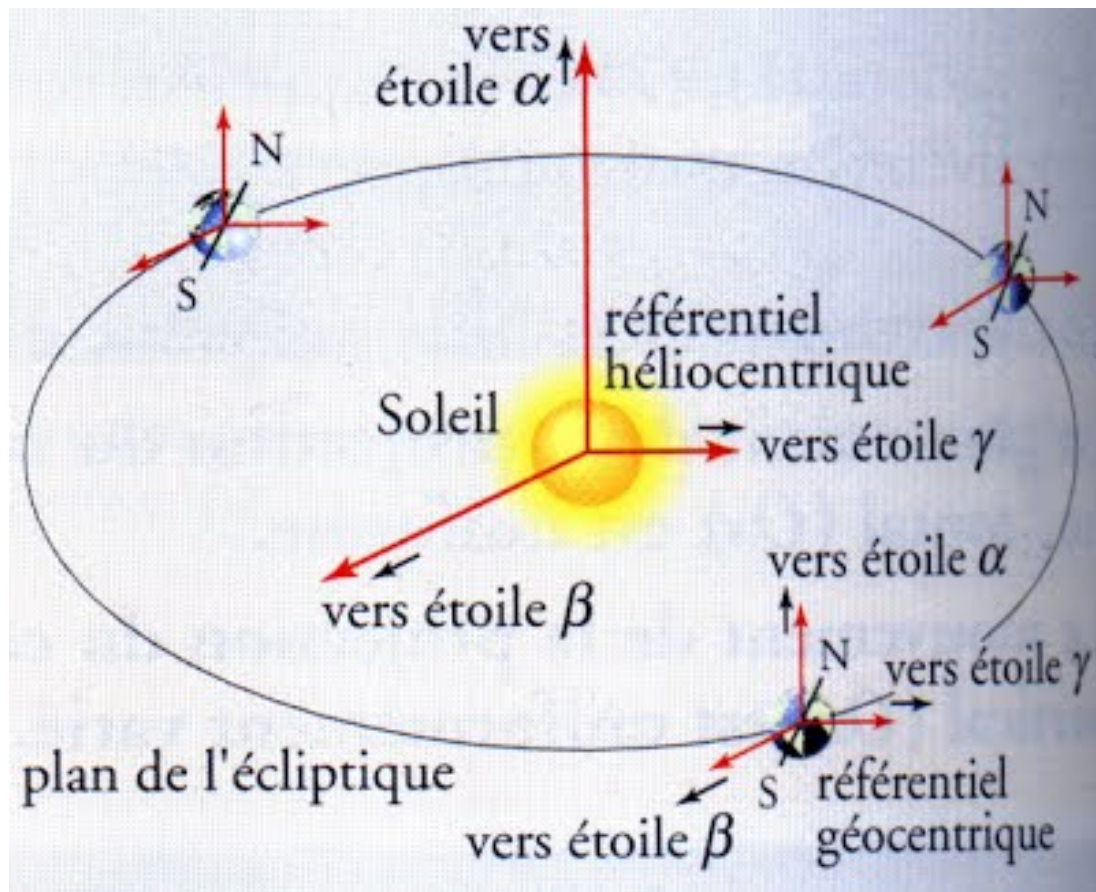


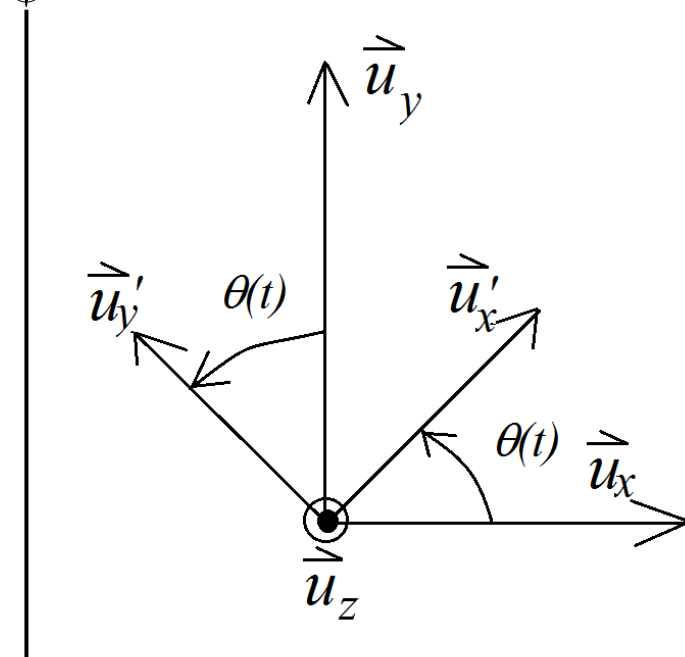
FIGURE 3 – référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique

□ Comme la Terre tourne en 24 heures dans le référentiel géocentrique, il existe environ (car il faut que l'astre A soit fixe,) deux marées hautes par 24 heures.

II- Référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen

1. Lois de composition des vitesses et des accélérations

✳ Position du problème *s'y retrouver*



On s'intéresse à deux référentiels :

- R est le référentiel galiléen muni d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et d'une horloge ;
- R' est un autre référentiel muni d'un repère $(O', \vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$ et d'une autre horloge.

Si l'on néglige les effets relativistes, le temps s'écoule de la même façon dans les deux référentiels.

D'autre part, on suppose que R' est en rotation par rapport à un axe fixe dans R . Aussi, on peut choisir :

$$\begin{cases} O' \text{ en } O \text{ et } \vec{u}'_z = \vec{u}_z \\ \vec{\Omega} = \Omega_z \vec{u}_z \text{ avec } \Omega_z = \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

Un point matériel en M est repéré par

- $\vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$ dans R ;
- et $\vec{O'M} = x' \vec{u}'_x + y' \vec{u}'_y + z \vec{u}_z$ dans R' .

✳ 7 Loi de composition des vitesses pour deux référentiels en rotation *théorème*

La vitesse du point matériel en M est

- $\vec{v}_{/R}(M) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/R} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$ dans R ;
- et $\vec{v}_{/R'}(M) = \left(\frac{d\vec{O'M}(t)}{dt} \right)_{/R'} = \dot{x}' \vec{u}'_x + \dot{y}' \vec{u}'_y + \dot{z} \vec{u}_z$ dans R' .

Aussi,

$$\vec{v}_{/R}(M) = \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{/R} = \left(\frac{d(x' \vec{u}'_x + y' \vec{u}'_y + z \vec{u}_z)}{dt} \right)_{/R}$$

soit

$$\vec{v}_{/R}(M) = (\dot{x}' \vec{u}'_x + \dot{y}' \vec{u}'_y + \dot{z} \vec{u}_z) + \left(x' \frac{d\vec{u}'_x}{dt} + y' \frac{d\vec{u}'_y}{dt} \right)$$

or

$$\begin{cases} \vec{u}'_x = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \\ \vec{u}'_y = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y \end{cases}$$

⇒

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}'_x}{dt} = \Omega_z (-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y) = \Omega_z \vec{u}'_y \\ \frac{d\vec{u}'_y}{dt} = \Omega_z (-\cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_y) = -\Omega_z \vec{u}'_x \end{cases}$$

donc

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \Omega_z (x' \vec{u}'_y - y' \vec{u}'_x) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

⇒

La vitesse $\vec{v}_{/R}(M)$ du point M dans le référentiel R est liée à la vitesse $\vec{v}_{/R'}(M)$ du point M dans le référentiel R' par

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_e$$

où \vec{v}_e est la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse du point coïncident.

8 Loi de composition des accélérations pour deux référentiels en rotation

théorème

L'accélération du point matériel en M est

- $\vec{a}_{/R}(M) = \left(\frac{d\vec{v}_{/R}(M)}{dt} \right)_{/R} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$ dans R ;
- et $\vec{a}_{/R'}(M) = \left(\frac{d\vec{v}_{/R'}(M)}{dt} \right)_{/R'} = \ddot{x}' \vec{u}_{x'} + \ddot{y}' \vec{u}_{y'} + \ddot{z}' \vec{u}_{z'}$ dans R' .

Or $\vec{v}_{/R}(M) = (\dot{x}' \vec{u}_{x'} + \dot{y}' \vec{u}_{y'} + \dot{z}' \vec{u}_{z'}) + \Omega_z (x' \vec{u}_{y'} - y' \vec{u}_{x'}) \Rightarrow$

$$\vec{a}_{/R}(M) = (\ddot{x}' \vec{u}_{x'} + \ddot{y}' \vec{u}_{y'} + \ddot{z}' \vec{u}_{z'}) + \left(\dot{x}' \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + \dot{y}' \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right) + \dot{\Omega}_z (x' \vec{u}_{y'} - y' \vec{u}_{x'}) + \Omega_z \left(\dot{x}' \vec{u}_{y'} - \dot{y}' \vec{u}_{x'} \right) + \Omega_z \left(x' \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} - y' \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)$$

$$\vec{a}_{/R}(M) = \vec{a}_{/R'}(M) + (\dot{x}' \Omega_z \vec{u}_{y'} - \dot{y}' \Omega_z \vec{u}_{x'}) + \Omega_z (x' \dot{\vec{u}}_{y'} - y' \dot{\vec{u}}_{x'}) + \Omega_z (-x' \Omega_z \vec{u}_{x'} - y' \Omega_z \vec{u}_{y'})$$

Si on pose

$$\vec{a}_C = 2 \cdot \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{/R'}(M) = 2 \cdot \Omega_z (x' \dot{\vec{u}}_{y'} - y' \dot{\vec{u}}_{x'})$$

On a bien \Rightarrow

L'accélération $\vec{a}_{/R}(M)$ du point M dans le référentiel R est reliée à l'accélération $\vec{a}_{/R'}(M)$ du point M dans le référentiel R' par

$$\vec{a}_{/R}(M) = \vec{a}_{/R'}(M) + \vec{a}_e + \vec{a}_C(M)$$

où l'accélération de Coriolis est

$$\vec{a}_C = 2 \cdot \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{/R'}(M)$$

et l'accélération d'entraînement est l'accélération du point coïncident :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{/R}(P)$$

9 Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen en rotation : *théorème*

Puisque dans R galiléen

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_C(M) + \vec{a}_e(M) = \frac{1}{m} \sum \vec{f}_{\rightarrow M}$$

donc

$$m \vec{a}_{M/R'} = \sum \vec{f}_{\rightarrow M} - m \vec{a}_C(M) - m \vec{a}_e(M)$$

\Rightarrow

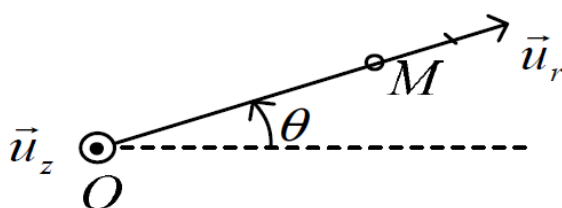
dans R' non galiléen, il faut ajouter aux forces $\vec{f}_{\rightarrow M}$ la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_e = -m \cdot \vec{a}_{/R}(P)$$

et la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{iC} = -m \cdot \vec{a}_C = -2 \cdot m \cdot \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'}$$

10 Tige tournant par rapport au sol *exercice*



On s'intéresse à une tige (le référentiel R'), qui fait à l'instant t un angle $\theta(t)$ avec l'axe Ox fixe dans le référentiel R du sol supposé galiléen. Cette tige tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Une perle est assimilée à un point matériel M sur cette tige à une distance $r(t)$ de O à l'instant t .

