

# Introduction à l'optique ondulatoire

## Notes de cours

mardi 12 décembre 2017

### I- Onde lumineuse

#### 1. Chemin optique

##### ✳ Modèle scalaire de la lumière *s'y retrouver*

Le modèle scalaire de la lumière revient à dire que :

- la polarisation de la lumière n'est pas définie ;
- et le milieu est isotrope (il se comporte de la même manière pour toutes les directions de polarisation).

##### ✳ Amplitude de l'onde *s'y retrouver*

Il ne s'agit que de connaître la norme du champ électrique par exemple. On posera donc :

$$|\vec{E}(M, t)| = \alpha \cdot a(M, t)$$

où  $a(M, t)$  est appelée "amplitude de l'onde" (et  $\alpha$  une constante non définie!). Aussi, le champ magnétique  $B = \frac{E}{c}$  sera proportionnel à  $a$ .

##### ✳ Retard dû à la propagation *s'y retrouver*

intéressons nous à un signal sinusoïdal émis d'un point source  $S$ . Son amplitude en  $S$  peut donc s'écrire  $a(S, t) = a_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi_0)$ . Cette onde se propage dans le milieu d'indice  $n$  constant, avec  $v = \frac{c}{n}$  la vitesse de propagation des ondes lumineuses.

Le retard temporel dû à la propagation du signal d'une source  $S$  jusqu'en un point  $M$  est  $\frac{SM}{v} = n \frac{SM}{c}$ . Les distances de la source au point  $M$  étant très grandes devant la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = cT = c \frac{2\pi}{\omega}$  et les dimensions de la surface utile du récepteur, on peut considérer que, dans une petite zone autour du point  $M$ , la distance à la source ne varie pas. Si l'amplitude est considérée constante, le signal au point  $M$  reproduit le signal au point  $S$  avec ce retard et vaut

$$a(M, t) = a \left( S, t - \frac{SM}{v} \right) = a_0 \cdot \cos \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{SM}{v} \right) - \phi_0 \right]$$

##### Chemin optique *définition*

Pour un milieu quelconque, on définit le chemin optique sur un rayon lumineux curviligne quelconque de  $A$  à  $B$  par

$$L_{AB} = (AB) = \int_A^B n(P) ds(P)$$

où  $n(P)$  est l'indice optique au point  $P$  d'abscisse curviligne  $s(P)$ .

### ✳ Chemin optique et retard de propagation *s'y retrouver*

$$L_{AB} = (AB) = \int_{t_A}^{t_B} n(P) \cdot v(P) \cdot dt = \int_{t_A}^{t_B} c \cdot dt$$

d'où

$$L_{AB} = (AB) = c \cdot (t_B - t_A)$$

On peut donc interpréter le chemin optique comme le chemin parcouru dans le vide pendant la durée réelle mise pour aller de  $A$  à  $B$  dans le milieu d'indice  $n$ .

### ✳ Déphasage dû à la propagation d'une onde plane monochromatique *s'y retrouver*

dans le vide, le vecteur d'onde est  $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  On peut réécrire l'amplitude de l'onde en un point  $M$  :

$$a(M, t) = a_0 \cdot \cos \left( \omega \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM) - \phi_0 \right)$$

Dans le cas général, la phase dans le cosinus de l'amplitude d'une onde sinusoïdale varie, lorsque l'onde se propage de  $O$  jusqu'en  $M$  de

$$\Delta\psi_{O \rightarrow M} = \int_O^M \vec{k} \cdot d\vec{\ell} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (OM) + \varphi_{sup}$$

où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide de la radiation émise par la source  $S$  et  $\varphi_{sup}$  qui prend en compte les éventuels déphasages supplémentaires.

On admet que l'onde réfléchie se déphase de  $\pi$  en plus par rapport à l'onde incidente :

- dans le cas d'une réflexion sur un métal dite réflexion métallique ;
- ou encore dans le cas d'une réflexion d'un milieu d'indice  $n_1$ , sur un milieu d'indice plus élevé  $n_2 > n_1$ .

## 2. Théorème de Malus

### ✳ Surfaces d'onde *s'y retrouver*

on appelle surface d'onde d'une source  $S$ , à l'instant  $t$ , l'ensemble des points  $M$  de phase  $\Delta\psi_{S \rightarrow M}$  constante. Pour une onde monochromatique, c'est l'ensemble des points  $M$  à égal chemin optique de la source  $S$ ,  $(SM) = \text{constante}$ .

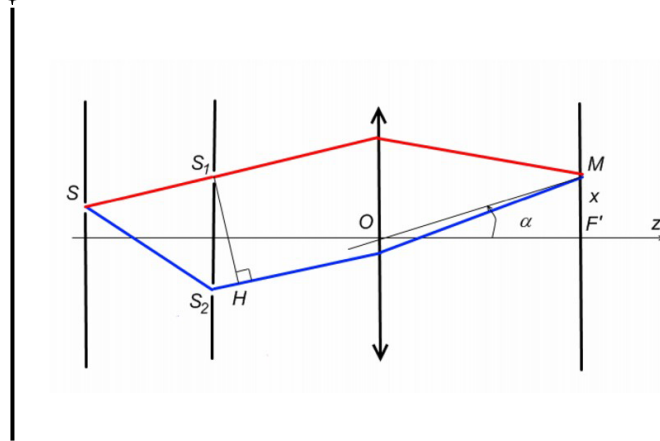
### 📖 1 Théorème de Malus *théorème*

En passant de  $z$  à  $z + dz$ , l'amplitude de l'onde passe de  $\tilde{A}(z, t) = \tilde{A}_0 e^{j(\omega t - kz)}$  à  $\tilde{A}(z + dz, t) = \tilde{A}_0 e^{j(\omega t - k(z+dz))}$ .

Cela introduit un déphasage  $d\varphi = k dz = \vec{k} \cdot d\vec{\ell} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi \cdot d\vec{\ell}$ . Donc  $\vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$ .  $\Rightarrow$

Il y a orthogonalité des rayons lumineux et des surfaces d'ondes dans l'approximation de l'optique géométrique.

### ✪ Appliquer le théorème de Malus *s'y retrouver*



Sur le schéma ci-contre, le point d'observation  $M$  étant dans le plan focal image, il est conjugué avec l'infini.

Du point de vue de l'optique géométrique, les rayons issus de  $S_1$  et  $S_2$  qui aboutissent en  $M$  sont parallèles (et parallèles au rayon fictif qui passerait par le centre de la lentille sans être dévié).

Du point de vue de l'optique ondulatoire, comme  $H$  est le projeté orthogonal de  $S_1$  sur le rayon issu de  $S_2$ ,  $H$  et  $S_1$  sont dans le même plan d'onde.

Ainsi,  $(S_1M) = (HM)$  d'après le théorème de Malus.

### 3. Retour sur l'optique géométrique

#### 👁 Onde sphérique *schéma*

La figure 1 représente une onde sphérique issue d'un point  $S$ . Les trois points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  sont situés sur trois rayons lumineux différents mais sur la même surface d'onde.

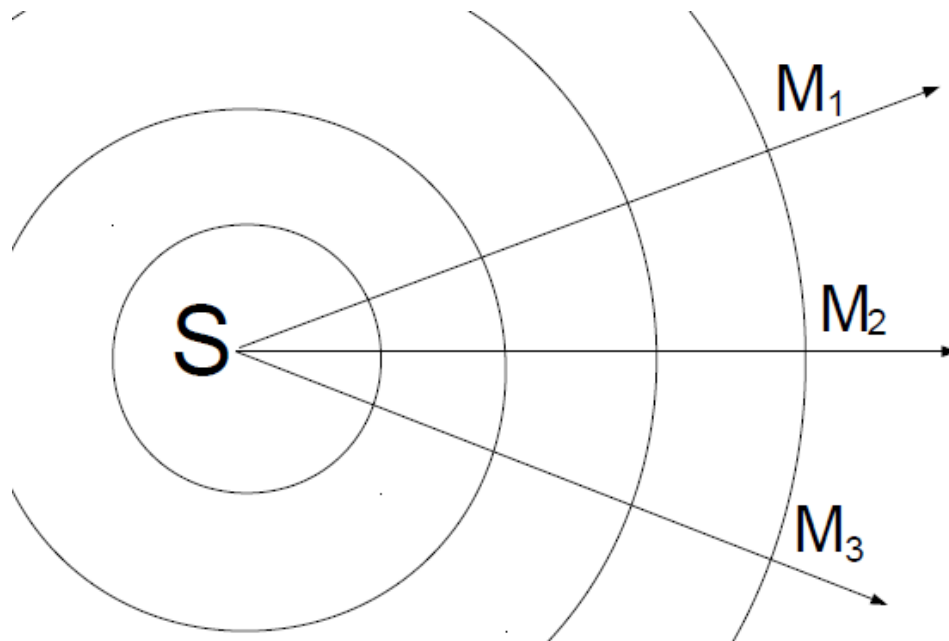


FIGURE 1 – Onde sphérique

#### 👁 Onde plane *schéma*

La figure 2 représente une onde plane issue d'un point à l'infini. Les trois points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  sont situés sur trois rayons lumineux différents mais sur la même surface d'onde.

L'onde plane est le cas limite de l'onde sphérique lorsque le point source est à l'infini.

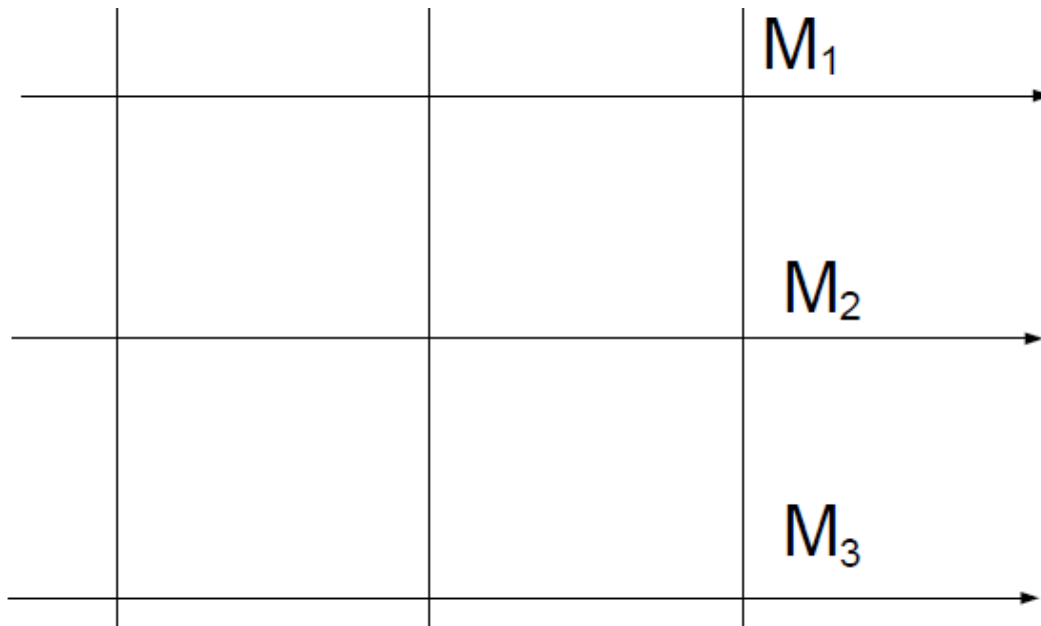


FIGURE 2 – Onde plane

## 2 Chemin optique et loi de la réfraction *exercice*

- ▷ Tracer le chemin de deux rayons lumineux parallèles réfractés suivant les angles  $i_1$  et  $i_2$  par rapport à la normale à un dioptre séparant l'air d'un milieu d'indice  $n$ .
- ▷ Exprimer la différence de marche  $\delta$  entre les deux rayons grâce au théorème de Malus. Pourquoi  $\delta = 0$ ? Montrer que l'on retrouve la loi de Snell-Descartes de la réfraction.
- ▷ Interpréter le calcul précédent en terme de retard entre les ondes grâce aux célérités de ces dernières.

▷ Tracé classique.

▷ La différence de marche  $\delta$  entre les deux rayons provenant de  $S$  (à l'infini) et allant en  $M$  (à l'infini) est  $\delta = (SIM) - (SJM)$  où  $I$  et  $J$  sont les points de passage des deux rayons sur le dioptre. En faisant apparaître les plans d'onde  $AJ$  et  $IB$  :

$$\delta = (SAIM) - (SJBM) = [(SA) + AI + (IM)] - [(SJ) + nJB + (BM)]$$

Or grâce au théorème de Malus :  $(SA) = (SJ)$  et  $(IM) = (BM)$ , d'où :

$$\delta = AI - nJB = IJ [\sin i_1 - n \sin i_2] = 0$$

car c'est le même pour tout  $IJ$ . Aussi, on retrouve la loi de Snell-Descartes de la réfraction :  $\sin i_1 = n \sin i_2$ .

▷ Le retard pris par la première onde entre  $A$  et  $I$  :  $\delta t = \frac{AI}{c} = \frac{IJ \sin i_1}{c}$  est le même que pour la seconde onde entre  $J$  et  $B$  :  $\delta t = \frac{JB}{\frac{c}{n}} = \frac{IJ n \sin i_2}{c}$ .

## 3 Stigmatisme *théorème*

deux points appartenant à la même surface d'onde de la source  $A$  (ou  $A'$  par principe du retour inverse de la lumière) sont à même chemin optique de  $A$  (ou de  $A'$ ).

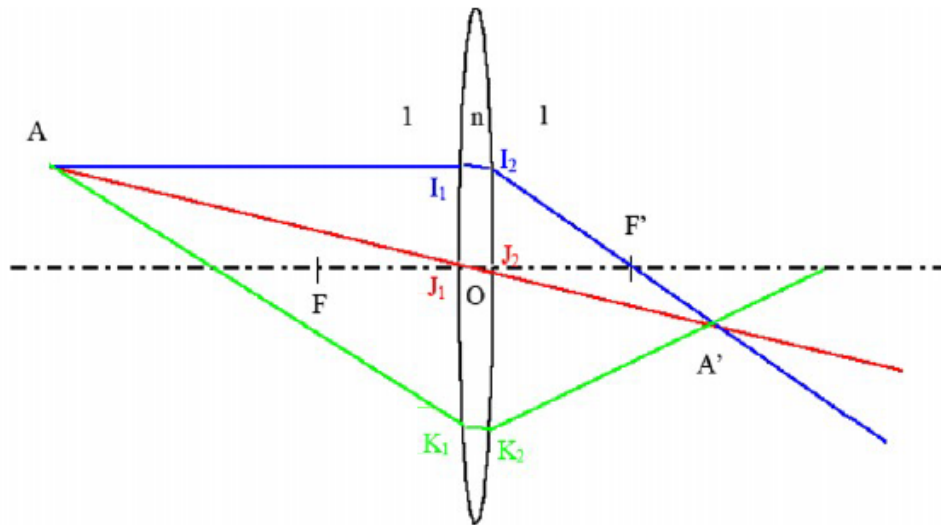
Aussi,  $\Rightarrow$

le chemin optique est conservé entre deux points conjugués,

$$(AA') = \text{constant si } A \text{ est conjugué avec } A'$$

### 👁 Stigmatisme dans le cas d'une lentille convergente *schéma*

La figure 3 représente le stigmatisme dans le cas où deux points sont conjugués grâce à une lentille convergente. Cela illustre la conservation du chemin optique entre deux points conjugués.



$$L_{AA'} = AI_1 + n \cdot I_1I_2 + I_2A' = AJ_1 + n \cdot J_1J_2 + J_2A' = AK_1 + n \cdot K_1K_2 + K_2A'$$

FIGURE 3 – Stigmatisme dans le cas d'une lentille convergente

## II- Phénomène d'interférence

### ✳ Les récepteurs sont quadratiques *s'y retrouver*

les récepteurs lumineux (photocellules, pellicules photo, œil, etc.) ont des temps de réponse  $\tau_r$  très grands devant la période des ondes lumineuses dans le visible  $T \sim 10^{-15}$  s :

- pour l'œil  $\tau_r$  est de l'ordre de 0,1 s ;
- pour une photodiode, le temps de réponse est de  $10^{-6}$  s ;
- pour une pellicule photo,  $\tau_r$  est de l'ordre de  $10^{-1}$  s à  $10^{-2}$  s, ce qui correspond au temps d'exposition de la pellicule à la lumière.