- Déterminer le mouvement du point coïncident P dans R et celui de M dans R' .
- En déduire dans R' la vitesse du point M et dans R la vitesse du point coïncident P et celle du point M . Vérifier la loi de composition des vitesses.
- Déterminer dans R' l'accélération du point M et dans R l'accélération du point coïncident P et celle du point M . Vérifier la loi de composition des accélérations.

Le point M est en mouvement rectiligne dans R' selon la tige. Le point coïncident est fixe dans R' , à la distance r de O . Il a donc un mouvement circulaire avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

$$\vec{v}_{/R'}(M) = \dot{r}\vec{u}_r.$$

$$\vec{v}_{/R}(P) = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

Dans R , la vitesse de M est

$$\vec{v}_{/R}(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_{/R}(P)$$

On a bien la loi de composition des vitesses.

$$\vec{v}_{/R'}(M) = \dot{r}\vec{u}_r \Rightarrow \vec{a}_{/R'}(M) = \ddot{r}\vec{u}_r$$

D'autre part P en mouvement circulaire dans R

$$\vec{v}_{/R}(P) = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a}_{/R}(P) = +r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

Dans R , l'accélération de M se calcule directement :

$$\vec{a}_{/R}(M) = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \dot{z}\vec{u}_z = (\ddot{r}\vec{u}_r) + (-r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta) + (2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$$

On a bien la loi de composition des accélérations car :

$$\vec{a}_C = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{/R'}(M) = 2\dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \dot{r}\vec{u}_r = 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

2. Force d'inertie d'entraînement axifuge



11 Force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une rotation à vitesse angulaire constante : *théorème*

On reprend les calculs précédents avec $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = 0$. On trouve

$$\vec{a}_{/R}(P) = +r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

soit $\vec{f}_{ie} = m r \omega^2 \vec{u}_r$. \Rightarrow

Dans le cas d'un référentiel R' qui tourne à une vitesse angulaire ω constante par rapport à un référentiel galiléen R autour de son axe fixe Oz , la force d'inertie est centrifuge : $\vec{f}_{ie} = m.r.\omega^2\vec{u}_r$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz .



12 Energie potentielle de la force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une rotation à vitesse angulaire constante : *théorème*

Si $\vec{f}_{ie} = m r \omega^2 \vec{u}_r$, alors

$$\vec{f}_{ie} = m.r.\omega^2\vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r$$

$\Leftrightarrow dE_p = -m r \omega^2 dr$ qu'on peut intégrer en

$$E_p = -\frac{1}{2}m r^2 \omega^2$$

\Rightarrow

Dans le cas d'un référentiel R' qui tourne à une vitesse angulaire ω constante par rapport à un référentiel galiléen R autour de son axe fixe Oz , la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle $E_p = -\frac{1}{2}m r^2 \omega^2$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz .

3. Force d'inertie de Coriolis

13 Propriétés de la force d'inertie de Coriolis *théorème*

La force de Coriolis s'appliquant toujours orthogonalement à la vitesse, cette force ne travaille pas. \Rightarrow La force d'inertie de Coriolis n'existe que si le point matériel M se déplace dans le référentiel non galiléen R' . Un point immobile dans le référentiel R' ne subit donc, outre les forces habituelles, que la force d'inertie d'entraînement.

Le travail de la force d'inertie de Coriolis est toujours nul.

14 Calcul de la force d'inertie de Coriolis sur un manège : *exercice*

On s'intéresse à un manège qui tourne à une vitesse angulaire ω par rapport à un référentiel galiléen autour de son axe fixe Oz vertical. Montrer que la force d'inertie de Coriolis ressentie par un point matériel de masse m qui se déplace avec une vitesse \vec{v} horizontale tend à faire tourner le point matériel vers la droite si le manège tourne dans le sens trigonométrique, vers la gauche si le manège tourne dans le sens horaire.

III- Effets des forces d'inertie dans le référentiel terrestre

1. Effets de la force d'inertie d'entraînement dans le référentiel terrestre

15 Calcul de la force d'inertie d'entraînement à la surface de la Terre : *exercice*

On peut supposer que le référentiel géocentrique est galiléen. Par rapport à celui-ci, le référentiel terrestre est en rotation autour de l'axe polaire, avec un vecteur rotation $\Omega = \frac{2\pi}{24h} \vec{u}_z$, où \vec{u}_z est orienté du Pôle Sud vers le Pôle Nord.

Soit un point à la surface de la Terre, de coordonnées dans le repère sphérique de centre O , le centre de la Terre : $r = R_T$ (le rayon de la Terre), $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$ (λ est la latitude) et φ , la longitude. Montrer que la force d'inertie d'entraînement ressentie par un point matériel de masse m en ce point est $\vec{f}_{ie} = m \cdot R_T \cdot \cos \lambda \cdot \omega^2 \cdot (\cos \lambda \cdot \vec{u}_r - \sin \lambda \cdot \vec{u}_\theta)$.

Le poids : *définition*

On définit le poids comme la somme de deux forces :

- l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur l'objet \vec{f}_G ;
- la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre \vec{f}_{ie} .

Direction du poids *schéma*

La figure 4 représente un point P à la surface de la Terre, de latitude λ . Un point matériel M de masse m coïncident avec P subit :

- l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre de masse M_T est, dans les coordonnées sphériques $\vec{f}_G = -G \frac{m \cdot M_T}{R_T^2} \vec{OP}$;
- et la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = m \cdot \Omega^2 \vec{HP}$.

La force d'inertie d'entraînement est une correction devant l'attraction gravitationnelle. Elle s'oppose en partie à cette dernière.

La direction indiquée par un fil à plomb est celle du champ de pesanteur \vec{g} . Elle ne passe pas *a priori* par O , le centre de la Terre.

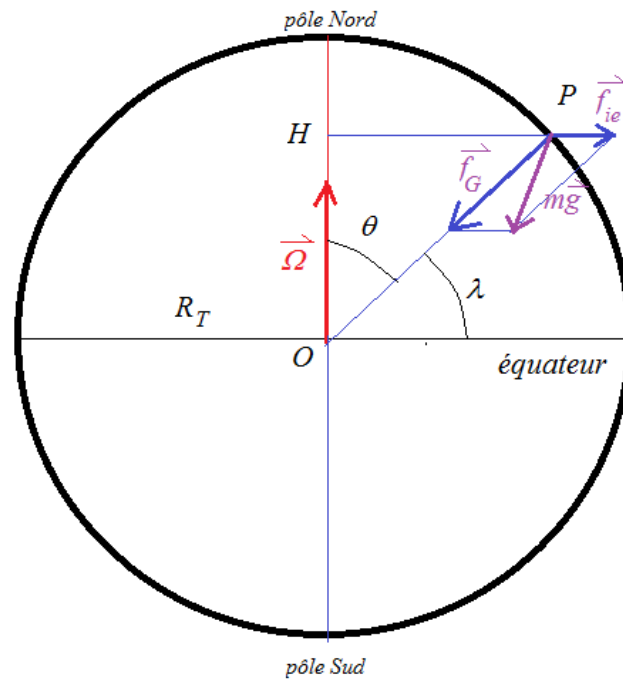


FIGURE 4 – Direction du poids



Inhomogénéités du champ de pesanteur à la surface de la Terre : s'y retrouver

La force d'inertie d'entraînement est la plus grande à l'équateur, là où l'on est le plus éloigné de l'axe de rotation. C'est donc à l'équateur que le poids d'un objet est le plus petit, et aux pôles qu'il est le plus grand.

De la même façon, plus l'altitude est élevée, plus l'attraction gravitationnelle est faible, et plus la force d'inertie est forte : un objet est moins lourd en altitude.

2. Effets de la force d'inertie de Coriolis dans le référentiel terrestre

Le pendule de Foucault *photo*



Foucault met au point au XIX^{ème} siècle un pendule qui oscille suffisamment longtemps pour qu'on ait le temps de voir son plan d'oscillation tourner dans le référentiel terrestre. Aujourd'hui, on peut voir un pendule de Foucault au musée des Arts et Métiers, à Paris.

La déviation du plan d'oscillation s'explique par la force d'inertie de Coriolis qui tend à dévier vers la droite la masse dans l'hémisphère nord, et vers la gauche dans l'hémisphère sud.

La déviation vers l'est : *schéma*

La figure 5 représente un point matériel de masse m lâché en A sans vitesse initiale dans le référentiel terrestre R' . Il est dévié vers l'est lors de sa chute. En effet, sa vitesse initiale dans le référentiel géocentrique R supposée galiléen est non nulle et plus importante que celle du sol (en B), plus proche de l'axe de rotation.



Effets de la force d'inertie de Coriolis dans le référentiel terrestre *à retenir*

La force d'inertie de Coriolis :

- dévie vers la droite un objet qui se déplace horizontalement dans l'hémisphère nord ;
- dévie vers la gauche un objet qui se déplace horizontalement dans l'hémisphère sud ;

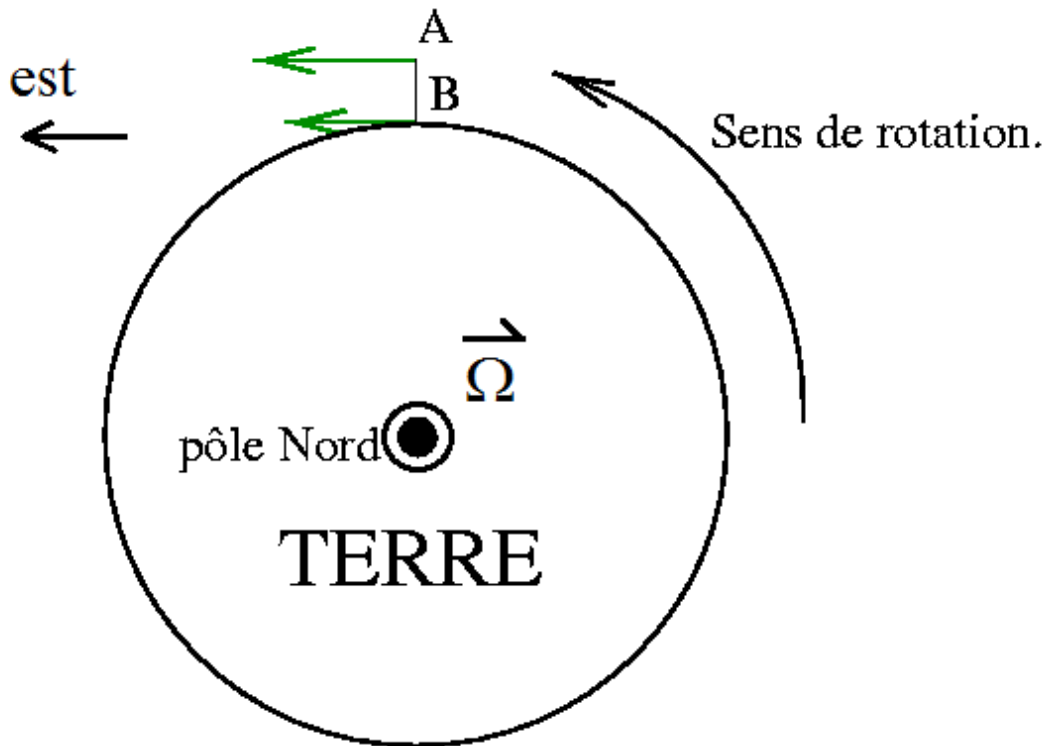


FIGURE 5 – La déviation vers l'est :

- dévie vers l'est un objet qui se déplace verticalement vers le bas.

1) La pesanteur artificielle dans le vaisseau de "2001 - l'Odyssée de l'Espace" *exercice*

Dans le film "2001 l'odyssée de l'espace" de Stanley Kubrick, un vaisseau spatial constitué d'un tore de rayon R tourne autour de son axe Oz avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{e}_z$ constante dans un référentiel galiléen.

1) Alors qu'ils sont loin de toute planète, les astronautes vivent dans le tore comme sur Terre : ils sont soumis à une gravité artificielle. Evaluer les valeurs numériques de R et de ω pour que les astronautes subissent une gravité artificielle de valeur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, à 10% près entre les pieds et la tête.

2) Dans une des scènes du film, un astronaute (Poole) fait un jogging dans le tore. Expliquer pourquoi il peut être très fatigant pour Poole de courir dans la station spatiale (on choisira des valeurs numériques pour illustrer le raisonnement). Le sens choisi pour faire le footing est-il important ?

Correction :

1) Force d'entraînement

Dans le tore, il y a la force d'inertie d'entraînement qui vaut $mR\omega^2$. On cherche donc $R\omega^2 = g$, avec $\frac{\delta R}{R} = 10\%$. On pourra prendre $\delta R \approx 1,75 \text{ m}$ (la distance entre les pieds et la tête). D'où $R = 17,5 \text{ m}$. Ainsi $\omega = \sqrt{\frac{9,81}{17,5}} = 0,75 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, soit une période de rotation de 8 s.

2) Force de Coriolis

Poole se déplace dans le vaisseau : il est soumis à la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{f}_{iC} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m\omega \vec{e}_z \wedge v_\theta \vec{e}_\theta = 2m\omega v_\theta \vec{e}_r$$

Si $v_\theta > 0$, il semble alors plus lourd, comme soumis à une pesanteur $g + \delta g$ avec

$$\delta g = 2\omega v_\theta$$

Si $v = 10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, $\delta g = 2 \times 0,56 \times \frac{10}{3,6} = 3,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$: il pèse 30% plus lourd ! **Eléments de correction :**

$$R = 17,5 \text{ m}, \omega = 0,75 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Les techniques mathématiques à connaître

Utilisation des différents repères

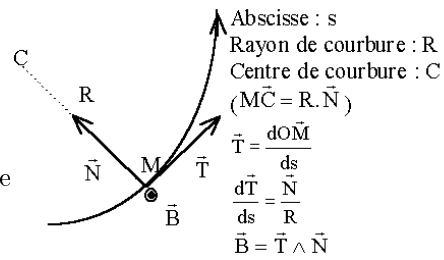
Repère de Frénet

Vecteurs de base : $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$

Position : repérée par l'abscisse s

Vitesse : $\vec{v} = \dot{s}\vec{T}$

Accélération : $\vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$ où R est le rayon de courbure de la trajectoire.



Repère cartésien

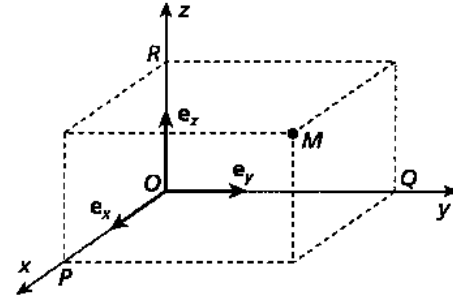
Vecteurs de base : $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Position : $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

Vitesse : $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$

Accélération : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$

Élément de volume : $d^3\tau = dx dy dz$



Repère cylindrique

Expression dans le repère cartésien :

$$\left. \begin{matrix} x = r \sin \theta \\ y = r \cos \theta \\ z = z \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r \end{matrix} \right.$$

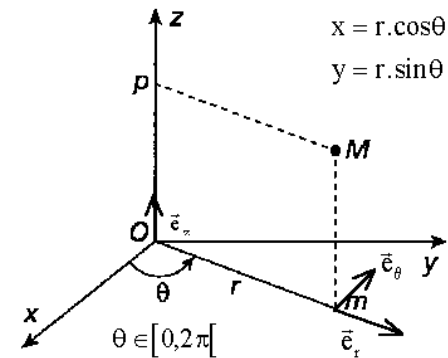
Vecteurs de base : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

Position : $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$

Vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$

Accélération : $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$

Élément de volume : $d^3\tau = dr (r d\theta) dz$



Repère sphérique

Expression dans le repère cartésien :

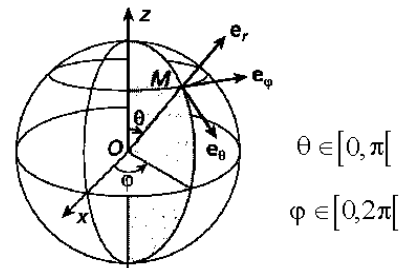
$$\left\{ \begin{matrix} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{matrix} \right.$$

Vecteurs de base : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

Position : $\vec{OM} = r\vec{u}_r$

Vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$

Élément de volume : $d^3\tau = dr (r d\theta) (r \sin \theta d\varphi)$



Généralisation

Coordonnées	\vec{u}_1	\vec{u}_2	\vec{u}_3	s_1	s_2	s_3	μ_1	μ_2	μ_3
cartésiennes	\vec{u}_x	\vec{u}_y	\vec{u}_z	x	y	z	1	1	1
cylindriques	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_z	r	θ	z	1	r	1
sphériques	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_φ	r	θ	φ	1	r	$r \sin \theta$

TABLE 1 – Généralisation pour les repères

Déplacement élémentaire : $d\vec{\ell} = \sum_i \mu_i ds_i \vec{u}_i$

Élément de volume : $d^3\tau = \prod_i \mu_i ds_i$.

Technique à maîtriser

jeudi 5 octobre 2017

I- Capacités

1. Effet des forces d'inertie d'entraînement dans un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Relier les lois de composition des vitesses (transformation de Galilée) dans le cas d'un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre à la relation de Chasles et au caractère supposé absolu du temps.

Utiliser le point coïncident pour exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement dans le cas d'un référentiel en translation par rapport à un autre.

Dans le cas d'un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen, déterminer la force d'inertie d'entraînement. Appliquer la loi de la quantité de mouvement, la loi du moment cinétique et la loi de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen en translation par rapport à un référentiel galiléen.

2. Effet des forces d'inertie d'entraînement dans un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Utiliser le point coïncident pour exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe.

Dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen, exprimer la force d'inertie axifuge. Associer la force d'inertie axifuge à l'expression familière « force centrifuge ».

Appliquer la loi de la quantité de mouvement, la loi du moment cinétique et la loi de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.

Distinguer le champ de pesanteur et le champ gravitationnel.

Associer les marées à un terme gravitationnel différentiel et comparer l'influence de la Lune et du Soleil pour analyser des documents scientifiques.

Établir et utiliser l'expression de la force d'inertie d'entraînement volumique.

3. Effet des forces d'inertie de Coriolis dans un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Citer et utiliser l'expression de l'accélération de Coriolis.

Dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen, exprimer la la force d'inertie de Coriolis.

Appliquer la loi de la quantité de mouvement, la loi du moment cinétique et la loi de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.

Utiliser l'expression de la force de Coriolis pour analyser des documents scientifiques portant sur les effets de la force de Coriolis sur les vents géostrophiques ou les courants marins.

II- Methodes

A) Principe fondamental de la dynamique et théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen : *méthode*

dans R' non galiléen, il faut ajouter aux forces \vec{F} la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_e(M)$$

et la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{iC} = -m \cdot \vec{a}_C(M) = -2 \cdot m \cdot \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'}$$

1. Effet des forces d'inertie d'entraînement dans un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen

B) Application de théorèmes énergétiques dans un référentiel non galiléen en translation par rapport à un référentiel galiléen : *méthode*

Dans le cas d'une translation uniformément accélérée $\vec{a}_e = a_0 \vec{u}_x$, alors la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle $E_p = m a_0 x$.

2. Effet des forces d'inertie d'entraînement dans un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen

C) Application de théorèmes énergétiques dans un référentiel non galiléen en rotation par rapport à un référentiel galiléen : *méthode*

Dans le cas d'un référentiel R' qui tourne à une vitesse angulaire ω constante par rapport à un référentiel galiléen R autour de son axe fixe Oz , la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle $E_p = -\frac{1}{2} m r^2 \omega^2$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz .

3. Effet des forces d'inertie de Coriolis dans un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen

D) Application de théorèmes énergétiques dans un référentiel non galiléen pour la force d'inertie de Coriolis : *méthode*

I La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas.

III- Exercices supplémentaires

1. Effet des forces d'inertie d'entraînement dans un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen

1.1) Pendule dans un ascenseur

Dans le référentiel terrestre R_1 (supposé galiléen), un ascenseur (assimilé à un solide auquel on attache le référentiel R_2), a un mouvement de translation rectiligne vertical.

Un pendule simple constitué d'un fil sans masse et d'un point matériel M de masse m est suspendu en O dans l'ascenseur. Sa longueur est $l = OM$. θ est l'angle que fait le fil avec la verticale.

L'accélération du champ de pesanteur est $\vec{g} = -g.\vec{u}_z$.

- 1) Déterminer la période T des petites oscillations du pendule dans les cas suivants :
 - 1.a) L'ascenseur est immobile;
 - 1.b) L'ascenseur commence à monter : son accélération dans R_1 est $\vec{a} = +a.\vec{u}_z$;
 - 1.c) L'ascenseur commence à descendre : son accélération dans R_1 est $\vec{a} = -a.\vec{u}_z$.

1) La période T des petites oscillations se trouve en écrivant l'équation différentielle suivie par θ :

$$\ddot{\theta} + \frac{(g-a_z).\sin\theta}{l} = 0, \text{ soit } T = 2.\pi.\sqrt{\frac{l}{g+a_z}}.$$

1.a) L'ascenseur est immobile : $a_z = 0 \Rightarrow T = 2.\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}$.

1.b) L'ascenseur commence à monter : $a_z = +a \Rightarrow T = 2.\pi.\sqrt{\frac{l}{g+a}}$.

1.c) L'ascenseur commence à descendre : $a_z = -a \Rightarrow T = 2.\pi.\sqrt{\frac{l}{g-a}}$.

1.2) Pendule dans une voiture

Dans le référentiel terrestre R_1 (supposé galiléen), un véhicule (assimilé à un solide auquel on attache le référentiel R_2), a un mouvement de translation rectiligne horizontal uniformément accéléré, d'accélération $\vec{a} = a.\vec{u}_x$.