Fondamentalement, le détecteur moyenne (sur une durée  $\tau_r$ ) le signal qui lui est envoyé. Puisqu'une onde lumineuse sinusoïdale a une moyenne nulle, les détecteurs lumineux ne suivent pas les variations de l'amplitude de l'onde.

Les détecteurs lumineux font donc la moyenne du carré de l'amplitude : ils sont *quadratiques* (en électrocinétique, on dirait qu'il s'agit en fait de faire une mesure "efficace").

### 📎 Intensité de l'onde *définition*

L'intensité lumineuse (ou l'éclairement) est proportionnelle à la moyenne temporelle (sur un temps  $\tau_r$ ) du carré du signal lumineux au point  $M$  (d'amplitude  $a$  et d'amplitude complexe  $\tilde{a}$ ) :

$$I(M) = K \langle a^2(M, t) \rangle_{\tau_r} = \frac{K}{2} |\tilde{a}(M, t)|^2$$

NB : on prendra souvent  $K = 1$  ! Et ni  $a$ , ni  $I$  n'ont d'unités fixées, ce qui est assez inhabituel en physique.

### ✳ Relativité de l'intensité *s'y retrouver*

comme les récepteurs ne sont sensibles qu'aux variations relatives de l'éclairement (ou de l'intensité), peu importe la valeur effective de cet éclairement, mais seulement les variations de celui-ci dans le plan d'observation.

Ainsi, l'impression au point  $M$  sur une plaque photo, ou l'éclairement au point  $M$  d'un écran, ou la réponse au point  $M$  d'un photodétecteur, est proportionnelle à l'intensité reçue au point  $M$ . La constante de proportionnalité n'est pas accessible mais on pourra prendre une référence : par exemple, on pourra se référer à l'éclairement maximal sur l'écran.

### 👁 Exemples de phénomènes d'interférences *vidéo*

Le phénomène d'interférence est donc lié au fait que l'intensité de la somme n'est pas la somme des intensités. Dans certains cas, de la lumière ajoutée à de la lumière donne de l'obscurité!

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

### 📖 4 Formule de Fresnel *théorème*

Au point  $M$ , les deux signaux ont pour amplitudes respectives :

- $a_1(M, t) = a_{01} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{(S_1M)}{c} \right) - \varphi_{sup1} - \phi_1 \right]$
- et  $a_2(M, t) = a_{02} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{(S_2M)}{c} \right) - \varphi_{sup2} - \phi_2 \right]$ .

Si une seule source émet, l'intensité lumineuse au point  $M$  est :

- $I_1(M) = \langle a_1^2 \rangle = \frac{a_{01}^2}{2}$  si c'est la source  $S_1$  qui émet,
- ou  $I_2(M) = \langle a_2^2 \rangle = \frac{a_{02}^2}{2}$  si c'est la source  $S_2$  qui émet.

Dans le cas où deux sources émettent, les deux amplitudes s'additionnent ( $a(M, t) = a_1(M, t) + a_2(M, t)$ ) et on obtient l'intensité

$$I(M) = \langle a_1(M, t)^2 \rangle + \langle a_2(M, t)^2 \rangle + 2 \langle a_1(M, t) a_2(M, t) \rangle$$

Dans cette formule, le premier terme est  $\frac{a_{01}^2}{2} = I_1$ , le second  $\frac{a_{02}^2}{2} = I_2$  et le dernier, appelé *terme d'interférence* est

$$\begin{aligned} 2 \langle a_1(M, t) a_2(M, t) \rangle &= 2 a_{01} a_{02} \left\langle \cos \left[ \omega \left( t - \frac{(S_1M)}{c} \right) - \varphi_{sup1} - \phi_1 \right] \cdot \cos \left[ \omega \left( t - \frac{(S_2M)}{c} \right) - \varphi_{sup2} - \phi_2 \right] \right\rangle \\ &= 4 \sqrt{I_1 I_2} \left\langle \cos \left[ \omega \left( t - \frac{(S_1M)}{c} \right) - \varphi_{sup1} - \phi_1 \right] \cdot \cos \left[ \omega \left( t - \frac{(S_2M)}{c} \right) - \varphi_{sup2} - \phi_2 \right] \right\rangle \end{aligned}$$

qu'une formule trigonométrique permet de transformer en

$$2 \sqrt{I_1 I_2} \langle \cos [\Delta\varphi] \rangle + 2 \sqrt{I_1 I_2} \langle \cos [2\omega t + \Delta\varphi'] \rangle$$

où  $\Delta\varphi = -\omega \frac{(S_1M)}{c} - \varphi_{sup1} - \phi_1 + \omega \frac{(S_2M)}{c} + \varphi_{sup2} + \phi_2$  et  $\Delta\varphi' = -\omega \frac{(S_1M)}{c} - \varphi_{sup1} - \phi_1 - \omega \frac{(S_2M)}{c} - \varphi_{sup2} - \phi_2$ . Bien entendu, la seconde moyenne est nulle :

$$\langle \cos [2\omega t + \Delta\varphi'] \rangle = 0$$

On a donc démontré que  $\Rightarrow$

l'intensité  $I$  résultant de l'interférence de deux sources monochromatiques de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide, respectivement d'intensité  $I_1$  et  $I_2$  (si elles étaient seules) est

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos (\Delta\varphi) \neq I_1 + I_2$$

où  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta + \varphi_{sup}$  avec  $\delta$  la différence de marche et  $\varphi_{sup} = \pi$  dans le cas d'une réflexion :

- sur un miroir métallique
- sur un dioptre d'indice supérieur



### Interprétation de la formule de Fresnel *s'y retrouver*

Cette formule appelée formule de Fresnel fait intervenir  $I_1$ , l'intensité reçue au point  $M$  avec la seule source  $S_1$ , et  $I_2$ , l'intensité reçue au point  $M$  avec la seule source  $S_2$ , le seul terme dépendant de  $M$  est le déphasage  $\Delta\varphi(M)$  entre la vibration lumineuse issue de la source 2 et celle issue de la source 1 arrivant au point  $M$ . Le déphasage est primordial quand on s'intéresse aux interférences entre deux signaux.



### Ordre d'interférence *définition*

L'ordre d'interférence est la grandeur  $p$  sans dimension telle que  $\Delta\varphi(M) = 2\pi p$ .



### Nature des interférences et ordre d'interférence *s'y retrouver*

Aussi, on est en présence

- d'une interférence constructive (c'est à dire d'une frange brillante ou claire) si  $p$  est entier ;
- d'une interférence destructive (c'est à dire d'une frange sombre ou noire) si  $p$  est demi entier ( $p = \frac{1}{2} + n$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ ).



### Contraste ou visibilité des franges *définition*

le contraste ou visibilité des franges est

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$



### 5 Encadrement du contraste *exercice*

Montrer que  $0 \leq C \leq 1$ .

Comme  $I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2}$  et  $I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 \cdot I_2}$ , on en déduit :  $C = \frac{4 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2}}{2 \cdot (I_1 + I_2)} = \frac{\sqrt{I_1 \cdot I_2}}{\frac{(I_1 + I_2)}{2}}$ . Aussi, le contraste est le rapport de la moyenne géométrique des intensités des deux ondes seules sur la moyenne arithmétique de  $I_1$  et  $I_2$ .



### Interprétation de la visibilité des franges *s'y retrouver*

Aussi,

- le contraste est nul si  $I_1 \gg I_2$  ou  $I_2 \gg I_1$ . Il est donc primordial d'avoir des intensités  $I_1$  et  $I_2$  proches pour conserver un bon contraste donc une bonne visibilité des franges.
- le contraste est maximal (c'est à dire  $C = 1$ ) si  $I_1 = I_2$  : c'est la meilleure visibilité des franges.



### 6 Réécriture de la formule de Fresnel avec le contraste *exercice*

Montrer qu'on peut écrire la formule de Fresnel d'une autre façon :

$$I(M) = I_0 [1 + C \cos(\Delta\varphi)] \quad \text{avec } I_0 = I_1 + I_2$$

|

$$I = I_1 + I_2 + (I_1 + I_2) \cdot C \cdot \cos(\Delta\varphi) \Rightarrow$$



### Evolution de la visibilité des franges d'interférences avec le contraste *animation*

La figure 4 représente l'évolution de la visibilité des franges d'interférences (le contraste diminuant de haut en bas)..

Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

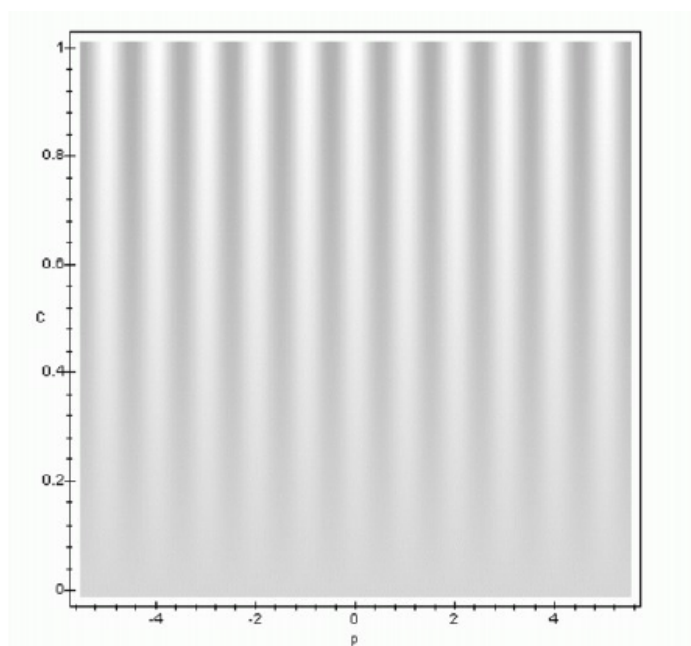


FIGURE 4 – Evolution de la visibilité des franges d'interférences avec le contraste



### Surfaces d'iso-eclairement *s'y retrouver*

Une surface d'iso-eclairement (ou d'iso-intensité) est l'ensemble connexe des points  $M$  tels que  $I(M) = \text{constante}$ , d'où  $\Delta(M) = \text{constante}$  donc  $(S_2M) - (S_1M) = \text{constante}$ .



### 7 Forme des surfaces iso-eclairement *exercice*

▷ Montrer que les surface d'iso eclairement dans un milieu homogène sont des hyperboloïdes homofocales de foyers  $S_1$  et  $S_2$ .

Le système de franges possède la symétrie de révolution par rapport à l'axe  $S_1S_2$ . Si le milieu est homogène d'indice  $n$  constant, cela correspond à  $S_2M - S_1M = \text{constante}$



### Quelques surfaces iso-éclairement *schéma*

| La figure 5 représente quelques surfaces iso-éclairement.



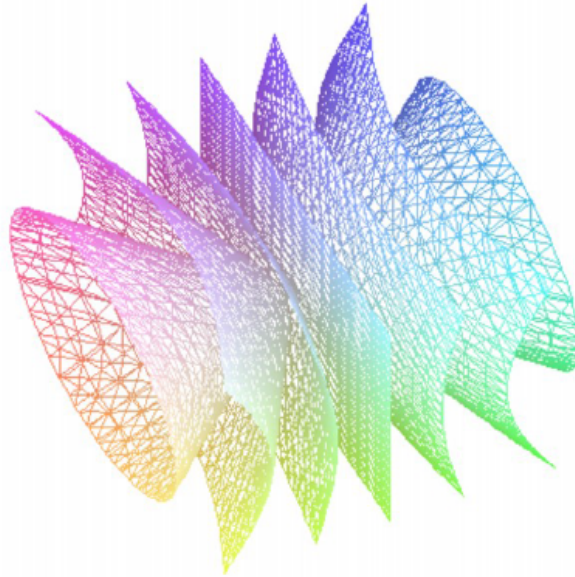


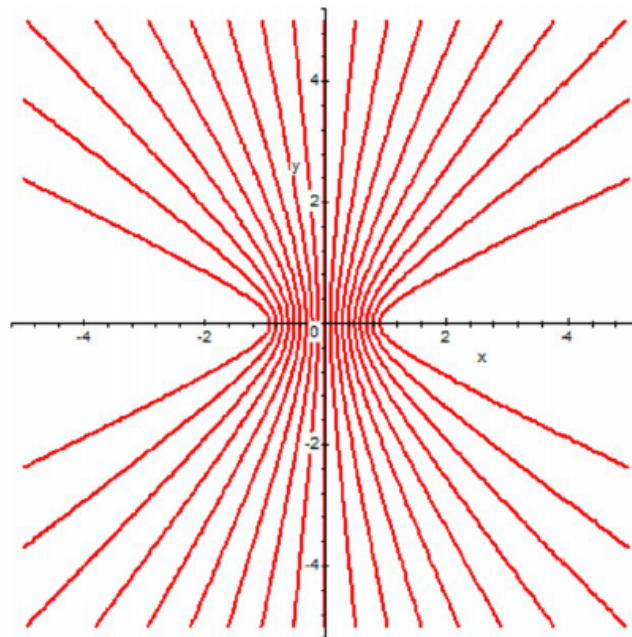
FIGURE 5 – Quelques surfaces iso-éclairage



### Trace de quelques surfaces iso-éclairage dans un plan contenant $S_1$ et $S_2$

*schéma*

La figure 6 représente la trace de quelques surfaces iso-éclairage dans un plan méridien (donc contenant l'axe  $S_1S_2$ ), cela correspond à des hyperboles homofocales de foyers  $S_1$  et  $S_2$ .