Un pendule simple constitué d'un fil sans masse et d'un point matériel M de masse m est suspendu en O dans le véhicule. Sa longueur est $l = OM$. θ est l'angle que fait le fil avec la verticale (cet angle étant orienté, avec \vec{u}_z pointant vers nous, $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ étant un trièdre direct).

L'accélération du champ de pesanteur est $\vec{g} = g.\vec{u}_y$.

- 1) Déterminer l'équation différentielle suivie par θ .
- 2) Déterminer la position d'équilibre repérée par l'angle α que fait le fil avec la verticale.
- 3) Quelle est la période des petites oscillations autour de α ?

On donne $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha.\cos\beta \pm \cos\alpha.\sin\beta$ et $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha.\cos\beta \mp \sin\alpha.\sin\beta$.

1) $\ddot{\theta} + \frac{g.\sin\theta - a.\cos\theta}{l} = 0$.

2) $\alpha = \arctan\left(\frac{a}{g}\right)$.

3) $T = 2.\pi.\sqrt{\frac{l}{g.\cos\alpha + a.\sin\alpha}}$.

1.3) Ressort vertical dans un ascenseur

Dans le référentiel terrestre R_1 (supposé galiléen), un ascenseur (assimilé à un solide auquel on attache le référentiel R_2), a un mouvement de translation rectiligne vertical.

On suspend en un point O de l'ascenseur un ressort de raideur k , de masse négligeable et de longueur à vide l_0 qui soutient un point matériel M de masse m (initialement immobile dans l'ascenseur).

L'accélération du champ de pesanteur est $\vec{g} = -g.\vec{u}_z$.

- 1) Déterminer l'altitude z de M au cours du temps :
 - 1.a) si l'ascenseur commence à monter : son accélération dans R_1 est $\vec{a} = +a.\vec{u}_z$;
 - 1.b) si l'ascenseur commence à descendre : son accélération dans R_1 est $\vec{a} = -a.\vec{u}_z$.
- 2) Que faut-il pour transformer ce dispositif en un accéléromètre, même si M n'est pas au repos initialement ?

1) La période T des petites oscillations se trouve en écrivant l'équation différentielle suivie par θ :

$$m.\ddot{z} = m.(-g - a_z) + k.(-z - l_0), \text{ soit } z = z_0.\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) - l_0 - \frac{m}{k}(g + a_z).$$

Initialement, $\dot{z} = 0 \Rightarrow \ddot{z} = 0 \Rightarrow z = -l_0 - \frac{m}{k}(g)$ car $a_z = 0$. Or $z = z_0.\cos(\varphi) - l_0 - \frac{m}{k}(g) = -l_0 - \frac{m}{k}(g) \Rightarrow z_0 = 0$.

1.a) L'ascenseur commence à monter : $a_z = +a \Rightarrow z = -l_0 - \frac{m}{k}(g + a)$.

1.b) L'ascenseur commence à descendre : $a_z = -a \Rightarrow z = -l_0 - \frac{m}{k}(g - a)$.

2) Même si M n'est pas au repos initialement, on peut, grâce à des frottement fluides retrouver les mêmes résultats si $t \rightarrow \infty$. Aussi, l'axe z peut être gradué pour a_z .

1.4) Avion "zéro g"

On suppose que l'intensité du champ de pesanteur est constante et vaut $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1) Pour entraîner à l'impesanteur, un avion "zéro g" est, pendant une phase de durée Δt , en chute libre. Montrer que les passagers sont alors en impesanteur.

2) Quelle est alors la trajectoire de l'avion (assimilé à un point matériel) pendant cette phase ?

3) L'altitude maximale de l'avion est $h = 9000 \text{ m}$. Quelle est la durée maximale Δt_{max} ?

1) Dans le référentiel de l'avion (R') en mouvement de translation uniformément accéléré ($\vec{a} = \vec{g}$), les forces d'inertie d'entraînement qui s'appliquent à une particule de masse m sont $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a} = -m\vec{g} = -\vec{P}$: elles compensent le poids.

2) La trajectoire de l'avion est une parabole :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

qu'on intègre une fois :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_{0x} \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_{0z} \end{cases}$$

puis une autre fois

$$\begin{cases} x = v_{0x}t + x_0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0 \end{cases}$$

3) Si le sommet est en $x = 0$ à $t = 0$, à l'altitude $h = z_0$ donc, il s'agit de chercher la date $t = \pm \frac{\Delta t}{2}$ pour laquelle $z = 0$, soit

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + h = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}gt^2 = h \Leftrightarrow \frac{\Delta t_{max}}{2} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\text{soit } \Delta t_{max} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\frac{2 \times 9000}{10}} = 84 \text{ s.}$$

2. Effet des forces d'inertie d'entraînement dans un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen

2.5) Forces d'inertie sur un manège

On s'intéresse à un manège qui tourne à une vitesse angulaire ω par rapport à un référentiel galiléen autour de son axe fixe Oz .

1) Déterminer la force d'inertie d'entraînement ressentie par un point matériel de masse m à une distance r de l'axe. Quel est son effet ?

2) Quel est l'effet de la force d'inertie de Coriolis ressentie par un point matériel de masse m qui se déplace avec une vitesse \vec{v} horizontale ?

$\vec{f}_{ie} = m \cdot r \cdot \omega^2 \vec{u}_r$. La force d'inertie est donc centrifuge.

La force d'inertie de Coriolis tend à faire tourner le point matériel vers la droite si le manège tourne dans le sens trigonométrique, vers la gauche si le manège tourne dans le sens horaire.

2.6) Forces d'inertie d'entraînement sur la Terre

On peut supposer que le référentiel géocentrique est galiléen. Par rapport à celui-ci, le référentiel terrestre est en rotation autour de l'axe polaire, avec un vecteur rotation $\Omega = \frac{2\pi}{24h} \vec{u}_z$, où \vec{u}_z est orienté du Pôle Sud vers le Pôle Nord.

Soit un point à la surface de la Terre, de coordonnées dans le repère sphérique de centre O , le centre de la Terre : $r = R_T$ (le rayon de la Terre), $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$ (λ est la latitude) et φ , la longitude.

1) Déterminer la force d'inertie d'entraînement ressentie par un point matériel de masse m en ce point.

$$\vec{f}_{ie} = m.R_T.\cos\lambda.\omega^2.(\cos\lambda.\vec{u}_r - \sin\lambda.\vec{u}_\theta).$$

2.7) Variations du poids sur la Terre

- 1) La direction indiquée par un fil à plomb passe-t-elle par le centre de la Terre ?
- 2) Comment varie le poids avec :
 - 2.a) l'altitude ?
 - 2.b) la latitude ?

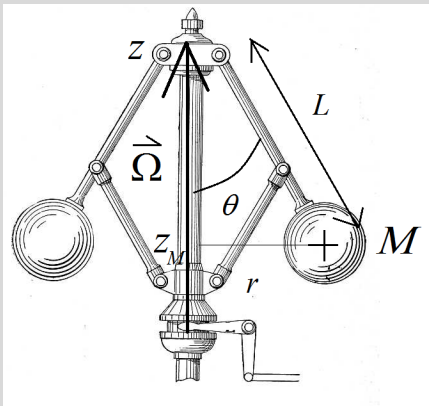
On peut montrer que l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre de masse M_T est, dans les coordonnées sphériques $-G\frac{m.M_T}{R_T^2}\vec{u}_r$. Comme la force d'inertie d'entraînement est proportionnelle à la masse m du point matériel, le poids l'est aussi :

$$\vec{P} = m.\vec{g} = -G\frac{m.M_T}{R_T^2}\vec{u}_r + \vec{f}_{ie}$$

La force d'inertie d'entraînement est une correction devant l'attraction gravitationnelle. Elle s'oppose en partie à cette dernière.

- 1) La direction indiquée par un fil à plomb est celle du champ de pesanteur \vec{g} . Elle ne passe pas *a priori* par O , le centre de la Terre.
- 2)
 - 2.a) La force d'inertie d'entraînement est la plus grande à l'équateur, là où l'on est le plus éloigné de l'axe de rotation. C'est donc à l'équateur que le poids d'un objet est le plus petit, et aux pôles qu'il est le plus grand.
 - 2.b) De la même façon, plus l'altitude est élevée, plus l'attraction gravitationnelle est faible, et plus la force d'inertie est forte : un objet est moins lourd en altitude.

2.8) Régulateur de Watt



Le régulateur de Watt est un système ingénieux mis en place dans des machines pour réguler leur vitesse : plus la machine tourne vite et plus les boules du régulateur se soulèvent, actionnant une valve qui diminue l'arrivée de combustible, faisant ainsi diminuer la vitesse de rotation.

Soit une boule de masse m assimilée à un point matériel M , lié par une tige de longueur L à un axe Oz qui tourne avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \omega\vec{e}_z$. M se trouve à la distance r de Oz . On prendra l'origine $z = 0$ de l'axe Oz à l'accroche de la tige.

- 1) Quelle est l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement ? On l'exprimera en fonction de θ . Exprimer l'énergie potentielle totale de M en fonction de θ et ω .
- 2) En déduire l'altitude z_M de M qui correspond à un équilibre stable. Vérifier que l'expression a bien un sens.

- 1) Si $\vec{f}_{ie} = m r \omega^2 \vec{u}_r$, alors

$$\vec{f}_{ie} = m.r.\omega^2\vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{pie}) = -\frac{dE_{pie}}{dr}\vec{u}_r$$

$\Leftrightarrow dE_{pie} = -m r \omega^2 dr$ qu'on peut intégrer en

$$E_{pie} = -\frac{1}{2}m r^2 \omega^2$$

qui est l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement. On peut la réécrire avec $r = L \sin \theta$:

$$E_{pie} = -\frac{1}{2}m \omega^2 (L \sin \theta)^2$$

L'énergie potentielle totale est

$$E_p = m g z - \frac{1}{2}m r^2 \omega^2 = m \left(-L g \cos \theta - \frac{1}{2}\omega^2 (L \sin \theta)^2 \right) = -m L \left(g \cos \theta - \frac{1}{2}\omega^2 L (\sin \theta)^2 \right)$$

2) donc

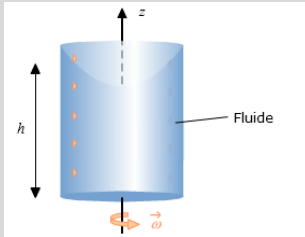
$$\frac{dE_p}{d\theta} = -Lm(-g \sin \theta + \omega^2 L \sin \theta \cos \theta) = -Lm \sin \theta (-g + \omega^2 L \cos \theta)$$

L'équilibre est stable si $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$, soit

$$\omega^2 L \cos \theta = g \Rightarrow z_M = -L \cos \theta = -\frac{g}{\omega^2}$$

qui n'a de sens que si $z_M \in [-L; +L] \therefore -\frac{g}{\omega^2} > -L$, soit $\omega > \sqrt{\frac{g}{L}}$.

2.9) Fluide en rotation



Soit un vase de rayon R contenant un liquide dont la surface libre est initialement à la hauteur h . On fait tourner le vase autour de son axe Oz à la vitesse angulaire ω .

- 1) Quelle est l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement ?
- 2) En déduire l'équation de la surface libre du liquide.

1) Si $\vec{f}_{ie} = m r \omega^2 \vec{u}_r$, alors

$$\vec{f}_{ie} = m.r.\omega^2\vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r$$

$\Leftrightarrow dE_p = -m r \omega^2 dr$ qu'on peut intégrer en

$$E_p = -\frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

qui est l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement.

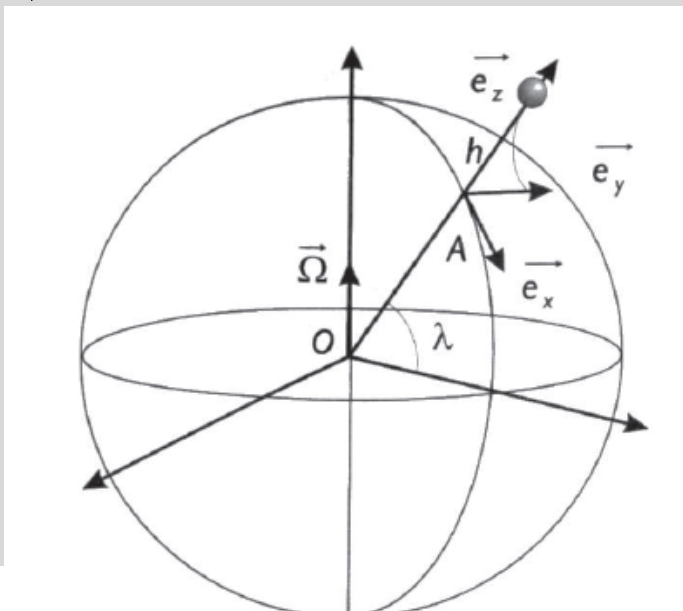
2) A la surface libre du liquide l'énergie mécanique est constante, avec une énergie cinétique nulle et une énergie potentielle de pesanteur $E'_p = m g z$. Donc

$$m g z - \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = cste \Leftrightarrow z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + cste$$

La forme est un parabololoïde de révolution autour de Oz .

3. Effet des forces d'inertie de Coriolis dans un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen

3.10) Déviation vers l'est



La Terre (référentiel R') est assimilée à une sphère homogène en rotation uniforme autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire de module $\Omega = \frac{2\pi}{24h}$ dans le référentiel géocentrique R supposé galiléen.

On supposera \vec{g} uniforme ($|\vec{g}| = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

On s'intéresse à un point matériel qui tombe sans vitesse initiale. L'expérience a été faite dans un puits de de profondeur $h = 158 \text{ m}$, en Allemagne (de latitude $\lambda = 55^\circ$) de façon à négliger la résistance de l'air.

Soit $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base orthonormée associée au référentiel terrestre. \vec{e}_z est la verticale ascendante, \vec{e}_x est suivant un méridien vers le sud et \vec{e}_y est suivant un parallèle, vers l'est.

1) Exprimer $\vec{\Omega}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ en fonction de la latitude λ .

- 2) Ecrire le principe fondamental de la dynamique sous forme vectorielle dans R' en fonction du poids et de la force d'inertie de Coriolis.
- 3) Dans la suite, la verticale est confondue avec la direction du poids. Projeter la précédente relation dans dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
- 4) Simplifier le système d'équations obtenues en tenant compte du fait que le déplacement suivant x et y reste faible par rapport à celui de z . On négligera les termes en $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ dans l'expression de la force de Coriolis.
- 5) En déduire sous ces hypothèses des expressions approchées de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
- 6) Evaluer y au moment où la masse tombe sur le sol. Faire l'application numérique.

1) $\vec{\Omega} = \Omega(-\cos \lambda \vec{e}_x + \sin \lambda \vec{e}_y)$.

2) $m \vec{a} = m \vec{g} - 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$.

3) Projections :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = 2m \Omega \sin \lambda \dot{y} \\ m \ddot{y} = -2m \Omega (\sin \lambda \dot{x} + \cos \lambda \dot{z}) \\ m \ddot{z} = -mg + 2m \Omega \cos \lambda \dot{y} \end{cases}$$

4) Au premier ordre :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = 0 \\ m \ddot{y} = -2m \Omega \cos \lambda \dot{z} \\ m \ddot{z} = -mg \end{cases}$$

5) En intégrant deux fois :

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ y(t) = \Omega \cos \lambda \frac{1}{3}gt^3 \end{cases}$$

6) si $z = 0$, $t = t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, donc

$$y(t_0) = \frac{1}{3}g \Omega \cos \lambda \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \times 9,81 \times \frac{2\pi}{86400} \cos(55^\circ) \left(\frac{2 \times 158}{9,81}\right)^{\frac{3}{2}} = 2,5 \text{ cm}$$

La déviation a lieu vers l'est.

3.11) Le pendule de Foucault

Le pendule de Foucault est un pendule sans frottement, à petites oscillations. La pointe du mobile trace un sillon dans le sable le long de sa trajectoire.

- 1) Montrer que le plan d'oscillation du pendule tourne.
- 2) Quelle serait la période du phénomène si le pendule de Foucault était suspendu au pôle nord ?
- 3) La latitude de Paris est : $\lambda \approx 50^\circ N$. Quelle est la période du phénomène observé au Panthéon ?

Le problème est à deux dimensions, dans le plan horizontal défini pour un point de la surface du globe de latitude λ : $v_z = 0$ et $\vec{f}_{iC} \cdot \vec{u}_z = 0$. On s'intéresse donc à un point matériel de masse m se déplaçant dans ce plan horizontal.

La projection horizontale de la force d'inertie de Coriolis est :

$$\vec{f}_{iC//} = 2.m.\Omega^2.\sin \lambda.(v_y.\vec{u}_x - v_x.\vec{u}_y)$$

La projection horizontale de la force d'inertie de Coriolis tend à dévier le point matériel vers la droite si l'on est dans l'hémisphère nord ($\lambda > 0$) : $\vec{f}_{iC//} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{f}_{iC//} \perp \vec{v}$ et $\vec{f}_{iC//} \wedge \vec{v} = + \left| \vec{f}_{iC//} \right| \cdot \left| \vec{f}_{iC} \right| \vec{u}_z$.

4. Techniques mathématiques - Utilisation des différents repères

4.12) Calcul d'un volume en coordonnées cartésiennes

- 1) Calculer le volume d'un parallélépipède de côté a suivant x , b suivant y et c suivant z .

1)

$$V = \iiint d^3\tau = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=0}^{z=c} dx dy dz = a b c$$

4.13) Calcul d'un volume en coordonnées cylindriques1) Calculer le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h .

1)

$$V = \iiint d^3\tau = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=h} dr r d\theta dz = \pi R^2 h$$

4.14) Calcul d'un volume en coordonnées sphériques1) Calculer le volume d'une sphère de rayon R .

1)

$$V = \iiint d^3\tau = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr r d\theta r \sin\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

4.15) Calcul d'une surface en coordonnées sphériques1) Calculer la surface d'une sphère de rayon R .

1)

$$S = \iint d^2S = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r d\theta r \sin\theta d\varphi = 4\pi R^2$$

car $r = R$ ici.**4.16) Calcul d'une surface en coordonnées cylindriques**1) Calculer la surface d'un disque de rayon R .

1)

$$S = \iint d^2S = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr r d\theta = \pi R^2$$

4.17) Calcul d'une autre surface en coordonnées cylindriques1) Calculer la surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h .

1)

$$S = \iint d^2S = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=h} r d\theta dz = 2\pi R h$$

avec $r = R$.**4.18) Calcul d'un autre volume en coordonnées sphériques**1) Calculer le volume d'un hémisphère de rayon R .

1)

$$V = \iiint d^3\tau = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr r d\theta r \sin\theta d\varphi = \frac{2}{3}\pi R^3$$

Travaux dirigés

vendredi 6 octobre 2017

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

Le pendule de Foucault à Paris

Extraits de l'article "1851 - Le pendule de Foucault à la une de l'Illustration (journal)"
disponible à l'adresse <https://ateliercst.hypotheses.org/612>

« Venez voir tourner la Terre, venez la voir jeudi au Panthéon ! »

« Venez voir tourner la Terre, venez la voir jeudi au Panthéon ! »
C'est en ces termes que Léon Foucault, homme de science membre de l'Institut, invitait les Parisiens en 1851 à assister à la première expérience démontrant de manière directe, par l'observation des oscillations d'un pendule, la rotation de la Terre sur elle-même.

En relayant l'événement et en incitant ses lecteurs à aller assister à cette expérience publique, L'Illustration, premier hebdomadaire illustré en langue française, participe à faire de cet événement un véritable succès populaire. Malgré de fortes intempéries et une épidémie de grippe, la foule se précipite pour aller voir le pendule au Panthéon ! L'entrée étant libre, tout parisien curieux, sans condition de ressources, peut assister à cette expérience grandiose. C'est ainsi que l'auteur met en scène, sur la gravure, un public très diversifié : notables, savants et philosophes côtoient les gens du peuple. Cette mixité sociale est le signe du caractère populaire de cette démonstration.



L'expérience du pendule de Léon Foucault au Panthéon de Paris, en 1851 "La Nature", 1887, 2e semestre. Paris, Conservatoire
© - Photo Centre national des arts et métiers - bibliothèque

Énoncé

1) Déterminer le temps que met, à Paris, le plan d'oscillation du pendule de Foucault à faire un tour complet.

Correction

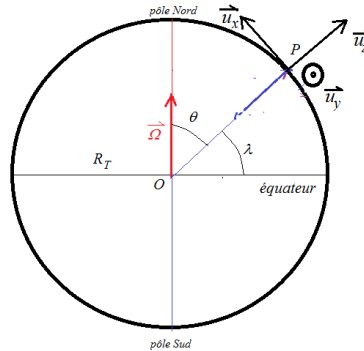
1)

Au voisinage d'un point P fixe à la surface de la Terre (à Paris, de latitude $\lambda = 48^\circ 51' = \frac{\pi}{2} - \theta$ où θ est l'angle compté à partir du pôle Nord), on définit un repère orthonormé direct $(P, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, avec \vec{u}_x et \vec{u}_y dans le plan horizontal, \vec{u}_z vertical vers le haut, \vec{u}_x dirigé vers le Nord et \vec{u}_y vers l'Ouest. On notera (x, y, z) les coordonnées d'un point matériel M , et on considérera le mouvement de M comme horizontal ($z = cste$).

On peut raisonner rapidement, en disant que la période varie comme

$$\frac{T}{\sin \lambda} = \frac{24\text{h}}{\sin 48^\circ 51'} = 31,9 \text{ h}$$

Pour faire les choses plus proprement :



L'expression, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de la Terre dans le référentiel géocentrique est $\vec{\Omega} = \Omega (\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_z) = \Omega (\cos \lambda \vec{u}_x + \sin \lambda \vec{u}_z)$.

La force d'inertie de Coriolis est

$$\vec{f}_{iC} = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m \Omega (\cos \lambda \vec{u}_x + \sin \lambda \vec{u}_z) \wedge (\dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y)$$

dans le cas du mouvement horizontal d'un point matériel M au voisinage de P . La force d'inertie de Coriolis est donc : $\vec{f}_{iC} = 2m \Omega (\sin \lambda \dot{y} \vec{u}_x - \sin \lambda \dot{x} \vec{u}_y - \cos \lambda \dot{y} \vec{u}_z)$.