FIGURE 6 – Trace de quelques surfaces iso-éclairage dans un plan contenant  $S_1$  et  $S_2$ 

## III- Notion de cohérence

### 1. Conditions d'interférence

## 8 Calcul de l'intensité résultant de la superposition de deux ondes monochromatiques *exercice*

On s'intéresse à deux sources ponctuelles (lumineuses en optique) notées  $S_1$  et  $S_2$  qui émettent des ondes monochromatiques de pulsations respectives  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Les deux signaux sont d'amplitudes respectives :  $a_1(S_1, t) = a_{01} \cos(\omega_1 t - \phi_1)$  et  $a_2(S_2, t) = a_{02} \cos(\omega_2 t - \phi_2)$  avec le déphasage  $\phi = \phi_2 - \phi_1$  (supposé dans un premier temps constant) appelé déphasage initial de la source 2 par rapport à 1.

▷ Les deux signaux émis par les deux sources se propagent et atteignent le point  $M$ . Exprimer  $a_1(M, t)$  et  $a_2(M, t)$ .

▷ Exprimer l'intensité  $I_1(M)$  si seule la première source émet. De même, exprimer l'intensité  $I_2(M)$  si seule la seconde source émet.

▷ Montrer que l'intensité  $I(M)$  si les deux sources émettent est  $I(M) \neq I_1(M, t) + I_2(M, t)$ .

▷ Montrer que

$$I(M) = I_1(M, t) + I_2(M, t) + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2) \cdot t + \Delta\varphi] \rangle$$

▷ Soit  $c$  la vitesse de propagation des ondes lumineuses dans le vide, le retard temporel dû à la propagation du signal d'une source  $S$  jusqu'au point  $M$  est  $\frac{(SM)}{c}$  avec  $(SM)$  le chemin optique. Au point  $M$ , les deux signaux ont pour amplitudes respectives :

- $a_1(M, t) = a_{01} \cos \left[ \omega_1 \cdot \left( t - \frac{(S_1M)}{c} \right) - \varphi_{sup1} - \phi_1 \right]$
- et  $a_2(M, t) = a_{02} \cos \left[ \omega_2 \cdot \left( t - \frac{(S_2M)}{c} \right) - \varphi_{sup2} - \phi_2 \right]$ .

▷ Si une seule source émet, l'intensité lumineuse au point  $M$  est :

- $I_1(M) = \langle a_1^2 \rangle = \frac{a_{01}^2}{2}$  si c'est la source  $S_1$  qui émet,
- ou  $I_2(M) = \langle a_2^2 \rangle = \frac{a_{02}^2}{2}$  si c'est la source  $S_2$  qui émet.

L'intensité est donc sensiblement constante dans la zone éclairée de l'écran d'observation.

▷ Dans le cas où deux sources émettent, les deux amplitudes s'additionnent ( $a(M, t) = a_1(M, t) + a_2(M, t)$ ) et on obtient l'intensité

$$I(M) = \langle a_1(M, t)^2 \rangle + \langle a_2(M, t)^2 \rangle + 2 \cdot \langle a_1(M, t) a_2(M, t) \rangle$$

Dans cette formule, le premier terme est  $\frac{a_{01}^2}{2} = I_1$ , le second  $\frac{a_{02}^2}{2} = I_2$  et le dernier est appelé *terme d'interférence*.

▷ Le *terme d'interférence* est  $2 \cdot \langle a_1(M, t) \cdot a_2(M, t) \rangle$

$$\begin{aligned} & 2 \cdot a_{01} \cdot a_{02} \cdot \left\langle \cos \left[ \omega_1 \cdot \left( t - \frac{(S_1M)}{c} \right) - \varphi_{sup1} - \phi_1 \right] \cdot \cos \left[ \omega_2 \cdot \left( t - \frac{(S_2M)}{c} \right) - \varphi_{sup2} - \phi_2 \right] \right\rangle \\ & = 4\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \left\langle \cos \left[ \omega_1 \cdot \left( t - \frac{(S_1M)}{c} \right) - \varphi_{sup1} - \phi_1 \right] \cdot \cos \left[ \omega_2 \cdot \left( t - \frac{(S_2M)}{c} \right) - \varphi_{sup2} - \phi_2 \right] \right\rangle \end{aligned}$$

qu'une formule trigonométrique permet de transformer en

$$2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2) \cdot t + \Delta\varphi] \rangle + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \langle \cos[(\omega_1 + \omega_2) \cdot t + \Delta\varphi'] \rangle$$

où  $\Delta\varphi = -\omega_1 \frac{(S_1M)}{c} - \varphi_{sup1} - \phi_1 + \omega_2 \frac{(S_2M)}{c} + \varphi_{sup2} + \phi_2$  et  $\Delta\varphi' = -\omega_1 \frac{(S_1M)}{c} - \varphi_{sup1} - \phi_1 - \omega_2 \frac{(S_2M)}{c} - \varphi_{sup2} - \phi_2$ . Bien entendu, la seconde moyenne est nulle :

$$\langle \cos[(\omega_1 + \omega_2) \cdot t + \Delta\varphi'] \rangle = 0$$

cqfd.

### Etude du terme d'interférence *s'y retrouver*

Le *terme d'interférence*  $I(M) - I_1(M, t) - I_2(M, t)$  est nul, sauf si  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , c'est à dire si les deux sources ont la même pulsation. Si les deux sources ont la même pulsation, alors :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle$$

et  $\langle \cos(\Delta\varphi) \rangle \neq 0$  pour peu que  $\Delta\varphi$  soit constant.

### 9 Condition d'interférence et cohérence temporelle *théorème*

on a déjà mentionné qu'il fallait que les deux sources  $S_1$  et  $S_2$  aient la même pulsation pour que  $\langle \cos(\Delta\varphi) \rangle \neq 0$ , c'est à dire pour qu'il y ait interférence. Ainsi, puisque les ondes proviennent de la même source primaire :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \Delta + \varphi_{sup}\right)$$

avec  $\varphi_{sup} = \varphi_{sup2} - \varphi_{sup1}$ .  $\Rightarrow$

Deux longueurs d'onde différentes n'interfèrent pas.

### Interféromètre éclairé en lumière polychromatique *s'y retrouver*

Si un interféromètre est éclairé en lumière polychromatique, il s'agit d'appliquer la formule de Fresnel pour chacune des longueurs d'ondes

$$I(\lambda) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta + \varphi_{sup}\right)$$

puis de sommer l'intensité relative à chaque longueur d'onde :

soit de façon discrète si le spectre est discret :  $I = \sum_{k=1}^N I(\lambda_k)$ ,

soit de façon continue si le spectre est continu :  $I = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} I(\lambda) d\lambda$ .

### Cas d'une raie large *s'y retrouver*

Dans d'un spectre continu, il s'agit de sommer sous forme d'intégrale les intensité lumineuses déterminées pour chaque longueur d'onde (données par la formule de Fresnel).

### 10 Condition d'interférence et cohérence spatiale *théorème*

Rappelons que nous avons vu précédemment que l'intensité en un point  $M$  éclairé par deux sources ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  était

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle$$

avec  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} [(S_2 M) - (S_1 M)] + \varphi_{sup2} - \varphi_{sup1} + \phi_2 - \phi_1$ . Or le déphasage à l'origine  $\phi_2 - \phi_1$  entre deux sources lumineuses  $S_1$  et  $S_2$  est variable et quelconque. Ainsi sur le temps de réponse du détecteur, la phase varie un très grand nombre de fois entre 0 et  $2\pi$  et ainsi  $\langle \cos(\Delta\varphi) \rangle = 0$ . L'intensité vaut alors  $I_1 + I_2$ . Aussi,  $\Rightarrow$

deux sources primaires différentes n'interfèrent pas.

### Utilisation des laser pour des interférences *s'y retrouver*

Une grande monochromaticité (et une grande longueur de cohérence temporelle) associée à une grande directivité (un point source à distance infinie) expliquent pourquoi il est plus facile de réaliser des interférences avec un laser.

### Critère de brouillage à retenir

Il y a brouillage dès que  $|\Delta p| > 1/2$  où  $|\Delta p|$  est évalué sur la moitié de l'étendue (spectrale ou spatiale) de la source.

## 2. Modèle du train d'onde

### ☼ Sources lumineuses classiques *s'y retrouver*

contrairement aux lasers, les sources classiques sont fondées sur l'émission spontanée de lumière.

### ☼ Laser *s'y retrouver*

un laser est un appareil émettant de la lumière amplifiée par émission stimulée. Le terme laser provient de l'acronyme anglo-américain «light amplification by stimulated emission of radiation» (en français : «amplification de la lumière par émission stimulée de radiation»).

Le laser peut être extrêmement directionnel (on dit qu'il est très cohérent spatialement) mais aussi d'une grande pureté spectrale (temporellement très cohérent).

### ☼ Les sources monochromatiques n'existent pas *s'y retrouver*

les sources lumineuses ne peuvent en aucun cas être éternelles. Aussi, aucune lampe ne peut émettre une onde purement monochromatique.

Les molécules ou atomes excités émettent souvent des ondes quasi monochromatiques, autour de la fréquence  $\nu$  avec une largeur naturelle  $\Delta\nu$  pour une raie d'émission à la fréquence  $\nu$  avec  $\Delta\nu$  très petit. En fait, on démontre que, plus la durée d'émission  $\tau_c$  est courte, plus la largeur spectrale  $\Delta\nu$  est importante :  $\Delta\nu\tau_c \sim 1$ .

Les sources lumineuses n'envoient pas une onde monochromatique limitée dans le temps, mais plutôt une onde imparfaitement monochromatique. On peut prendre cela en compte en écrivant l'amplitude délivrée par une source -quasi - monochromatique sous la forme :

$$a(S, t) = a_0 \cos(\omega t - \phi(t))$$

### Durée et longueur de cohérence temporelle *définition*

Un train d'onde a

- une durée dans le temps  $\tau_c$ , la durée de cohérence temporelle ;
- et une longueur dans l'espace  $\ell_c = c\tau_c$ , la longueur de cohérence temporelle.

$$\tau_c \approx \frac{1}{\Delta f} \text{ où } \Delta f \text{ est largeur du spectre en fréquence de la source.}$$

### ☼ Quelques ordres de grandeur des longueurs de cohérence temporelle *s'y retrouver*

Cette durée de cohérence temporelle dépend fortement du type de lampe utilisée :

- $\tau_c \sim 10^{-11}$  s pour des sources classiques,
- alors que dans le cas des lasers, ce temps peut être très faible (car ces sources sont souvent très monochromatiques). On retiendra que, dans le cas du laser HeNe (utilisé au laboratoire),  $\tau_c \sim 10^{-8}$  s.

La longueur de cohérence  $\ell_c = c\tau_c$  est

- $\ell_c \sim 1$  mm pour des sources classiques,
- alors que dans le cas des lasers HeNe  $\ell_c \sim 1$  m.

### ☼ Modèle du train d'onde *s'y retrouver*

pour simplifier les choses, on peut imaginer que l'émission lumineuse se fait par émission de trains d'onde de durée moyenne  $\tau_c$  grande devant la période du signal. L'amplitude est donc "sinusoïdale par parties" :

$$\dots \quad a(S, t) = a_0 \cos(\omega t - \phi_n) \quad \text{si } t \in [n\tau_c; (n+1)\tau_c[ \\ a(S, t) = a_0 \cos(\omega t - \phi_{n+1}) \quad \text{si } t \in [(n+1)\tau_c; (n+2)\tau_c[ \quad \dots$$

où les phases à l'origine des dates  $\phi_n, \phi_{n+1}$  sont constantes mais les trains d'onde sont aléatoires entre eux. En effet, deux trains d'onde émis successivement par la même particule ont des déphasages aléatoires : la suite  $\phi_n$  est une suite aléatoire.

### Modèle du train d'ondes *schéma*

La figure 7 représente le modèle du train d'ondes. On peut regarder ce train d'onde

- en un endroit, au cours du temps : il est composé de "wagons" sinusoïdaux de durée  $\tau_c$ , qui défilent ;
- à une date fixée, dans l'espace : il est composé de "wagons" sinusoïdaux de longueur  $\ell_c$ .

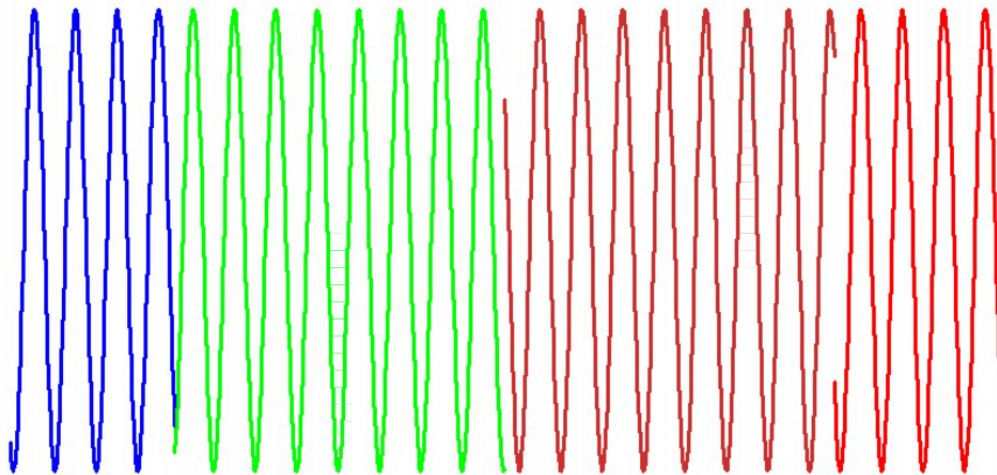


FIGURE 7 – Modèle du train d'ondes

### 11 Condition d'interférence sur les trains d'onde *théorème*

revenons à la formule de l'intensité en un point  $M$  éclairé par deux sources ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  :  $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle$  avec  $\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} [(S_2M) - (S_1M)] + \varphi_{sup2} - \varphi_{sup1} + \phi_2 - \phi_1$ .  $\Rightarrow$  Pour qu'il y ait interférence, il faut que les trains d'ondes se superposent, c'est-à-dire que

$$|\delta| < \ell_c \text{ pour que les interférences ne soient pas brouillées}$$

où  $\delta$  est la différence de marche et  $\ell_c$ , la longueur de cohérence spatiale de la source.

### 12 Lien entre la longueur de cohérence temporelle, la longueur d'onde moyenne et la largeur du spectre en longueur d'onde *théorème*

Il y a brouillage dès que  $|\delta| > \ell_c = c\tau_c$ , mais aussi dès que  $|\Delta p| > 1/2$  où  $|\Delta p|$  est évalué sur la moitié de l'étendue (spectrale ou spatiale) de la source ( $\Delta\lambda/2$ , or  $p_1 = \frac{\delta}{\lambda_1}$  et  $p_2 = \frac{\delta}{\lambda_2}$  donc il y aura brouillage si

$$|p_2 - p_1| > 1 \text{ avec } \left| \frac{\delta}{\lambda_1} - \frac{\delta}{\lambda_2} \right| > 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\delta \Delta\lambda}{\lambda^2} \right| > 1$$

qui est la même condition que  $|\delta| > \ell_c = c\tau_c$  pour peu que  $\ell_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ .  $\Rightarrow$

On peut relier la longueur de cohérence temporelle  $\ell_c = c\tau_c$  à la largeur spectrale  $\Delta\lambda$  d'une raie non

monochromatique centrée sur  $\lambda$  :

$$l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

### 1) Modélisation des interférences créées par une lame d'eau savonneuse *exercice*

On s'intéresse à une lame d'eau savonneuse verticale, d'épaisseur  $e(z)$  ( $z$  est l'axe vertical dirigé vers le haut), et d'indice  $n = 1,33$ .