La force d'inertie de Coriolis verticale est

$$\vec{f}_{iCv} = -2m \Omega \cos \lambda \dot{y} \vec{u}_z$$

dont la norme est de l'ordre de

$$\|\vec{f}_{iCv}\| \approx 2m \Omega v \approx 2m \Omega L \sqrt{\frac{g}{L}} = 2m \Omega \sqrt{gL}$$

négligeable devant le poids du mobile car

$$\frac{\|\vec{f}_{iCv}\|}{mg} \approx 2\Omega \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{4\pi}{86400} \sqrt{\frac{67}{10}} = 3,8 \times 10^{-4} \ll 1$$

Aussi, le plan d'oscillation du pendule tourne dans le référentiel terrestre dans le sens horaire.

La tension du fil \vec{T}_f est dirigée selon $\vec{MP} = (-x \vec{u}_x - y \vec{u}_y - z \vec{u}_z)$, avec $|x|$ et $|y| \ll L$, donc $-z \approx L$, aussi, on a bien :

$$\vec{T}_f = \frac{T_f}{L} (-x \vec{u}_x - y \vec{u}_y + L \vec{u}_z)$$

T_f étant la norme de la tension.

Pour les petits angles, les forces appliquées au point M sont :

- le poids $m \vec{g} = -m g \vec{u}_z$;
- la tension $\vec{T}_f = \frac{T_f}{L} (-x \vec{u}_x - y \vec{u}_y + L \vec{u}_z)$;
- la force de Coriolis $\vec{f}_{iCh} = 2m \Omega (\sin \lambda \dot{y} \vec{u}_x - \sin \lambda \dot{x} \vec{u}_y)$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M donne, puisque le mouvement est horizontal :

$$m (\ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y) = -m g \vec{u}_z + \frac{T_f}{L} (-x \vec{u}_x - y \vec{u}_y + L \vec{u}_z) + 2m \Omega (\sin \lambda \dot{y} \vec{u}_x - \sin \lambda \dot{x} \vec{u}_y - \cos \lambda \dot{y} \vec{u}_z)$$

La projection suivant \vec{u}_z donne (en négligeant la projection verticale de la force de Coriolis devant le poids) :

$$m g = T_f$$

et les deux autres projections :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{T_f}{L} x + 2 m \Omega \sin \lambda \dot{y} \\ m\ddot{y} = -\frac{T_f}{L} y - 2 m \Omega \sin \lambda \dot{x} \end{cases}$$

En utilisant $m g = T_f$ et en simplifiant par m , on trouve bien : soit

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + \alpha \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega^2 y - \alpha \dot{x} \end{cases}$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ et $\alpha = 2 \Omega \sin \lambda$.

En posant $f = x + i y$, on a

$$\ddot{f} = \ddot{x} + i \ddot{y} = -\omega^2 x + \alpha \dot{y} - i \omega^2 y - i \alpha \dot{x} = -\omega^2 (x + i y) - i \alpha (\dot{x} + i \dot{y})$$

soit une équation en f seulement : $\ddot{f} + i \alpha \dot{f} + \omega^2 f = 0$ alors que les équations précédentes couplaient x et y .

Dans la mesure où il s'agit d'une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants (complexes!), sans second membre, il faut utiliser l'équation caractéristique :

$$r^2 + i \alpha r + \omega^2 = 0$$

Comme $\Delta = -(\alpha^2 + 4\omega^2) < 0$, on a

$$r = \frac{-i \alpha \pm i \sqrt{\alpha^2 + 4\omega^2}}{2}$$

soient uniquement des racines complexes. La solution de la nouvelle équation différentielle peut donc bien s'écrire sous la forme

$$f(t) = e^{-i \Omega \sin \lambda t} (c_- e^{-i \omega_0 t} + c_+ e^{+i \omega_0 t})$$

avec $\omega_0 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4\omega^2}}{2} = \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \lambda + \omega^2} = \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \lambda + \frac{g}{L}}$.

On trouve donc

- $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega^2 \sin^2 \lambda + \frac{g}{L}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2 \sin^2(48^\circ 51') + \frac{9.8}{67}}} \approx \frac{2\pi}{\frac{9.8}{67}} = T$ soit $T_0 = 16$ s,
- et $T' = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2 \sin^2(48^\circ 51')}} = \frac{86400}{\sin(48^\circ 51')} = 11,5 \times 10^3$ s soit un peu moins de 32 h.

Devoir non surveillé

vendredi 6 octobre 2017

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

Marées et gravitation

Une histoire des marées
André Gillet - Belin

Les marées sont liées aux mouvements de la Lune et du Soleil.

Pierre Simon de Laplace

Laplace (1749-1827) utilise les mesures des hauteurs d'eau relevées à Brest depuis Louis XIV. Il est un grand savant, mais il manque de simplicité. Sa science dépasse sa modestie : « Je suis arrivé à ce résultat remarquable [la solution du problème des marées]. » Il parvient en effet à établir une théorie générale, mais celle-ci ne s'applique pas aux flux et reflux propres à chaque port, et n'est donc pas exploitable pour la prédiction.

Procédant méthodiquement, Laplace simplifie systématiquement le problème, et prend comme hypothèse, pour commencer, que « la mer inonde la Terre entière, et qu'elle n'éprouve que de légers obstacles dans ses mouvements ». Il considère que sans cette simplification il serait impossible de soumettre aux calculs l'analyse des marées. Il suffit donc d'examiner les phénomènes généraux qui doivent résulter des forces engendrées par le Soleil et la Lune, l'attraction luni-solaire sur la Terre étant la seule explication rationnelle possible.

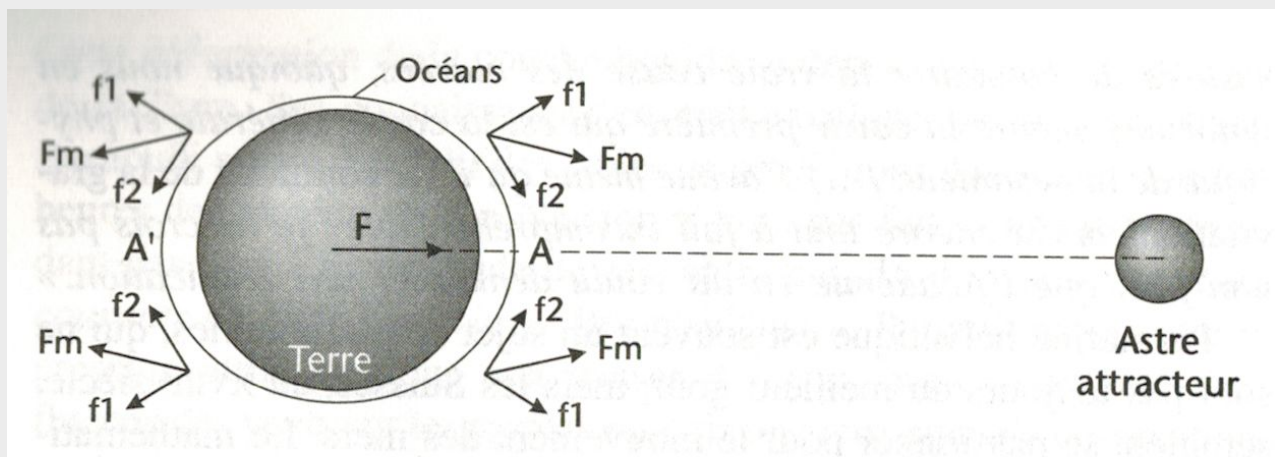
Pour commencer, et pour simplifier encore, Laplace pose que le Soleil est le seul moteur des marées, et qu'il est à l'équateur. Son attraction s'exerce de façon globale sur la Terre et son enveloppe liquide. Celles-ci sont donc soumises à une accélération dans la direction de l'astre. Localement cependant, l'accélération subie n'est pas la même partout. Suivant les lois de la physique, on peut concentrer toute la masse du globe terrestre en son centre, et étudier le mouvement de ce centre de masse. On examine alors le mouvement des océans par rapport à celui-ci. Une particule de la mer placée « au-dessous du Soleil » subit une attraction - donc une accélération - plus grande que le centre de la Terre, car elle est plus proche de l'astre attracteur. Inversement, une goutte d'eau à l'antiméridien est moins attirée par le Soleil - donc moins accélérée - que ne l'est le centre de la Terre. Il se forme donc deux bourrelets d'eau diamétralement opposés. Étant donné que la Terre fait un tour sur elle-même en 24 heures, on observe théoriquement en chaque point du globe deux marées par jour.

L'attraction du Soleil se fait sentir de façon plus importante dans les vastes étendues que dans les bassins étroits, car la force reçue par chaque molécule se transmet de part en part et se communique à tout l'océan. Cette force, qui est négligeable pour chaque particule liquide, devient considérable lorsqu'elle est transmise à toutes. Elle reste faible en revanche dans les mers de peu d'étendue. Les marées dans celles-ci, on le sait, sont quasi inexistantes, sauf certaines exceptions comme l'Adriatique.

Compliquant son schéma pour se rapprocher des conditions réelles, Laplace introduit la Lune et la fait se déplacer sur l'équateur en compagnie du Soleil. L'action de la Lune induit sur les océans un effet comparable à celui du Soleil, mais cette fois-ci suivant un cycle d'un demi-jour lunaire. Les deux mouvements, celui du Soleil et celui de la Lune « se combinent sans se troubler, et, de leur combinaison, résulte le flux que nous observons dans nos ports ».

La force génératrice des marées, due aux efforts conjoints de la Lune et du Soleil, varie de façon très complexe au cours du temps. Lorsqu'il arrive au bout de son raisonnement, Laplace a réussi à décomposer cette force en une somme d'actions simples, qui suivent un cycle diurne, ou semi-diurne (d'un demi-jour). Chacune de ces actions engendre de façon périodique une marée, ou onde, et les flux et reflux que l'on observe sont dus à l'addition de ces différentes ondes. Laplace conclut cependant à une forme générale semi-diurne, car l'action semi-diurne de la Lune est prépondérante.

Les prédictions de hauteur et d'heure ne se confirment pas à partir de cette théorie. Il est impossible de prévoir le flux et le reflux d'un port quelconque directement à partir de celui du port de Brest, où les marées sont étudiées depuis le milieu du XVIII^{ème} siècle, et particulièrement bien connues depuis 1711, année à partir de laquelle les relevés furent systématiques. À chaque port correspond un régime qui lui est particulier. Cette particularité des marées sera confirmée par l'ingénieur hydrographe Rémi Chazallon (1802-1872), qui poursuivra et achèvera les recherches de Laplace, et imaginera les méthodes de prévision.



La force génératrice des marées. En chaque point des océans, cette force F_m est définie comme étant la différence entre la force exercée par l'astre attracteur sur les particules liquides, et la force F exercée sur le centre de masse de la Terre. Du côté opposé à l'astre, F_m est dirigée vers l'extérieur, c'est pourquoi les eaux se soulèvent également de ce côté. La force génératrice peut être décomposée suivant une force f_1 verticale qui fait varier légèrement l'intensité de la pesanteur, et une force f_2 tangente à la surface des mers. C'est f_2 qui fait s'écouler l'eau vers A ou A' selon l'hémisphère. On démontre que l'attraction F_m est inversement proportionnelle au cube de la distance entre la Terre et l'astre attracteur. Il s'agit donc de très petites forces, mais suffisantes pour générer les marées. (D'après A. Le Calvé, *Cours de navigation à l'usage des candidats aux examens de la Marine Marchande*, Paris, Éditions maritimes et coloniales, 1959.)

Chazallon : la théorie et la pratique

À partir d'observations effectuées à Saint-Malo et à Granville en 1831, et reprises en 1836 - les grandes marées de ces deux ports l'ont fortement impressionné - Chazallon démontre, par des méthodes graphiques et par le calcul, que chaque port obéit à sa loi particulière. «Ainsi, vers l'entrée de l'Orne et au Havre, la mer garde son plein pendant une heure ; à Dieppe, elle le garde à peine huit minutes ; ici la durée du flot [marée montante] excède la durée du jusant [marée descendante] ; ailleurs c'est l'inverse.» Il fallait ajouter à l'onde semi-diurne de Laplace d'autres ondes de périodes plus petites. Ces autres ondes ou marées élémentaires ont des périodes d'un tiers, un quart, un sixième, etc. de jour. L'addition de ces ondes «quart-diurne, semi-tiers-diurne..» rend compte des irrégularités. La surface de la mer ondule comme une corde vibrante et l'onde principale, lorsqu'elle rencontre des fonds peu profonds, se déforme, et engendre ses harmoniques.

Dans chaque port, l'heure et la hauteur des flux et des reflux peuvent être calculées en combinant les ondes-marées de Laplace et leurs harmoniques, découvertes par Chazallon. Cependant, selon la forme des côtes et des baies, la profondeur des fonds, l'amplitude et l'heure de la marée peuvent varier considérablement, et, comme le remarquait déjà Laplace, «la grandeur des marées dépend beaucoup des circonstances locales». Sur les côtes de la Manche et de l'Atlantique, on observe deux marées par jour lunaire, car les ondes semi-diurnes dominent, alors que sur les côtes du Vietnam, c'est l'onde diurne qui prédomine, et on constate chaque jour lunaire une marée de grande amplitude et une autre de très petite amplitude. Ainsi E. Fichot, ingénieur hydrographe en chef de la Marine, notait en 1923 : «[...] la mer de Chine [est] susceptible de se comporter en résonateur vis-à-vis du système diurne nord-pacifique sur lequel elle débouche. D'autre part, l'onde semi-diurne, en contournant par le nord et le sud l'île d'Haïnan, vient interférer presque complètement dans le golfe du Tonkin : d'où le caractère exclusivement diurne, si longtemps regardé comme une anomalie, de la marée dans cette région. L'onde semi-diurne toutefois n'est pas rigoureusement éteinte ; vers les époques où la Lune, traversant l'équateur, l'onde diurne s'annule, et on voit nettement réapparaître sur le tracé des courbes une très légère ondulation semi-diurne, qui dans le cours de la lunaison se trouve noyée dans l'onde diurne prépondérante. »

Chaque bassin, chaque baie, possède une période propre, dépendant de sa forme et de ses dimensions. Si cette période propre et la période de l'onde-marée coïncident, l'amplitude augmente considérablement, par résonance. Ce phénomène est présent dans l'Adriatique ; c'est pourquoi on y observe des marées. Il n'existe pas en revanche

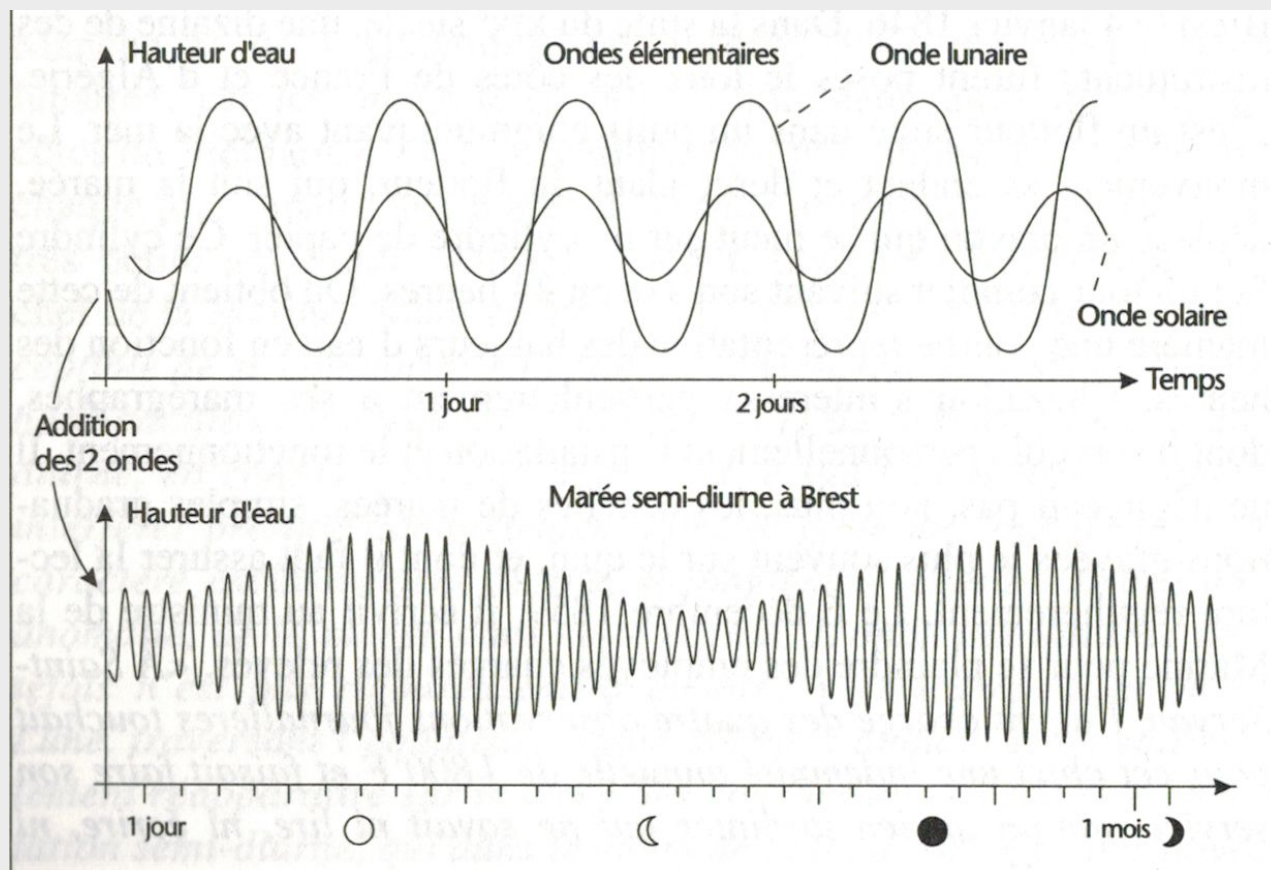
en Méditerranée. La résonance peut élever l'eau à des hauteurs considérables. Lors des forts coefficients, la mer peut monter de 21 mètres dans la baie de Fundy, au Canada, et de 18 mètres au détroit de Magellan. Dans la baie du Mont-Saint-Michel, la marée dépasse les 12 mètres. Les plages étant très plates et fort longues, l'eau arrive à grande vitesse, à la fameuse «vitesse d'un cheval au galop», comme l'écrit le Père Fournier. Au milieu de l'océan, par contre, la Lune et le Soleil ne soulèvent les eaux que de quelques décimètres. À proximité des côtes, là où il est intéressant de savoir prédire l'heure et la hauteur du flux, seule l'observation peut déterminer quelle part revient à chacune des composantes de la marée, car la complexité de la forme des continents et de celle des fonds marins rendent le problème insoluble par la seule théorie.

Analyse et prédiction des marées

La force génératrice des marées peut être décomposée en une série de forces «élémentaires», strictement périodiques. Les courbes qui représentent la variation de ces forces au cours du temps sont des sinusoïdes. Elles sont définies chacune par une période, qui caractérise le cycle suivant lequel le phénomène se répète (par exemple un demi-jour lunaire), et par une amplitude, qui décrit l'intensité maximale de la force d'attraction.

Chaque composante de la force génératrice engendre dans les océans une onde-marée correspondante de même période. La géométrie du bassin, par contre, exerce une influence considérable sur l'amplitude de chaque onde, de même que sur son retard par rapport à l'action qui l'a produite (sa phase).

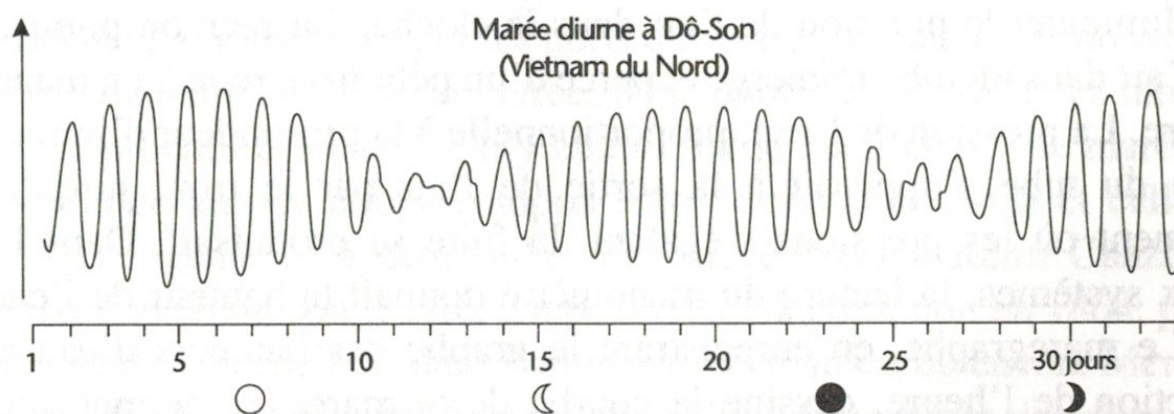
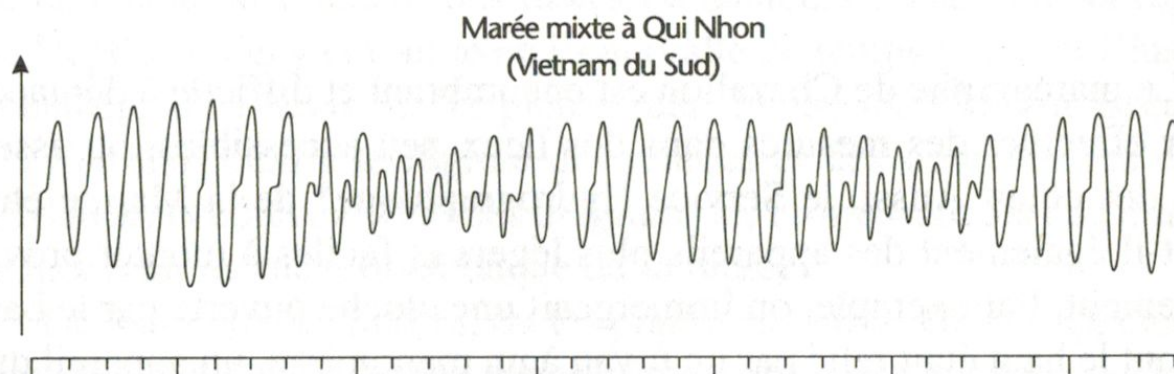
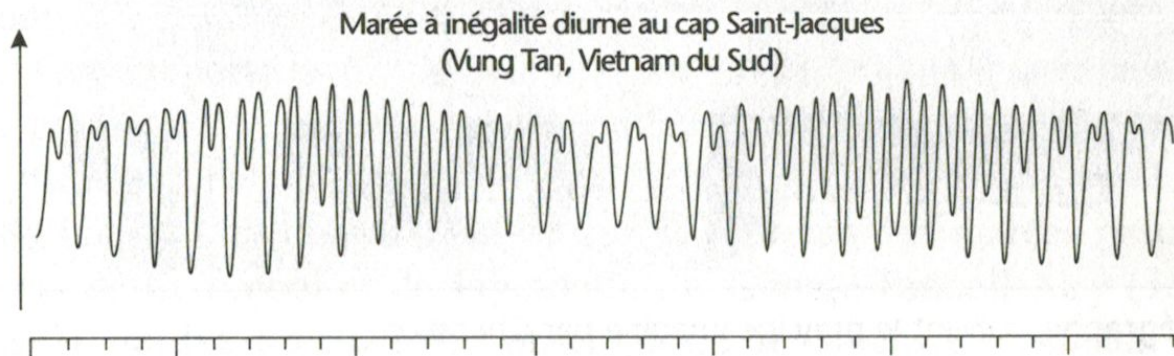
La marée totale en un lieu est une combinaison de ces ondes élémentaires. À Brest, par exemple, on peut retrouver la forme générale de la marée en additionnant les deux ondes qui, dans ce port, sont prépondérantes : l'onde semi-diurne lunaire, et l'onde semi-diurne solaire, engendrées par les mouvements journaliers apparents de la Lune et du Soleil.