1) Dans un premier temps, la lame est éclairée par un faisceau laser de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide.

1.a) Modéliser l'amplitude  $a$  de l'onde lumineuse délivrée par le laser. Lui associer l'amplitude complexe  $\tilde{a}$ .

1.b) Donner les caractéristiques du vecteur d'onde  $\vec{k}$  dans un milieu non absorbant d'indice  $n$ . Montrer que le déphasage introduit lors de la propagation de  $A$  à  $B$  peut s'écrire  $\frac{2\pi}{\lambda_0}(AB)$ . On donnera l'expression du chemin optique  $(AB)$ .

1.c) Faire un schéma d'optique géométrique représentant les rayons lumineux issus du laser et les comparer aux lignes de champs de  $\vec{k}$ . Représenter sur le même schéma les rayons lumineux précédents et la trace des surfaces d'onde pour lesquelles la phase  $\varphi$  dans l'amplitude de l'onde, à  $t$  donnée, est constante.

1.d) Tracer le chemin de deux rayons lumineux parallèles réfractés suivant les angles  $i_1$  et  $i_2$  par rapport à la normale à un dioptre séparant l'air de l'eau d'indice  $n$ . Exprimer l'égalité des chemins optiques pour les deux rayons grâce au théorème de Malus. En déduire que l'on retrouve la loi de Snell-Descartes de la réfraction.

2) On va tenter maintenant d'expliquer le phénomène d'interférence sur la lame d'eau savonneuse éclairée par un laser.

2.a) Estimer la période de l'onde et la comparer au temps de persistance rétinienne. En déduire une explication du fait que l'œil détecte l'intensité lumineuse  $I(M) = \langle a(M, t)^2 \rangle$ .

2.b) Faire un schéma de la lame d'eau savonneuse (en coupe), avec le laser et l'œil qui regarde la réflexion de la lumière.

2.c) Calculer l'amplitude de l'onde reçue par l'œil puis l'intensité lumineuse.

2.d) Interpréter alors le phénomène d'interférence.

2.e) Proposer une amélioration mathématique du modèle précédent pour expliquer l'observation expérimentale du fait que la lame apparaît noire à l'endroit où elle va se déchirer.

3) La lame d'eau savonneuse est maintenant éclairée par une lumière blanche.

3.a) Montrer que le phénomène d'interférence dépend de la longueur d'onde du rayonnement.

3.b) On visualise le spectre de la lumière qui résulte des interférences. Expliquer comment apparaissent les zones (appelées cannelures) correspondant aux longueurs d'ondes qui donnent des interférences destructives.

3.c) Proposer une interprétation à la couleur des interférences.

#### Correction :

1) Faisceau laser de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide.

1.a) On peut modéliser l'onde lumineuse délivrée par le laser par une OPPM :

$$a(\vec{r}, t) = a_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = \text{Re}(\tilde{a}) \text{ avec } \tilde{a}(\vec{r}, t) = \tilde{a}_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

1.b) Comme

$$a(\vec{r}, t) = a_0 \cos\left(\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right)$$

on trouve  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}n = \frac{2\pi}{\lambda_0}n$ , soit  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda_0}n\vec{u}_x$ .

Le déphasage introduit lors de la propagation de  $A$  à  $B$  peut s'écrire

$$\Delta\varphi = k(x_B - x_A) = \frac{2\pi}{\lambda_0}n(x_B - x_A) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(AB) \text{ avec } (AB) = nAB$$

1.c) Les rayons lumineux issus du laser sont tous parallèles à  $\vec{u}_x$ , tout comme les lignes de champs de  $\vec{k}$ . La phase  $\varphi$  dans l'amplitude de l'onde, à  $t$  donnée, est

$$\varphi = \omega t - kx + \varphi_0 = cste \Leftrightarrow x = cste'$$

Les surfaces d'onde sont des plans orthogonaux à  $\vec{u}_x$ , donc aux rayons lumineux.

**1.d)** La différence de marche  $\delta$  entre les deux rayons provenant de  $S$  (à l'infini) et allant en  $M$  (à l'infini) est  $\delta = (SIM) - (SJM)$  où  $I$  et  $J$  sont les points de passage des deux rayons sur le dioptre. En faisant apparaître les plans d'onde  $AJ$  et  $IB$  :

$$\delta = (SAIM) - (SJBM) = [(SA) + AI + (IM)] - [(SJ) + nJB + (BM)]$$

Or grâce au théorème de Malus :  $(SA) = (SJ)$  et  $(IM) = (BM)$ , d'où :

$$\delta = AI - nJB = IJ [\sin i_1 - n \sin i_2] = 0$$

car c'est le même pour tout  $IJ$ . Aussi, on retrouve la loi de Snell-Descartes de la réfraction :  $\sin i_1 = n \sin i_2$ .

**2)** Phénomène d'interférence sur la lame d'eau savonneuse.

**2.a)** La période de l'onde est

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda_0}{c} \approx \frac{5 \times 10^{-7}}{3 \times 10^8} = 10^{-15} \text{ s}$$

Le temps de persistance rétinienne est  $\tau_r \approx \frac{1}{20} \text{ s} \gg T$ .

Si l'œil détectait l'amplitude, il en ferait une moyenne qui est nulle. Aussi, l'intensité lumineuse  $I(M) = \langle a(M, t)^2 \rangle$  permet-elle d'avoir une moyenne non nulle.

**2.b)** On peut poser  $O$ , le point où se fait la première réflexion sur la lame d'eau savonneuse. Il y a deux rayons réfléchis vers l'œil

**2.c)** Sur l'œil (en  $M$ ), les deux signaux ont pour amplitudes respectives :

- $a_1(M, t) = a_{01} \cos[\omega t - \varphi_1]$
- et  $a_2(M, t) = a_{02} \cos[\omega t - \varphi_2]$ .

avec  $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} OM$  et  $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (2ne + OM)$ . Les deux amplitudes s'additionnent ( $a(M, t) = a_1(M, t) + a_2(M, t)$ ) et on obtient l'intensité

$$I(M) = \langle a_1(M, t)^2 \rangle + \langle a_2(M, t)^2 \rangle + 2 \langle a_1(M, t) a_2(M, t) \rangle$$

Dans cette formule, le premier terme est  $\frac{a_{01}^2}{2} = I_1$ , le second  $\frac{a_{02}^2}{2} = I_2$  et le dernier, appelé terme d'interférence est

$$\begin{aligned} 2 \langle a_1(M, t) a_2(M, t) \rangle &= 2 a_{01} a_{02} \langle \cos[\omega t - \varphi_1] \cos[\omega t - \varphi_2] \rangle \\ &= 4 \sqrt{I_1 I_2} \langle \cos[\omega t - \varphi_1] \cos[\omega t - \varphi_2] \rangle \end{aligned}$$

qu'une formule trigonométrique permet de transformer en

$$2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos[\varphi_1 - \varphi_2] \rangle + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos[2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2] \rangle$$

Bien entendu, la seconde moyenne est nulle. On a donc démontré que l'intensité  $I$  résultant de l'interférence de deux sources monochromatiques de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide, respectivement d'intensité  $I_1$  et  $I_2$  (si elles étaient seules) est

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi) \neq I_1 + I_2$$

où  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2ne$  ici.

**2.d)** Interférence constructive si  $\Delta\varphi = p2\pi$  avec  $p$  entier : plus de lumière.

Interférence destructive si  $\Delta\varphi = (p + \frac{1}{2}) 2\pi$  avec  $p$  entier : moins de lumière.

**2.e)** Si  $e \rightarrow 0$  (la lame va se déchirer), on devrait trouver  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  donc une interférence constructive.

Or la lame apparaît noire : il y a en fait une interférence destructive. On ajoute  $\varphi_{sup} = \pi$ .

**3)** Eclairage par une lumière blanche.

**3.a)** Le phénomène d'interférence dépend de  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2ne + \varphi_{sup}$ . A  $e$  fixé, cela dépend de  $\lambda_0$ .

**3.b)** Pour une longueur d'onde qui donne des interférences destructives, l'intensité est faible : il y a alors une zone sombre dans le spectre ("cannelure").

**3.c)** Le spectre de la lumière interférant est appauvri en certaines longueurs d'onde (cannelures) : c'est le spectre d'une lumière colorée.

**Eléments de correction :**



# Les techniques mathématiques à connaître

## Calculs de moyennes

### Définitions de la moyenne :

Soit  $s(t)$  une fonction de  $t$ .

- La moyenne physique de  $s$  est  $\langle s \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau s(t) dt$ ,
- la moyenne mathématique de  $s$  est  $\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$  si  $s(t)$  est  $T$ -périodique.

On peut montrer aisément que la seconde définition ne dépend pas de  $t_0$ . On peut montrer aussi que la première définition revient à la seconde, pour peu que  $\tau \gg T$ . On posera  $\tau = NT + \delta t$ , avec  $N \in \mathbb{N}$ , et  $\delta t < T$  (donc  $N \gg 1$ ) :

$$\langle s \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \left[ \int_0^T s(t) dt + \int_T^{2T} s(t) dt + \dots + \int_{(N-1)T}^{NT} s(t) dt + \int_{NT}^{\tau} s(t) dt \right]$$

donc, d'après la périodicité de  $s$ ,

$$\langle s \rangle_\tau = \frac{1}{NT + \delta t} \left[ N \int_0^T s(t) dt + \int_0^{\delta t} s(t) dt \right] = \frac{1}{T + \frac{\delta t}{N}} \int_0^T s(t) dt + \frac{\int_0^{\delta t} s(t) dt}{NT} \approx \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

comme le second terme tend vers 0.

### Quelques moyennes :

- si  $s(t)$  une fonction constante,  $\langle s_0 \rangle_\tau = s_0$  :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s_0 dt = \frac{1}{T} [s_0 t]_0^T = s_0$$

- si  $s(t)$  une fonction qui varie aléatoirement autour de 0,  $\langle s \rangle_\tau = 0$  ;
- si  $s(t)$  une fonction sinusoïdale,  $\langle s_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) \rangle_\tau = 0$  :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) dt = \frac{1}{T} \left[ -\frac{T}{2\pi} s_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) \right]_0^T = 0$$

- si  $s(t)$  une fonction sinusoïdale au carré,  $\langle \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) \rangle_\tau = \frac{1}{2}$  :

$$\langle s \rangle = \left\langle \frac{\cos(2\alpha) + 1}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{\cos(2\alpha)}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}$$

### Utilisation des complexes :

Si  $s_1(t) = \Re(\tilde{s}_1)$  et  $s_2(t) = \Re(\tilde{s}_2)$ , alors  $\langle s_1 s_2 \rangle_\tau = \frac{1}{2} \Re(\tilde{s}_1 \tilde{s}_2^*)$ , où  $\tilde{s}_2^*$  est le complexe conjugué de  $\tilde{s}_2$ .

Démonstration :

$$\langle s_1 s_2 \rangle_\tau = s_1 s_2 \left\langle \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + \alpha_1 + \alpha_2\right)}{2} \right\rangle_\tau = s_1 s_2 \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{2}$$

d'une part. D'autre part :

$$\frac{1}{2} \Re(\tilde{s}_1 \tilde{s}_2^*) = \frac{1}{2} \Re\left(s_1 e^{j\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_1\right)} s_2 e^{-j\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_2\right)}\right) = \frac{1}{2} \Re\left(s_1 s_2 e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}\right) = s_1 s_2 \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{2}$$

(cqfd)

# Technique à maîtriser

jeudi 14 décembre 2017

## I- Les capacités exigibles

### 1. Calculs de chemins optiques et de différences de marche



#### ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Associer la grandeur scalaire de l'optique à une composante d'un champ électrique.  
 Exprimer le retard de phase en un point en fonction du retard de propagation ou du chemin optique.  
 Utiliser l'égalité des chemins optiques sur les rayons d'un point objet à son image.  
 Associer une description de la formation des images en termes de rayon lumineux et en termes de surfaces d'onde.  
 Relier l'intensité à la moyenne temporelle du carré de la grandeur scalaire de l'optique.  
 Citer le temps de réponse de l'œil. Choisir un récepteur en fonction de son temps de réponse et de sa sensibilité fournis.  
 Établir la formule de Fresnel. Citer la formule de Fresnel et justifier son utilisation par la cohérence des deux ondes. Associer un bon contraste à des intensités  $I_1$  et  $I_2$  voisines.  
 Justifier l'additivité des intensités dans le cas de deux ondes incohérentes entre elles.  
 Interpréter la modification des franges lors du rajout d'une lame à faces parallèles sur un des trajets.

### 2. Cohérence spatiale



#### ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Utiliser le critère semi-quantitatif de brouillage des franges  $|\Delta p| > 1/2$  (où  $|\Delta p|$  est évalué sur la moitié de l'étendue spatiale de la source) pour interpréter des observations expérimentales.

### 3. Cohérence temporelle



#### ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Utiliser le critère semi-quantitatif de brouillage des franges  $|\Delta p| > 1/2$  (où  $|\Delta p|$  est évalué sur la moitié de l'étendue spectrale de la source) pour interpréter des observations expérimentales.  
 Relier la longueur de cohérence,  $\Delta\lambda$  et  $\lambda$  en ordre de grandeur.  
 En lumière blanche, utiliser l'additivité des intensités et déterminer les longueurs d'ondes des cannelures.

## II- Méthodes

### 1. Calculs de chemins optiques et de différences de marche



#### A) Calculer un chemin optique *méthode*

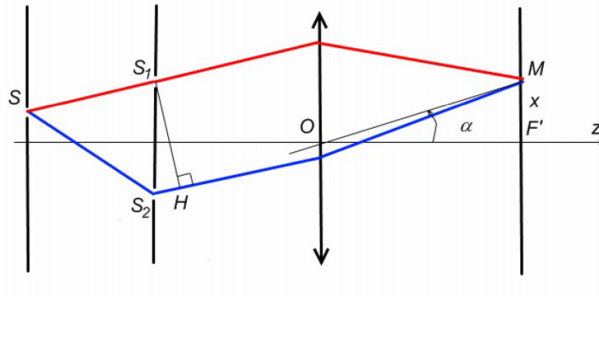
$$\Delta\psi_{O \rightarrow M} = \int_O^M \vec{k} \cdot d\vec{\ell} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (OM) + \varphi_{sup}.$$

Le calcul de chemin optique revient à évaluer la distance dans un milieu LHI et la multiplier par l'indice optique du milieu, sachant qu'il y a égalité de chemin optique entre deux points conjugués.