Les variations de hauteurs d'eau se comprennent de façon intuitive. On retrouve bien une marée semi-diurne, modulée au cours du mois en fonction des positions respectives de la Lune et du Soleil. C'est une approximation, car d'autres ondes, qui tiennent compte des mouvements complexes des deux astres par rapport à la Terre, sont à prendre en considération. Pour décrire convenablement les marées, il faut également faire intervenir les ondes de petits fonds découvertes par Chazallon, et d'autres ondes de plus longues périodes, d'origine météorologique.

Pour pouvoir prédire à long terme les marées en un lieu, on y détermine l'amplitude et la phase de chacune de ces ondes. Ce n'est pas une mince affaire. Pour y parvenir, on effectue des mesures sur une longue période (de quinze jours à un an suivant la précision recherchée), puis de lourds calculs. C'est ce qu'on appelle l'analyse harmonique.

Quelques autres types de marées :



Enoncé

1) Force de marée

Pour simplifier, on supposera que "le Soleil est le seul moteur des marées, et qu'il est à l'équateur" et que la Terre est entourée d'une "enveloppe liquide". On s'intéresse à une "particule de mer" de masse m , qu'on étudie dans le référentiel géocentrique, le référentiel héliocentrique étant supposé galiléen.

1.a) Exprimer la force d'inertie d'entraînement \vec{F}_e .

1.b) De même, exprimer la force d'attraction gravitationnelle \vec{F}_a subie par une particule de la mer.

On pose la force de marée : $\vec{f}_m = \vec{F}_a + \vec{F}_e$.

1.c) Montrer par un schéma où l'on représentera \vec{f}_m en plusieurs endroits sur Terre que sous l'effet de la force de marée se forment deux bourrelets d'eau diamétralement opposés.

1.d) En déduire qu'on observe théoriquement en chaque point du globe deux marées par jour.

2) Effet de la Lune

Tout comme Laplace, on introduit maintenant la Lune et on la fait se déplacer sur l'équateur en compagnie du Soleil. L'action de la Lune induit sur les océans un effet comparable à celui du Soleil, mais un peu plus grand. Les deux mouvements, celui du Soleil et celui de la Lune «se combinent sans se troubler, et, de leur combinaison, résulte le flux que nous observons dans nos ports».

2.a) Faire un schéma qui représente la Terre entourée d'océan, le Soleil et la Lune au premier quartier, à la pleine lune, au dernier quartier et à la nouvelle lune.

2.b) Quand y a-t-il vive eaux (amplitude forte de la marée) et morte eaux (amplitude faible de la marée)?

Correction

1) Force de marée

1.a) La force d'inertie d'entraînement est $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$. Pour trouver l'accélération du référentiel géocentrique, il faut faire l'étude de la Terre de masse M_T dans le référentiel héliocentrique :

$$M_T \vec{a}_e = -G \frac{M_T M_S}{ST^3} \vec{ST}$$

où ST est la distance Soleil (S) -Terre (T). On trouve donc $\boxed{\vec{F}_e = G \frac{m M_S}{d_{ST}^3} \vec{ST}}$.

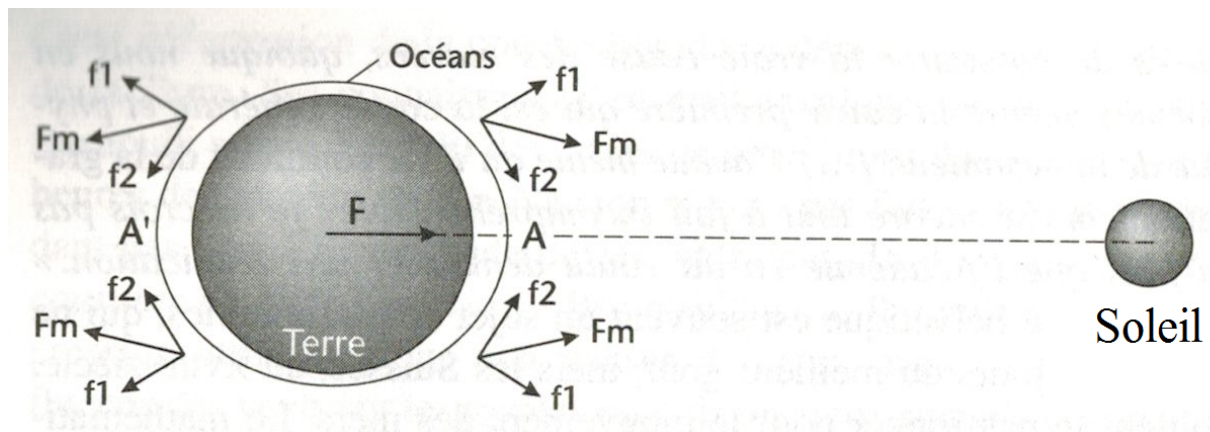
1.b) De même, exprimer la force d'attraction gravitationnelle subie par une particule de la mer en M est :

$$\vec{F}_a = -G \frac{m M_S}{SM^3} \vec{SM}$$

1.c) La force de marée est donc :

$$\vec{f}_m = \vec{F}_a - \vec{F}$$

où \vec{F} est défini sur le schéma :

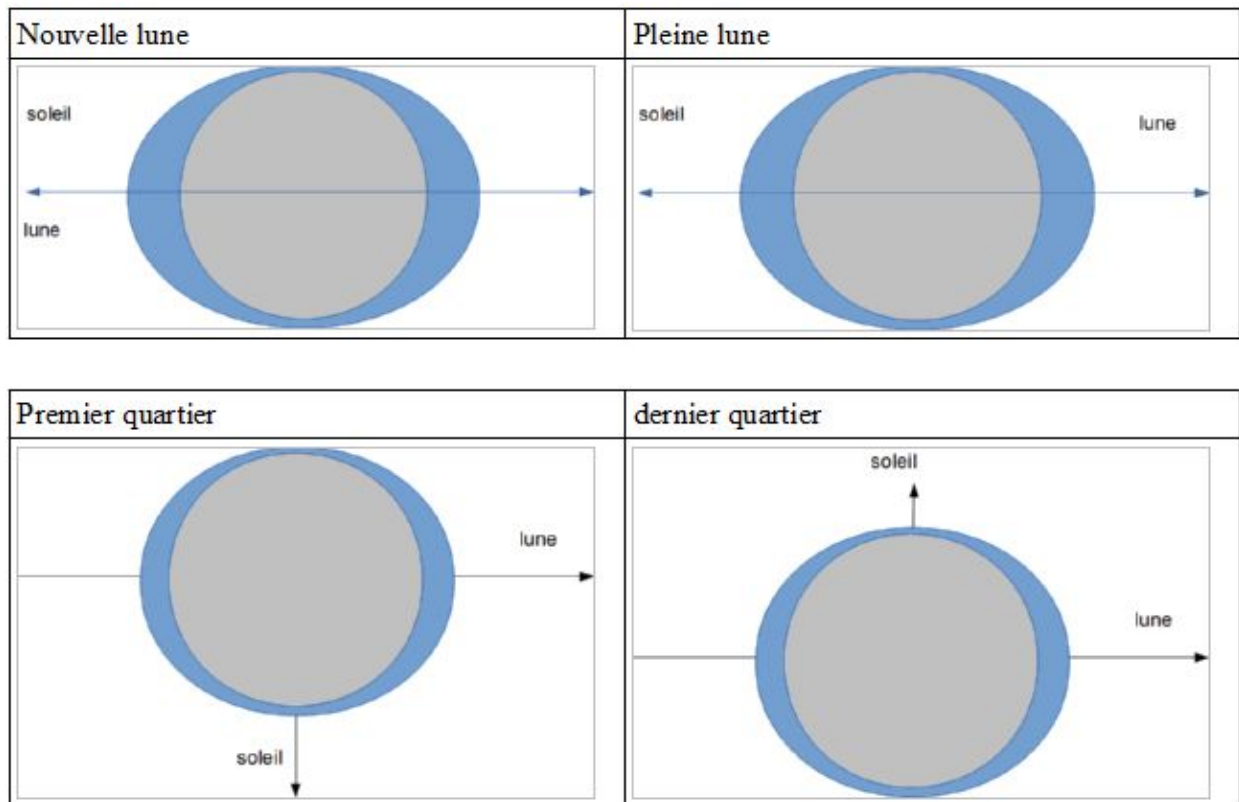


Il y a donc deux bourrelets d'eau diamétralement opposés.

1.d) "Étant donné que la Terre fait un tour sur elle-même en 24 heures, on observe théoriquement en chaque point du globe deux marées par jour."

2) Effet de la Lune

2.a) Le schéma qui représente la Terre entourée d'océan, le Soleil et la Lune au premier quartier, à la pleine lune, au dernier quartier et à la nouvelle lune est donné sur la figure ci-dessous :



2.b) Il y a vive eaux (amplitude forte de la marée) à la nouvelle et à la pleine lune car l'influence de la Lune est renforcée par celle du Soleil.

Il y a morte eaux (amplitude faible de la marée) au premier et au dernier quartier car l'influence de la Lune est contrariée par celle du Soleil.