NB : il y a égalité de chemin optique entre un point  $A$  et deux points  $B$  et  $B'$  sur le trajet de la lumière

• depuis  $A$ , si  $B$  et  $B'$  sont sur la même surface d'onde (qui est un plan à l'infini).

### B) Appliquer le théorème de Malus *méthode*



Sur le schéma ci-contre, le point d'observation  $M$  étant dans le plan focal image, il est conjugué avec l'infini.

Du point de vue de l'optique géométrique, les rayons issus de  $S_1$  et  $S_2$  qui aboutissent en  $M$  sont parallèles (et parallèles au rayon fictif qui passerait par le centre de la lentille sans être dévié).

Du point de vue de l'optique ondulatoire, comme  $H$  est le projeté orthogonal de  $S_1$  sur le rayon issu de  $S_2$ ,  $H$  et  $S_1$  sont dans le même plan d'onde.

Ainsi,  $(S_1M) = (HM)$  d'après le théorème de Malus.

### C) Interpréter l'effet du rajout d'une lame à faces parallèles sur un des trajets. *méthode*

Sans la lame d'épaisseur  $e$ , le chemin optique est  $L_1 = e$ .

Avec la lame d'épaisseur  $e$  d'indice  $n$ , le chemin optique est  $L_2 = ne$ .

La substitution de l'air ( $L_1$ ) par la lame ( $L_2$ ) introduit une différence de marche  $\Delta = (n - 1)e$  en plus dans le dispositif.

## 2. Cohérence spatiale

### D) Elargissement spatial de la source primaire *méthode*

Deux sources primaires n'interfèrent pas. Aussi, pour éviter le brouillage, il faut que la différence d'ordre d'interférence soit  $|\Delta p| < 1/2$ .

## 3. Cohérence temporelle

### E) Interférences en lumière polychromatique *méthode*

Il s'agit d'appliquer la formule de Fresnel pour chacune des longueurs d'ondes

$$I(\lambda) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta + \varphi_{sup}\right)$$

puis de sommer l'intensité relative à chaque longueur d'onde :

soit de façon discrète si le spectre est discret :  $I = \sum_{k=1}^N I(\lambda_k)$ ,

soit de façon continue si le spectre est continu :  $I = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} I(\lambda) d\lambda$ .

### F) Elargissement spectral de la source *méthode*

Le brouillage du fait de l'élargissement spectral intervient si la différence d'ordre d'interférence est  $|\Delta p| > 1/2$ . On parle alors de "blanc d'ordre supérieur".  
Il y a une cannelure dans le spectre à la longueur d'onde  $\lambda$  s'il y a interférence destructive pour  $\lambda$ .

## III- Exercices

### 1. Calculs de chemins optiques et de différences de marche

#### 1.1) Calcul de chemin optique dans le cas d'une lentille

Soient  $A$  et  $A'$  deux points sur l'axe d'une lentille d'épaisseur  $e$  d'indice  $n$  de focale  $f'$ , de centre  $O$ . On connaît  $\overline{OA}$ .

- 1) Déterminer le chemin optique  $(AA')$ .
- 2) En déduire  $(AH)$ , si  $H$  est un point sur la lentille à une distance  $h$  de l'axe, du côté de  $A'$ .

1)  $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'}$ , donc  $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot f'}{f' + \overline{OA}}$ . Ainsi,  $AA' = \overline{AA'} = -\overline{OA} + \frac{\overline{OA} \cdot f'}{f' + \overline{OA}} = -\frac{\overline{OA}^2}{f' + \overline{OA}}$ . Le chemin optique est :  $(AA') = AA' - e + n.e$ , soit

$$(AA') = -\frac{\overline{OA}^2}{f' + \overline{OA}} + (n-1).e$$

2)  $(AH) + (HA') = (AA')$ , donc  $(AH) = (AA') - (HA')$ . Or  $(HA') = HA' = \sqrt{h^2 + \overline{OA'}^2}$  d'après Pythagore. Donc, comme  $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot f'}{f' + \overline{OA}}$ ,

$$(AH) = -\frac{\overline{OA}^2}{f' + \overline{OA}} + (n-1).e - \sqrt{h^2 + \left(\frac{\overline{OA} \cdot f'}{f' + \overline{OA}}\right)^2}$$

#### 1.2) Calcul de chemin optique dans le cas d'un foyer

Soit  $F$  le foyer objet d'une lentille d'épaisseur  $e$  d'indice  $n$  de focale  $f'$ , de centre  $O$ .

- 1) Déterminer le chemin optique  $(AB)$ , où  $B$  est accolé à la lentille, sur l'axe de la lentille, côté image.
- 2) Même question pour  $C$ , accolé à la lentille, à une distance  $h$  de l'axe de la lentille, côté image.

1)  $(AB) = f' + n.e$ .

2)  $C$  sont sur le même plan d'onde, donc  $(AB) = (AC) = f' + n.e$ .

#### 1.3) Calcul de chemin optique dans le cas d'un miroir plan

Soit  $A$  un point ayant pour symétrique  $A'$  par rapport à un miroir plan  $M$ .

- 1) Déterminer le chemin optique  $(AP)$ , où  $P$  est un point atteint par la lumière après réflexion sur  $M$ .

$(AP) = A'P$ .

#### 1.4) Le pêcheur et le poisson

Un pêcheur ( $H$ ), dont les yeux sont à  $HS = 1,20m$  au dessus de l'eau (d'indice  $n = 1,33$ ), regarde verticalement un poisson  $P$  situé à  $SP = 0,60m$  au dessous de l'eau.

- 1) A quelle distance  $d_1$  le pêcheur voit-il le poisson ?
- 2) A quelle distance  $d_2$  le poisson voit-il le pêcheur ?

On pose :  $P'$  la position de l'image du poisson vue par l'homme, et  $H'$  la position de l'image de l'homme vue par le poisson.

1)  $d_1 = HP'$ , avec  $\frac{HP'}{1} = \frac{HS}{1} + \frac{SP}{n}$ , soit

$$d_1 = HS + \frac{SP}{n} = 1,65m$$

2)  $d_2 = PH'$ , avec  $\frac{PH'}{n} = \frac{PS}{n} + \frac{SH}{1}$ , soit

$$d_2 = PS + n.SH = 2,20m$$

### 1.5) Limitation du taux de transfert d'une fibre optique

Une impulsion lumineuse de courte durée envoyée dans une fibre optique d'indice  $n = 1,5$  subit un élargissement temporel lorsqu'elle ressort de celle-ci. Ceci limite rapidement le taux maximal de transfert d'informations à grande distance. En effet, les rayons lumineux d'inclinaisons différentes n'ont pas le même chemin à parcourir dans la fibre, donc leur temps de parcours est variable.

1) Calculer la différence de temps  $\Delta t$  mis par deux rayons lumineux se propageant dans une fibre optique de longueur  $L = 10km$ , l'un sur l'axe de la fibre et l'autre incliné de  $\theta = 20^\circ$  par rapport à celui-ci.

2) Quel nombre d'informations  $N$  peut transférer une telle fibre par unité de temps ?

1) Rayon sur l'axe : distance  $l_1$ , temps de parcours  $t_1 = \frac{l_1}{c}$ .

Rayon incliné : distance  $l_2$ , temps de parcours  $t_2 = \frac{l_2}{c}$ .

Géométriquement,  $\cos \theta = \frac{l_1}{l_2}$ , soit  $\Delta t = t_2 - t_1$ , en prenant  $l_1 = L$ . Soit :

$$\Delta t = \frac{n.L}{c} \left( \frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) = 3,2\mu s$$

2) On doit éloigner deux "bips" de  $\Delta t$  au moins, donc la fréquence des bips doit être  $f < N = \frac{1}{\Delta t}$ , soit

$$N = \frac{c}{n.L. \left( \frac{1}{\cos \theta} - 1 \right)} = 0,31MHz$$

### 1.6) Calcul de chemin optique dans le cas des trous de Young à distance finie

On s'intéresse à deux sources qui sont à une distance  $a = S_1S_2$ , l'une de l'autre sur l'axe  $Ox$ . Ainsi, leurs coordonnées sont  $S_1 \left(-\frac{a}{2}, 0, 0\right)$  et  $S_2 \left(+\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ .

Le plan d'observation est le plan  $z = D$ ,  $D$  est donc la distance des sources à l'écran. Un point d'observation  $M$  a pour coordonnées  $(x, y, D)$ .

Le milieu de propagation est l'air d'indice  $n = 1$ .

1) Déterminer le chemin optique  $(S_1M)$ .

2) En déduire  $(S_2M)$ .

3) Que vaut la différence de chemin optique  $\Delta = (S_1M) - (S_2M)$  ?

1)  $(S_1M) = \sqrt{\overrightarrow{S_1M}^2}$ . En remplaçant par les coordonnées précédemment données,

$$(S_1M) = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$$

soit :

$$(S_1M) = D. \left[ \left( 1 + \left( \frac{x + \frac{a}{2}}{D} \right)^2 + \left( \frac{y}{D} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

On fait un développement limité à l'ordre 2 en  $\frac{x}{D}$ ,  $\frac{y}{D}$  et  $\frac{a}{D}$  :

$$(S_1M) = D. \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + x.a + \frac{a^2}{4} + y^2}{D^2} \right) \right]$$

2)

$$(S_2M) = D \cdot \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 - x \cdot a + \frac{a^2}{4} + y^2}{D^2} \right) \right]$$

3)

$$\Delta \approx \frac{x \cdot a}{D}$$

### 1.7) Calcul de chemin optique dans le cas des trous de Young à distance infinie

On s'intéresse à deux sources qui sont à une distance  $a = S_1S_2$ , l'une de l'autre sur l'axe  $Ox$ . Ainsi, leurs coordonnées sont  $S_1(-\frac{a}{2}, 0, 0)$  et  $S_2(+\frac{a}{2}, 0, 0)$ .

Le plan d'observation est le plan focal d'une lentille convergente de focale  $f'$ . Un point d'observation  $M$  a pour coordonnées  $(x, y, D)$ .

Le milieu de propagation est l'air d'indice  $n = 1$ .

1) Que vaut la différence de chemin optique  $\Delta = (S_1M) - (S_2M)$  ?

1) La lentille conjugue le point  $M$  avec l'infini dans la direction qui fait un angle  $\alpha$  avec l'axe optique. Aussi,  $S_1$  et  $H$  sont dans le même plan d'onde :  $(S_1M) = (HM)$ . La différence de marche est

$$\Delta = (S_1M) - (S_2M) = -S_2H$$

D'autre part,  $S_2H = S_1S_2 \cdot \sin \alpha \approx a \cdot \alpha = \frac{a \cdot x}{f'}$ . Donc

$$\Delta = -\frac{a \cdot x}{f'}$$

### 1.8) Calcul de chemin optique dans le cas du réseau

On s'intéresse à une onde plane issue de  $S$  à l'infini faisant un angle  $\alpha_i$  avec l'axe  $Oz$ . L'onde est incidente sur un plan orthogonal à  $Oz$  contenant deux trous qui sont à une distance  $a = S_1S_2$ , l'un de l'autre sur l'axe  $Ox$ . On observe l'onde plane émergente qui fait un angle  $\alpha_e$  avec l'axe  $Oz$  en  $M$ , à l'infini.

Le milieu de propagation est l'air d'indice  $n = 1$ .

1) Que vaut la différence de chemin optique  $\Delta = (SS_1M) - (SS_2M)$  ?

1) La lentille conjugue le point  $M$  avec l'infini dans la direction qui fait un angle  $\alpha$  avec l'axe optique. Aussi,  $S_1$  et  $H$  sont dans le même plan d'onde :  $(S_1M) = (HM)$ . La différence de marche est

$$\Delta = (SS_1) + (S_1M) - [(SH) + (HS_2) + (S_2J) + (JM)]$$

où  $H$  est dans le même plan d'onde incident que  $S_1$  :  $(SS_1) = (SH)$ .

Et  $J$  est dans le même plan d'onde que  $S_2$  :  $(S_1M) = (JM)$ .

D'autre part,  $S_2H = -S_1S_2 \cdot \sin \alpha_i \approx -a \cdot \alpha_i$  et  $S_2J = S_1S_2 \cdot \sin \alpha_e \approx a \cdot \alpha_e$ . Donc

$$\Delta = a \cdot (\alpha_e - \alpha_i)$$

### 1.9) Différence de marche en lame d'air

On s'intéresse aux deux miroirs parallèles distants de  $e$ , le premier miroir traversé par la lumière réfléchissent une partie de celle-ci, et laissant passer l'autre partie. On repère la position sur l'écran à partir du foyer  $F'$  avec le rayon  $r$ . Si la focale de la lentille est  $f'$ ,  $\theta = \frac{r}{f'}$  est l'angle que font les rayons qui vont interférer avec l'axe optique. Montrer que la différence de marche en  $r$  vaut  $\Delta = 2 \cdot e \cdot \cos \theta$ .

La différence de marche vaut  $\Delta = 2 \cdot e \cdot \cos \theta = 2 \cdot e \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right)$  où  $\theta = \frac{r}{f'}$  est l'angle que font les rayons qui vont interférer avec l'axe optique.

### 1.10) Déplacement des franges

Un système de fentes d'Young  $F_1$  et  $F_2$  (parallèles à  $Ox$ ), éloignées de  $a = 1,0\text{mm}$  suivant  $Oy$  est éclairé par une lampe à vapeur de sodium de longueur d'onde  $\lambda = 589\text{nm}$ . On observe les interférences sur un écran à une distance  $D = 1,2\text{m}$  de  $F_1$  et  $F_2$ .

1) Calculer l'interfrange  $i$ .

2) On place devant  $F_1$  une lame mince de verre d'indice  $n = 1,5$  et d'épaisseur  $e = 5,0\mu\text{m}$ . Calculer le décalage  $\Delta y$  des franges.

1) L'interfrange est  $i = \frac{\lambda \cdot D}{a}$  soit  $i = 0,71\text{mm}$

2) La différence de marche varie en un point de  $\delta\Delta = (n-1) \cdot e$ , qui correspond à un déphasage  $\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot \delta\Delta}{\lambda}$ , lui-même correspondant à un décalage  $\Delta y$  tel que  $\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot \Delta y}{i}$ . Soit

$$\Delta y = \frac{i \cdot (n-1) \cdot e}{\lambda} = \frac{(n-1) \cdot e \cdot D}{a} = 3,0\text{mm}$$

### 1.11) Mesure de l'indice d'un gaz

On éclaire un montage de fentes de Young  $S_1$  et  $S_2$  avec une lampe à vapeur de sodium de longueur d'onde  $\lambda = 589\text{nm}$  placée derrière une fente d'éclairage  $S$ .

On intercale sur le trajet de la lumière après  $S_2$  une cuve transparente de longueur intérieure  $l = 10\text{cm}$ .

On place un écran parallèlement à  $S_1S_2$ , à une distance grande devant  $S_1S_2$ .

Initialement la cuve est pleine d'air.

1) Que visualise-t-on dans le champ de recouvrement des faisceaux ?

Grâce à une pompe, on fait le vide dans la cuve. En un point  $M$  de l'écran on voit lors de l'opération défiler  $n_1$  franges.

2) Exprimer  $n_1$  en fonction de  $l$ ,  $\lambda$  et l'indice de l'air  $n_{air}$ .

On remplit maintenant la cuve par du gaz ammoniac  $NH_3$ . Le déplacement total des franges (par rapport à l'état où la cuve était remplie d'air) est de  $n_2 = 17$  franges.

3) Déterminer la différence  $\Delta n$  des indices de l'air ( $n_{air}$ ) et de l'ammoniac ( $n_{NH_3}$ ). Application numérique.

1) On visualise des franges rectilignes, perpendiculaires à  $(S_1S_2)$ .

2) En un point  $M$ , la différence de marche était  $\Delta_0 = cste + l \cdot n_{air}$ . Elle devient  $\Delta_1 = cste + l$ . La différence des ordres d'interférence est :  $n_1 = \frac{l}{\lambda} (n_{air} - 1)$ .

3)  $n_2 = \frac{l}{\lambda} (n_{NH_3} - n_{air}) = 17 \Rightarrow \Delta n = 17 \frac{\lambda}{l} = 1,0 \cdot 10^{-4}$ .

## 2. Cohérence spatiale

### 2.12) Etude de la cohérence spatiale

Considérons deux points sources primaires très proches :  $S$  et  $S_0$ . On admet que tous les rayons lumineux qui passent par la voie 1 (respectivement la voie 2) d'un interféromètre passent par  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ).  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont des vecteurs normés dans les directions de  $S_1$  et  $S_2$  :  $\vec{u}_1 = \frac{\vec{S_0S_1}}{S_0S_1}$  et  $\vec{u}_2 = \frac{\vec{S_0S_2}}{S_0S_2}$ .

On appelle  $\delta\Delta = (SS_1 - SS_2) - (S_0S_1 - S_0S_2)$  la différence de différence de marche entre les deux points sources pour aller en  $M$  suivant les deux voies de l'interféromètre.

1) Montrer que

$$|\delta\Delta| \approx \left| \overrightarrow{SS_0} \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \right| \ll \lambda$$

pour que les interférences ne soient pas brouillées.

$SS_1 = \sqrt{(\overrightarrow{SS_0} + \overrightarrow{S_0S_1})^2}$ . Donc  $SS_1 = S_0S_1 \cdot \left( 1 + 2 \cdot \overrightarrow{SS_0} \cdot \vec{u}_1 + \left( \frac{SS_0}{S_0S_1} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ . Un développement limité au premier ordre donne :  $SS_1 \approx S_0S_1 \cdot \left( 1 + \overrightarrow{SS_0} \cdot \vec{u}_1 \right)$ . De la même façon,  $SS_2 \approx S_0S_2 \cdot \left( 1 + \overrightarrow{SS_0} \cdot \vec{u}_2 \right)$ .

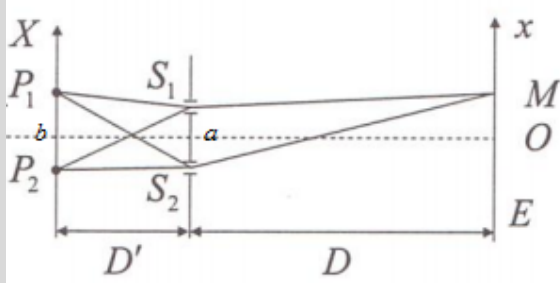
Pour que  $S$  et  $S_0$  donnent le même terme d'interférence, il faut que  $\Delta\varphi(S, M) \approx \Delta\varphi(S_0, M) \Leftrightarrow \frac{2\pi \Delta(S)}{\lambda} \approx \frac{2\pi \Delta(S_0)}{\lambda}$ , soit :  $\left| \frac{2\pi \delta\Delta}{\lambda} \right| \ll 2\pi$ , une condition approximative de non brouillage des interférences sur  $\delta\Delta$  est

donc :  $|\delta\Delta| \ll \lambda$ . Donc :

$$|\delta\Delta| \approx \left| \overrightarrow{SS_0} \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \right| \ll \lambda$$

pour que les interférences ne soient pas brouillées.

### 2.13) Cohérence spatiale avec deux points source primaires



On s'intéresse à un interféromètre avec deux trous de Young  $S_1$  et  $S_2$  éloignés d'une distance  $a$ , placés à une distance  $D$  d'un écran. On éclaire ce dispositif par deux points sources  $P_1$  et  $P_2$  éloignés d'une distance  $b$ , placés à une distance  $D'$  des trous de Young, ces deux points délivrant un rayonnement monochromatique de même longueur d'onde  $\lambda_0$  et de même intensité.

1) Calculer la différence de marche  $\delta_1$  relative au point source  $P_1$ . Faire de même pour  $\delta_2$  relative au point source  $P_2$ .

2) Calculer l'intensité résultante en un point  $M$  de l'écran. On donne

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

3) Calculer le contraste des interférences. En déduire la largeur  $b$  pour laquelle le brouillage des interférences apparaît.

1) Les différences de marches sont

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (P_1 S_1 M) - (P_1 S_2 M) = (P_1 S_1 + S_1 M) - (P_1 S_2 + S_2 M) \\ \delta_1 &= \left( \sqrt{D'^2 + \left( \frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right)^2} + \sqrt{D^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2} \right) - \left( \sqrt{D'^2 + \left( \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \right)^2} + \sqrt{D^2 + \left( x + \frac{a}{2} \right)^2} \right) \\ \delta_1 &= D' \left[ \left( 1 + \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{4D'^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( 1 + \frac{b^2 + a^2 + 2ab}{4D'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + D \left[ \left( 1 + \frac{2x^2 + a^2 - 4ax}{4D^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( 1 + \frac{2x^2 + a^2 + 4ax}{4D^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \delta_1 &\approx D' \left[ \frac{-ab}{2D'^2} - \frac{ab}{2D'^2} \right] + D \left[ \frac{-2ax}{4D^2} - \frac{2ax}{4D^2} \right] = \frac{-ab}{2D'} - \frac{ax}{D} \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\delta_2 = \frac{+ab}{2D'} - \frac{ax}{D}$$

2) L'intensité résultante en un point  $M$  de l'écran est la somme des deux intensités (deux points sources différents n'interfèrent pas) :

$$I = I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_1 \right) \right) + I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_2 \right) \right) = I_0 \left( 2 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_1 \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_2 \right) \right)$$

Grâce à la formule trigo,

$$I = 2 I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \right) \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \right) \right) = 2 I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D} \right) \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ab}{2D'} \right) \right)$$

3) Donc le contraste des interférences est

$$C = \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ab}{2D'} \right)$$

Le brouillage des interférences apparaît si  $C = 0 \Leftrightarrow$

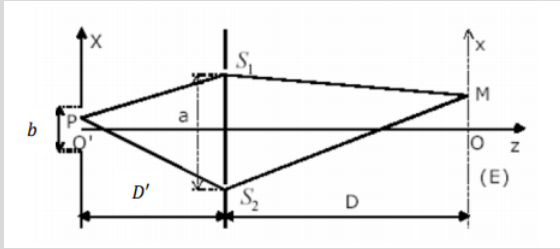
$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ab}{2D'} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Aussi, la largeur  $b$  pour laquelle le brouillage des interférences apparaît est telle que :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ab}{2D'} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{D' \lambda_0}{2a}$$



### 2.14) Cohérence spatiale avec une fente source d'éclairage



On s'intéresse à un interféromètre avec deux trous de Young  $S_1$  et  $S_2$  éloignés d'une distance  $a$ , placés à une distance  $D$  d'un écran. On éclaire ce dispositif par une fente source de largeur  $b$ , placée à une distance  $D'$  des trous de Young, chacun des points de la fente source délivrant un rayonnement monochromatique de même longueur d'onde  $\lambda_0$  et de même intensité.

- 1) Calculer la différence de marche relative à un point source  $P$  d'abscisse  $X$ .
- 2) Calculer l'intensité résultante en un point  $M$  de l'écran. On donne

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$$

- 3) Calculer le contraste des interférences. En déduire la largeur  $b$  pour laquelle le brouillage des interférences apparaît.
- 4) Retrouver ce dernier résultat grâce au critère de brouillage.

- 1) La différence de marche est

$$\begin{aligned} \delta &= (PS_1M) - (PS_2M) = (PS_1 + S_1M) - (PS_2 + S_2M) \\ \delta &= \left( \sqrt{D'^2 + \left(X - \frac{a}{2}\right)^2} + \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \right) - \left( \sqrt{D'^2 + \left(X + \frac{a}{2}\right)^2} + \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} \right) \\ \delta_1 &= D' \left[ \left( 1 + \frac{4X^2 + a^2 - 4aX}{4D'^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( 1 + \frac{b^2 + a^2 + 2ab}{4D'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + D \left[ \left( 1 + \frac{4X^2 + a^2 + 4aX}{4D^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( 1 + \frac{2x^2 + a^2 + 4ax}{4D^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \delta &\approx D' \left[ \frac{-2aX}{4D'^2} - \frac{2aX}{4D'^2} \right] + D \left[ \frac{-2ax}{4D^2} - \frac{2ax}{4D^2} \right] = \frac{-aX}{D'} - \frac{ax}{D} \end{aligned}$$

- 2) L'intensité résultante en un point  $M$  de l'écran est la somme des intensités (deux points sources différents n'interfèrent pas) :

$$I = \int_{X=-\frac{b}{2}}^{X=+\frac{b}{2}} I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left( \frac{X}{D'} + \frac{x}{D} \right) \right) \right) dX$$

L'intégration donne :

$$\begin{aligned} I &= I_0 \left( b + \left[ \frac{\lambda_0 D'}{2\pi a} \sin \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left( \frac{X}{D'} + \frac{x}{D} \right) \right) \right]_{X=-\frac{b}{2}}^{X=+\frac{b}{2}} \right) \\ I &= b I_0 \left( 1 + \frac{\lambda_0 D'}{2\pi a b} \left[ \sin \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left( \frac{b}{2D'} + \frac{x}{D} \right) \right) - \sin \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left( \frac{-b}{2D'} + \frac{x}{D} \right) \right) \right] \right) \end{aligned}$$

Grâce à la formule trigo,

$$I = b I_0 \left( 1 + \frac{\lambda_0 D'}{\pi a b} \sin \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \frac{b}{2D'} \right) \cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \frac{x}{D} \right) \right)$$

- 3) Donc le contraste des interférences est

$$C = \frac{\lambda_0 D'}{\pi a b} \sin \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \frac{b}{2D'} \right) = \text{sinc} \left( \frac{\pi a b}{\lambda_0 D'} \right)$$

Le brouillage des interférences apparaît si  $C = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\pi a b}{\lambda_0 D'} = k \pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^*$$

Aussi, la largeur  $b$  pour laquelle le brouillage des interférences apparaît est telle que :

$$\frac{\pi a b}{\lambda_0 D'} = \pi \Rightarrow b = \frac{\lambda_0 D'}{a}$$

4) Le critère semi-quantitatif de brouillage des franges est le suivant :  $|\Delta p| > 1/2$  (où  $|\Delta p|$  est évalué sur la moitié de l'étendue spatiale de la source).

Ici, la moitié de l'étendue spatiale de la source est  $\frac{b}{2}$ .

Comme

$$\delta = \frac{-aX}{D'} - \frac{ax}{D} \Rightarrow p = \frac{-aX}{\lambda_0 D'} - \frac{\lambda_0 ax}{D}$$

Donc

$$|\Delta p| = \frac{ab}{2\lambda_0 D'} = \frac{1}{2}$$

pour le brouillage. On trouve donc

$$b = \frac{\lambda_0 D'}{a}$$

(cqfd).

### 3. Cohérence temporelle

#### 3.15) Train d'onde

On s'intéresse à une source lumineuse qui envoie un rayonnement sinusoïdal pendant la durée  $\Delta t$ , supposée parfaitement connue. On compte  $N$  périodes avec une incertitude sur ce décompte de  $\Delta N \approx 1$ .

- 1) Quelle est la fréquence  $\nu$  et la longueur d'onde  $\lambda$  du signal en fonction de  $c$ ,  $\Delta t$  et  $N$ ?
- 2) Exprimer les incertitudes  $\Delta\nu$  sur la fréquence et  $\Delta\lambda$  sur la longueur d'onde en fonction de  $c$ ,  $\Delta t$  et  $N$ .
- 3) Quelle est la longueur de cohérence  $l_c$  des trains d'onde?
- 4) Trouver une relation liant l'incertitude  $\Delta E$  sur l'énergie des photons envoyés par la source et la durée d'émission  $\Delta t$ .
- 5) Applications numériques : la longueur d'onde est  $\lambda = 500nm$  exprimer  $N$ ,  $l_c$  et  $\Delta\lambda$  si
  - 5.a)  $\Delta t = 1ns$ ;
  - 5.b)  $\Delta t = 1ps$ ;
  - 5.c)  $\Delta t = 10fs$ .

- 1)  $\nu = \frac{N}{\Delta t}$  et  $\lambda = \frac{c \cdot \Delta t}{N}$ .
- 2)  $\Delta\nu \approx \frac{1}{\Delta t}$  et  $\Delta\lambda \approx \frac{c \cdot \Delta t}{N^2}$ .
- 3)  $l_c = c \cdot \Delta t$ .
- 4)  $E = h \cdot \nu \Rightarrow \Delta E \cdot \Delta t \approx h$  (qui est la relation de Heisenberg).
- 5) Applications numériques :
  - 5.a) Si  $\Delta t = 1ns$ ,  $N = 6,0 \cdot 10^5$ ,  $l_c = 0,30m$  et  $\Delta\lambda = 8,3 \cdot 10^{-13}m$ .
  - 5.b) Si  $\Delta t = 1ps$ ,  $N = 6,0 \cdot 10^2$ ,  $l_c = 0,30mm$  et  $\Delta\lambda = 0,83nm$ .
  - 5.c) Si  $\Delta t = 10fs$ ,  $N = 6,0$ ,  $l_c = 3,0\mu m$  et  $\Delta\lambda = 83nm$ .

#### 3.16) Filtre interférentiel

On s'intéresse à une source blanche avec un filtre interférentiel dans le vert.

- 1) Calculer la longueur de cohérence temporelle de cette source de largeur  $\Delta\lambda = 10nm$  autour de la longueur d'onde  $\lambda = 546nm$ .

- 1)  $l_c = c \cdot \tau = \frac{c}{\Delta\nu}$  avec  $\lambda \cdot \nu = c$ , soit  $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ . Donc  $\Delta\nu = \frac{c \cdot \Delta\lambda}{\lambda^2}$ . Donc :

$$l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 30\mu m$$

#### 3.17) Trois façons de voir le brouillage dû à la non monochromaticité

Un interféromètre de Michelson est éclairé avec une source lumineuse non monochromatique, dont le spectre, de largeur  $\Delta\lambda$ , est centré autour de  $\lambda \gg \Delta\lambda$ .

- 1) Exprimer, grâce au critère de brouillage, la différence de marche maximale  $\delta_{max}$  pour que les interférences soient visibles.

- 2) Exprimer la longueur de cohérence temporelle  $\ell_c$  de cette source. En déduire la différence de marche maximale  $\delta_{max}$  pour que les interférences soient visibles.
- 3) Estimer le nombre de cannelures  $N$  dans le spectre. En déduire la différence de marche maximale  $\delta_{max}$  pour que les interférences soient visibles.

1) Le brouillage du fait de l'élargissement spectral intervient si la différence d'ordre d'interférence est  $|\Delta p| > 1/2$ . Or

$$p = \frac{\delta}{\lambda}$$

Il faut évaluer cela sur la moitié de la largeur spectrale de la source :

$$p_{min} = \frac{\delta}{\lambda_{max}} = \frac{\delta}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{\delta}{\lambda} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{2\lambda}\right)$$

De même,

$$p_{max} = \frac{\delta}{\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{\delta}{\lambda} \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{2\lambda}\right)$$

Le critère de brouillage donne donc

$$|\Delta p| = \frac{\delta}{\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} < 1/2 \Rightarrow \delta_{max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

2) La longueur de cohérence temporelle est

$$\ell_c = c\tau = c \frac{1}{\Delta\nu}$$

Or  $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \Rightarrow$

$$\ell_c = c \frac{\lambda}{\Delta\lambda\nu} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

Donc  $\delta_{max} = \ell_c \Rightarrow |\delta| < \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$  pour que les interférences soient visibles.

3) Il y a une cannelure si

$$\delta = \left(p + \frac{1}{2}\right) \lambda \text{ avec } p \in \mathbb{Z}$$

Donc  $N$  est le nombre d'entiers  $p$  dans le spectre  $[\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}; \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}]$ . Or

$$p_{min} = \frac{\delta}{\lambda_{max}} - \frac{1}{2} = \frac{\delta}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}} - \frac{1}{2} \approx \frac{\delta}{\lambda} \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{2\lambda}\right) - \frac{1}{2}$$

De même,

$$p_{max} = \frac{\delta}{\lambda_{min}} - \frac{1}{2} = \frac{\delta}{\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}} - \frac{1}{2} \approx \frac{\delta}{\lambda} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{2\lambda}\right) - \frac{1}{2}$$

Donc

$$N \approx \frac{\delta}{\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

Il ne faut "pas trop" de cannelures pour éviter le blanc d'ordre supérieur donc

$$N < 2 \Leftrightarrow \delta < \frac{2\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

#### 4. Techniques mathématiques - Calculs de moyennes

##### 4.18) Moyenne d'une fonction sinusoïdale au carré grâce aux complexes

1) Calculer  $\langle \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) \rangle$  en utilisant les complexes.

- 1) On pose  $s_1(t) = \Re(\tilde{s}_1)$  avec  $\tilde{s}_1 = e^{j(\frac{2\pi}{T}t + \alpha)}$ , alors, comme

$$\langle s_1 s_1 \rangle_\tau = \frac{1}{2} \Re(\tilde{s}_1 \tilde{s}_1^*) = \frac{1}{2} |\tilde{s}_1|^2 \Rightarrow \langle \cos^2 \left( \frac{2\pi}{T}t + \alpha \right) \rangle_\tau = \frac{1}{2}$$

#### 4.19) Moyenne d'un produit de fonctions sinusoïdales en quadrature de phase

- 1) Calculer  $\langle \cos(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \alpha) \rangle$  en utilisant la formule trigonométrique

$$\sin \theta \cos \varphi = \frac{\sin(\theta - \varphi) + \sin(\theta + \varphi)}{2}$$

- 1) Comme  $\sin \theta \cos \varphi = \frac{\sin(\theta - \varphi) + \sin(\theta + \varphi)}{2}$ ,

$$\cos(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \alpha) = \frac{\sin(0) + \sin(2\omega t + 2\alpha)}{2}$$

donc

$$\langle \cos(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \alpha) \rangle = \frac{\langle 0 \rangle + \langle \sin(2\omega t + 2\alpha) \rangle}{2} = 0$$

#### 4.20) Moyenne d'un produit de fonctions sinusoïdales en quadrature de phase grâce aux complexes

- 1) Calculer  $\langle \cos(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \alpha) \rangle$  en utilisant les complexes.

- 1) On pose  $s_1(t) = \Re(\tilde{s}_1)$  avec  $\tilde{s}_1 = e^{j(\omega t + \alpha)}$ , et  $s_2(t) = \Re(\tilde{s}_2)$  avec  $\tilde{s}_2 = e^{j(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2})}$ , alors, comme

$$\langle s_1 s_2 \rangle_\tau = \frac{1}{2} \Re(\tilde{s}_1 \tilde{s}_2^*) = \frac{1}{2} \Re(e^{j\frac{\pi}{2}}) \Rightarrow \langle \cos(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \alpha) \rangle = 0$$

#### 4.21) Moyenne d'un produit de fonctions sinusoïdales déphasées

- 1) Calculer  $\langle \cos(\omega t) \cos(\omega t + \alpha) \rangle$  en utilisant la formule trigonométrique

$$\cos \theta \cos \varphi = \frac{\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)}{2}$$

- 1) Comme  $\cos \theta \cos \varphi = \frac{\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)}{2}$ ,

$$\cos(\omega t) \cos(\omega t + \alpha) = \frac{\cos(-\alpha) + \cos(2\omega t + \alpha)}{2}$$

donc

$$\langle \cos(\omega t) \cos(\omega t + \alpha) \rangle = \frac{\langle \cos(-\alpha) \rangle + \langle \cos(2\omega t + \alpha) \rangle}{2} = \frac{1}{2} \cos \alpha$$

#### 4.22) Moyenne d'un produit de fonctions sinusoïdales déphasées grâce aux complexes

- 1) Calculer  $\langle \cos(\omega t) \cos(\omega t + \alpha) \rangle$  en utilisant les complexes.

- 1) On pose  $s_1(t) = \Re(\tilde{s}_1)$  avec  $\tilde{s}_1 = e^{j\omega t}$ , et  $s_2(t) = \Re(\tilde{s}_2)$  avec  $\tilde{s}_2 = e^{j(\omega t + \alpha)}$ , alors, comme

$$\langle s_1 s_2 \rangle_\tau = \frac{1}{2} \Re(\tilde{s}_1 \tilde{s}_2^*) = \frac{1}{2} \Re(e^{-j\alpha}) \Rightarrow \langle \cos(\omega t) \cos(\omega t + \alpha) \rangle = \frac{1}{2} \cos \alpha$$

# Travaux dirigés

vendredi 15 décembre 2017

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

## L'épaisseur des verres de lunettes

Extraits de

«<http://www.lunettes-experoptic.fr/verres-lunettes.htm>»

### De quoi dépend l'épaisseur des lunettes ?

Lors du choix d'une paire de lunettes, l'épaisseur des verres de lunettes est un critère majeur. Des verres épais sont esthétiquement peu avantageux et surtout plus lourds.

L'épaisseur dépend de :

- La puissance de la correction
- L'indice du matériau
- La sculpture du verre

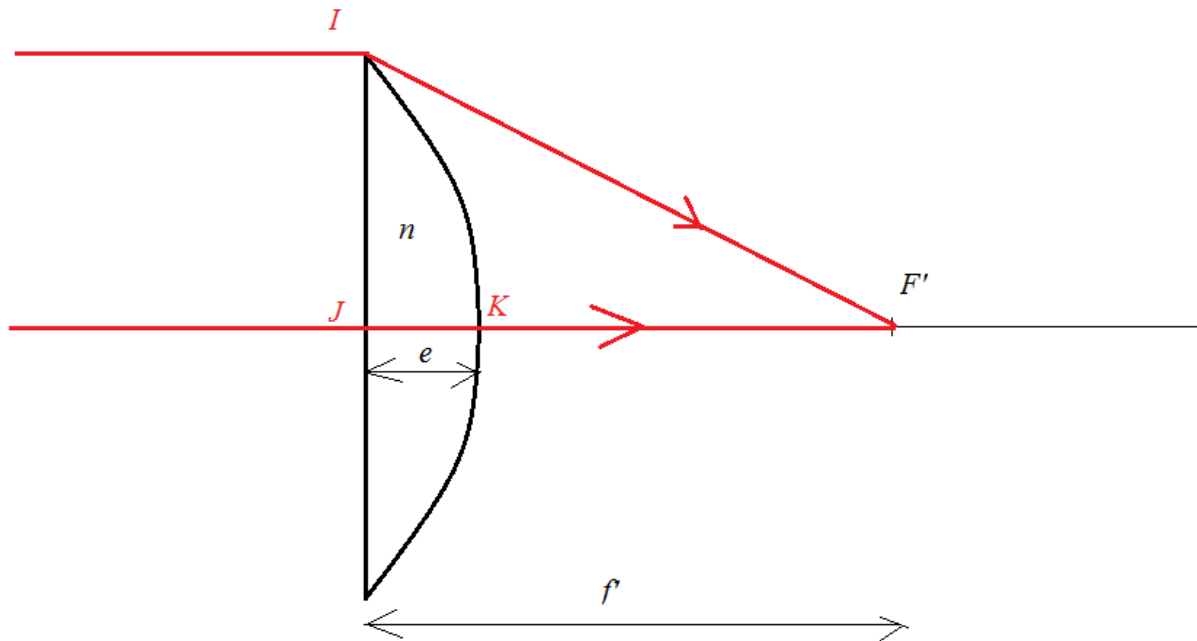
L'indice évalue la capacité du matériau à "tordre" les rayons lumineux. A correction égale, plus l'indice sera élevé et plus le verre correcteur sera fin. Nos verres Standards sont des verres d'indice 1,5



## Enoncé

Evaluer l'épaisseur d'une lentille convergente de diamètre 6 cm et de focale 40 cm.

## Correction



Les point  $I$  et  $J$  sont sur le même plan d'onde. Le stigmatisme impose :

$$(IF') = (JKF')$$

or  $JF' = f'$  et  $JK = e$  donc  $KF' = f' - e$  ainsi

$$(JKF') = nJK + KF' = (n - 1)e + f'$$

D'autre part, l'application du théorème de Pythagore dans le triangle  $IF'J$  rectangle en  $J$  donne :

$$IF' = \sqrt{IJ^2 + JF'^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + f'^2} \Rightarrow (IF') = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + f'^2} \approx f' \left(1 + \frac{d^2}{8f'^2}\right)$$

Donc

$$(n - 1)e + f' \approx f' \left(1 + \frac{d^2}{8}\right)$$

$\Rightarrow$

$$e = \frac{d^2}{8(n - 1)f'} = \frac{0,06^2}{8 \times (1,5 - 1) \times 0,4} = 2,3 \text{ mm}$$

ce qui semble être un bon ordre de grandeur.

# Devoir non surveillé

vendredi 15 décembre 2017

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

## "Son et lumière "

de Bernard Valeur - édité chez Belin

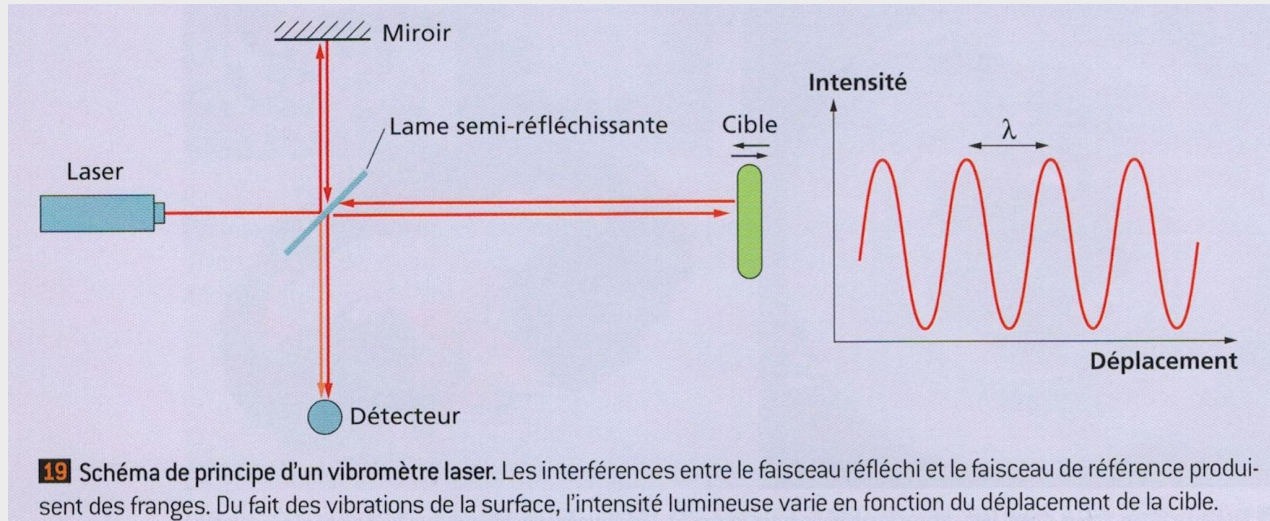
### La vibrométrie laser

Il existe une technique d'évaluation des vibrations d'une surface à distance sans contact : c'est la vibrométrie laser. Un de ses avantages majeurs est la possibilité d'analyser des vibrations (en particulier sonores ou ultrasonores) de grande amplitude (jusqu'à plusieurs mètres). Cette méthode met à profit l'interférométrie, d'un grand intérêt pour la mesure très précise de distances.

Le principe de mesure d'un vibromètre laser est fondé sur l'effet Doppler. Quand un faisceau lumineux issu d'une source (un laser) est réfléchi par une cible animée d'un mouvement de vibration, la fréquence de la lumière réfléchi apparaît augmentée lorsque la cible se déplace vers la source de lumière, et au contraire diminuée lorsqu'elle s'en éloigne. Le décalage en fréquence (dû à l'effet Doppler) est directement proportionnel à la vitesse de déplacement de la cible dans l'axe du faisceau laser. Puisqu'il est impossible de mesurer directement ce décalage, la fréquence de la lumière étant extrêmement élevée ( $4,74 \times 10^{14}$  Hz pour un laser hélium-néon de longueur d'onde 632,8 nm), il faut faire appel à l'interférométrie.

La vibrométrie laser permet de déterminer à la fois la vitesse et le déplacement d'un point d'une surface avec une excellente précision. En outre, la gamme d'amplitude de déformation de la surface s'étend d'une fraction de nanomètre ( $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ) à plusieurs mètres. Le domaine de fréquences de vibration accessibles s'étend jusqu'à environ 30 MHz. Enfin, les vitesses de déplacement se situent dans la gamme 50 nm/s - 10 m/s.

### Comment fonctionne un vibromètre laser



Dans un vibromètre laser, c'est un interféromètre qui assure la mesure du décalage en fréquence de la lumière réfléchi par une surface vibrante en un point donné. Comme dans la méthode holographique, le faisceau laser est divisé en deux parties grâce à une lame semi-réfléchissante : d'une part le faisceau de référence dirigé directement vers un détecteur, et d'autre part le faisceau de mesure qui pointe vers la surface étudiée. Mais contrairement à l'interférométrie holographique qui analyse l'ensemble d'une surface, ici c'est la lumière réfléchi en un point de cette dernière qui est renvoyée vers le détecteur (Fig. 19 gauche), de sorte que le faisceau réfléchi et le faisceau de référence se superposent et interfèrent.

En absence de vibration de l'objet, si la différence de trajet entre le faisceau réfléchi et le faisceau de référence est telle que les oscillations sont en phase, les interférences de ces faisceaux sont constructives ; au contraire, si les oscillations sont en opposition de phase, les interférences sont destructives : les deux faisceaux s'annihilent.

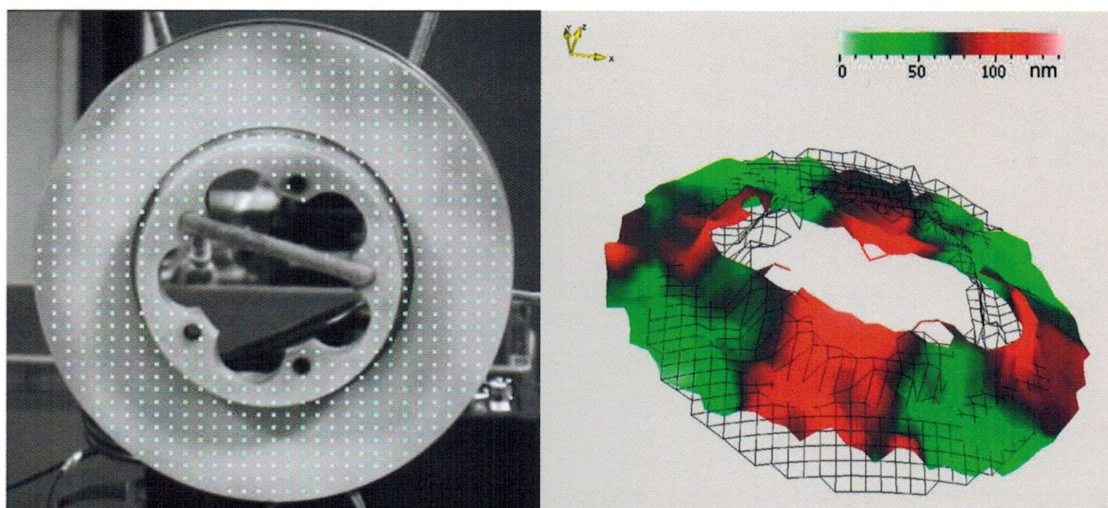
Que se passe-t-il maintenant si l'objet vibre ? La différence de trajet parcouru  $\Delta L$  entre le faisceau réfléchi et le faisceau de référence évolue périodiquement au cours du temps, et il en est de même du déphasage  $\Delta\phi$  entre les deux faisceaux, lié à  $\Delta L$  par la relation :  $\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta L}{\lambda}$ . Cette modulation de phase résultant de la vibration

périodique de la surface se traduit par une évolution de l'intensité de la lumière en fonction du déplacement (Fig. 19 droite) (Notez l'analogie avec un réseau de franges d'interférence). Le passage d'un maximum d'intensité à un minimum correspond à un déplacement de la surface égal à la moitié de la longueur d'onde de la lumière. Pour un laser hélium-néon (de longueur d'onde  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ ), ce déplacement est de  $316 \text{ nm}$ , soit  $0,316 \mu\text{m}$  à peine !

En outre, par rapport à une surface immobile, il apparaît un décalage en fréquence par effet Doppler. Ce décalage est proportionnel à la vitesse de l'objet : plus précisément, il est égal à  $\frac{2v}{\lambda}$ , où  $v$  est la vitesse de l'objet et  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière. Comme cette vitesse varie périodiquement au cours du temps, il en est de même de la fréquence.

En résumé, les vibrations de la surface provoquent une modulation de la phase du faisceau laser réfléchi, et concomitamment une modulation de sa fréquence. Ce faisceau réfléchi est superposé au faisceau de référence au niveau du détecteur. Le traitement du signal issu de ce dernier permet de déterminer la vitesse et le déplacement du point visé sur la surface de la cible. Cependant, il n'est pas possible avec ce système de déterminer dans quel sens se déplace l'objet. En effet, que l'objet s'éloigne de l'interféromètre ou qu'il s'en approche, le décalage en fréquence dû à l'effet Doppler est le même pour une vitesse donnée. Pour connaître la direction du mouvement, on place un modulateur acousto-optique (une «cellule de Bragg») dans le faisceau de référence. La lumière est ainsi modulée à une certaine fréquence, par exemple  $40 \text{ MHz}$  (qu'il faut comparer avec la fréquence intrinsèque de la lumière à la longueur d'onde de  $632,8 \text{ nm}$  qui est de  $4,74 \times 10^8 \text{ MHz}$ ). Lorsque l'objet est au repos, la fréquence de modulation du réseau de franges d'interférences est donc de  $40 \text{ MHz}$ . Si l'objet s'approche de l'interféromètre, le détecteur reçoit un signal de fréquence inférieure à  $40 \text{ MHz}$ , et inversement, la fréquence est supérieure à  $40 \text{ MHz}$  s'il s'en éloigne. Il est ainsi possible de déterminer non seulement l'amplitude du mouvement, mais aussi son sens.

### Les applications de la vibrométrie



**18** Disque d'un frein dont les vibrations en chaque point (indiqués en blanc sur la photo de gauche) sont analysées par vibrométrie laser à la fréquence de  $2\,234 \text{ hertz}$ . La figure de droite montre les déformations du disque, avec en noir le maillage de la pièce en position statique. Il est ainsi possible de localiser l'origine du crissement des freins. (Clichés Ph. Eblé, société Bosch.)

La vibrométrie laser est couramment employée dans l'industrie pour l'analyse des vibrations des pièces mécaniques, en particulier dans l'industrie automobile et en aéronautique. C'est un outil de choix pour assurer en ligne le contrôle-qualité de pièces mécaniques sur des chaînes de production. Un défaut de fabrication se traduit en effet souvent par des vibrations anormales.

La méthode présente l'avantage de pouvoir d'explorer l'ensemble d'une surface en vibration, par un simple balayage du faisceau laser. En outre, il est possible de caractériser des vibrations en trois dimensions (grâce à des vibromètres 3D) en faisant converger trois faisceaux laser en un même point. Dans le domaine sonore, la vibrométrie laser sert par exemple à caractériser le crissement de freins à disque (Fig. 18), ainsi que les vibrations de la membrane des haut-parleurs.

Avec la vibrométrie laser, le domaine des fréquences de vibrations mesurables est très étendu (jusqu'à  $30 \text{ MHz}$ ) et leur amplitude maximale très grande (plusieurs mètres). La mesure est ponctuelle mais peut être étendue par balayage, qui reste rapide uniquement si l'on travaille à une seule fréquence.



## Enoncé

### 1) Généralités

On s'intéresse à un interféromètre de Michelson réglé "en lame d'air". L'interféromètre est éclairé par un laser hélium-néon de longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ , en incidence normale. Un des deux miroirs est fixe, l'autre est en mouvement, c'est la "cible" repérée par l'abscisse  $x(t)$ , orientée dans le sens de propagation de la lumière issue du laser (cf. figure 19). Le détecteur délivre une tension  $u$  proportionnelle à la puissance électromagnétique moyenne reçue, et donc à l'éclairement reçu, pour utiliser un terme d'optique ondulatoire.

**1.a)** Calculer la fréquence  $f_0$  du laser. Vérifier que les valeurs numériques données par le document sont cohérentes.

**1.b)** Exprimer  $u$  en fonction de  $\Delta\phi$  le déphasage "entre les deux faisceaux" qui interfèrent.

**1.c)** Exprimer  $\Delta\phi$  en fonction de  $f_0$ ,  $c$  et  $\Delta L$ , "la différence de trajet parcouru  $\Delta L$  entre le faisceau réfléchi" (par la cible) et "le faisceau de référence" (réfléchi par le miroir fixe).

**1.d)** En absence de vibration de l'objet,  $x = 0$  et la différence de marche est notée  $\Delta L_0$ . Interpréter le fait que la tension mesurée est forte ou faible.

### 2) Cible vibrante

On considère maintenant que la position de la cible varie au cours du temps :  $x(t)$ .

**2.a)** Exprimer  $\Delta L$ , "la différence de trajet parcouru  $\Delta L$  entre le faisceau réfléchi" (par la cible) et "le faisceau de référence" (réfléchi par le miroir fixe), en fonction de  $x(t)$  et  $\Delta L_0$ .

**2.b)** Pourquoi le signal évolue-t-il dans le temps ?

**2.c)** On suppose que le signal recueilli par le détecteur varie sinusoïdalement. Montrer que la fréquence de ce signal reçu  $f$  vérifie :

$$\frac{d\Delta\phi(t)}{dt} = 2\pi f$$

On suppose que le signal recueilli par le détecteur varie (pas nécessairement sinusoïdalement), mais avec une fréquence instantanée qui suit la relation précédente.

**2.d)** Déterminer l'expression de la fréquence instantanée  $f(t)$  en fonction de la vitesse  $v = \dot{x}$  de la cible, de  $c$  et  $f_0$ . Vérifier que c'est cohérent avec le document.

### 3) Mesures

**3.a)** On suppose que la cible se déplace de  $x_1$  à  $x_2$ , où  $\Delta x = |x_2 - x_1|$  est supérieure à la longueur d'onde. En se servant du document, proposer une méthode de traitement du signal qui permet d'accéder à  $\Delta x$ .

**3.b)** On suppose maintenant que la cible vibre autour de  $x = 0$  avec une amplitude  $x_0$  très inférieure à la longueur d'onde :  $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ . Linéariser l'expression de  $u(t)$ . A quelle grandeur donne accès la mesure de la tension efficace de  $u(t)$  (voltmètre branché en mode "AC") ? Conclusion.

## Correction

### 1) Généralités

#### 1.a)

/1 La fréquence du laser est  $f_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{632,8 \times 10^{-9}} = 4,74 \times 10^{14}$  Hz, comme écrit dans le document.

#### 1.b)

/1 D'après la formule de Fresnel, l'éclairement reçu par le détecteur s'écrit :

$$I = I_0 (1 + \cos(\Delta\phi))$$

Comme "le détecteur délivre une tension proportionnelle à la puissance électromagnétique moyenne reçue, et donc à l'éclairement reçu, pour utiliser un terme d'optique ondulatoire",  $u = u_0 (1 + \cos(\Delta\phi))$ ,  $u_0$  est une constante.

#### 1.c)

/1 Comme "le déphasage  $\Delta\phi$  entre les deux faisceaux, lié à  $\Delta L$  par la relation :  $\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta L}{\lambda}$ ",  $\Delta\phi = 2\pi \frac{f_0 \Delta L}{c}$ .

#### 1.d)

/1 "En absence de vibration de l'objet, si la différence de trajet entre le faisceau réfléchi et le faisceau de référence est telle que les oscillations sont en phase ( $\Delta\phi = 2k\pi$  avec  $k$  entier), les interférences de ces faisceaux sont constructives; au contraire, si les oscillations sont en opposition de phase ( $\Delta\phi = (2k+1)\pi$  avec  $k$  entier), les interférences sont destructives : les deux faisceaux s'annihilent."

### 2) Cible vibrante

#### 2.a)

/1 On a évidemment  $\Delta L = \Delta L_0 + 2x(t)$ .

#### 2.b)

/1 "Si l'objet vibre, la différence de trajet parcouru  $\Delta L$  entre le faisceau réfléchi et le faisceau de référence évolue au cours du temps, et il en est de même du déphasage  $\Delta\phi$  entre les deux faisceaux, lié à  $\Delta L$  par la relation :  $\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta L}{\lambda}$ . Cette modulation de phase résultant de la vibration périodique de la surface se traduit par une évolution de l'intensité de la lumière en fonction du déplacement", et donc du signal.

#### 2.c)

/1 Pour un signal variant sinusoïdalement,

$$u = u_0 (1 + \cos(\Delta\phi(t))) = u_0 (1 + \cos(2\pi f t + \alpha))$$

où  $f$  est la fréquence du signal reçu. On peut donc définir la fréquence instantanée  $f$  telle que

$$\frac{d\Delta\phi(t)}{dt} = 2\pi f$$

(cqfd)

#### 2.d)

/1 Dans le cas où la cible bouge,

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta L}{\lambda} = \frac{2\pi(\Delta L_0 + 2x(t))}{\lambda}$$

cela donne :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Delta\phi(t)}{dt} = \frac{2v}{\lambda}$$

soit  $f(t) = \frac{2v}{\lambda}$ .

/1 C'est cohérent avec le document : "par rapport à une surface immobile, il apparaît un décalage en fréquence par effet Doppler. Ce décalage est proportionnel à la vitesse de l'objet : plus précisément, il est égal à  $\frac{2v}{\lambda}$ , où  $v$  est la vitesse de l'objet et  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière."

On reconnaît là l'expression du décalage fréquentiel dû à l'effet Doppler. L'étude de l'éclairement en sortie de l'interféromètre permet d'avoir accès à la vitesse de la cible.

### 3) Mesures

#### 3.a) Déplacement avec $\Delta x > \lambda$ .

/1 Comme "le passage d'un maximum d'intensité à un minimum correspond à un déplacement de la surface égal à la moitié de la longueur d'onde de la lumière", il suffit donc de compter le nombre  $N$  de maxima de  $u$ , et on en déduit  $\Delta x = N\lambda$ !

#### 3.b) Vibration avec une amplitude $x_0 \ll \lambda$ .

/1 En linéarisant l'expression

$$u(t) = u_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi (\Delta L_0 + 2x(t))}{\lambda} \right) \right) = u_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi (\Delta L_0 + 2x_0 \cos(\omega t))}{\lambda} \right) \right)$$

cela devient :

$$u(t) = u_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi \Delta L_0}{\lambda} \right) - \sin \left( \frac{2\pi \Delta L_0}{\lambda} \right) \frac{2\pi 2x_0 \cos(\omega t)}{\lambda} \right)$$

/1 Le signal délivré par le récepteur contient donc une composante continue et une composante sinusoïdale dont l'amplitude est proportionnelle à celle de la cible.

L'amplitude de la composante sinusoïdale du signal délivré par le détecteur peut être mesurée à l'aide d'un voltmètre en mode AC, qui donne accès à

$$u_{eff} = u_0 \sin \left( \frac{2\pi \Delta L_0}{\lambda} \right) \frac{2\pi 2x_0}{\sqrt{2}\lambda}$$

On a donc une mesure de l'amplitude  $x_0$  de la vibration.