

Corrigé du DS commun de physique n°9 - quantique

I- Niveaux d'énergie du système

1)

/1 Pour un phénomène physique donné, la physique classique constitue une approximation valable de la physique quantique uniquement si toutes les grandeurs physiques du type « action » (en J·s) sont très grandes par rapport à \hbar . Il s'agit donc de créer une grandeur A du type « action » (en J·s) et en faire une estimation numérique. Si $A \gg \hbar$, le phénomène physique ne mérite pas de traitement quantique.

/1 On peut par exemple poser $A = \|\vec{OM} \wedge m\vec{v}\| = dm v = dm \left(\frac{E}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$. Soit $A = E^{\frac{1}{2}} dm^{\frac{1}{2}}$.

/1 AN : $A = (10 \times 1,6 \times 10^{-19})^{\frac{1}{2}} \times 10^{-10} \times (10^{-30})^{\frac{1}{2}} = 10^{-34}$ J·s. Comme $A \approx \hbar$, le traitement d'un électron dans un atome doit être quantique.

2)

/1 La probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$ à l'instant t est $|\tilde{\psi}(x, t)|^2 dx$.

/1 Elle doit donc être normée : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\psi}(x, t)|^2 dx = 1 \quad \forall t$.

/1 La fonction d'onde intervenant en module, elle est fixée à une phase près : $\tilde{\psi}(x, t)$ et $\tilde{\psi}(x, t) e^{i\alpha}$ donnent les mêmes résultats.

3)

/1 On utilise la méthode de séparation des variables : en injectant la fonction d'onde sous la forme $\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{\varphi}(x) \tilde{\chi}(t)$ dans l'équation de Schrödinger on trouve :

$$i \hbar \tilde{\varphi}(x) \frac{\partial \tilde{\chi}(t)}{\partial t} = \tilde{\chi}(t) \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \tilde{\varphi}(x) \Rightarrow i \hbar \frac{\tilde{\chi}'}{\tilde{\chi}} = \frac{\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \tilde{\varphi}(x)}{dx^2} + V(x) \tilde{\varphi}(x) \right]}{\tilde{\varphi}(x)}$$

Comme on a deux fonctions, l'une de t , l'autre de x , il s'agit d'une constante, notons la E .

/1 E a les unités de V : c'est une énergie, en joules.

/1 $\tilde{\chi}(t) = e^{-i\omega t}$ est solution de :

$$i \hbar \frac{\tilde{\chi}'}{\tilde{\chi}} = i \hbar \frac{-i\omega \tilde{\chi}}{\tilde{\chi}} = \hbar\omega$$

On a donc $E = \hbar\omega$.

4)

/1 $\tilde{\varphi}(x) = 0$ en $x = 0$ et $x = \ell$.

5)

/1 L'équation de Schrödinger "stationnaire" suivie par $\tilde{\varphi}(x)$ est

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \tilde{\varphi}}{dx^2} = E \tilde{\varphi} \Rightarrow \frac{d^2 \tilde{\varphi}}{dx^2} + k^2 \tilde{\varphi} = 0$$

avec $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. La forme des solutions est donc sinusoïdale : $\tilde{\varphi}(x) = A \cos(kx + \alpha)$

Avec la condition en $x = 0$, on en déduit $\alpha = -\frac{\pi}{2} + p\pi$, où $p \in \mathbb{Z}$ soit $\tilde{\varphi}(x) = A \sin(kx + p\pi)$.

D'autre part, la condition en $x = \ell$ donne $k\ell = n\pi$ avec n un entier.

En reprenant l'expression trouvée de k , on trouve

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \Rightarrow$$

$$E = E_n = \frac{1}{2m} \left(\frac{n\pi\hbar}{\ell}\right)^2$$

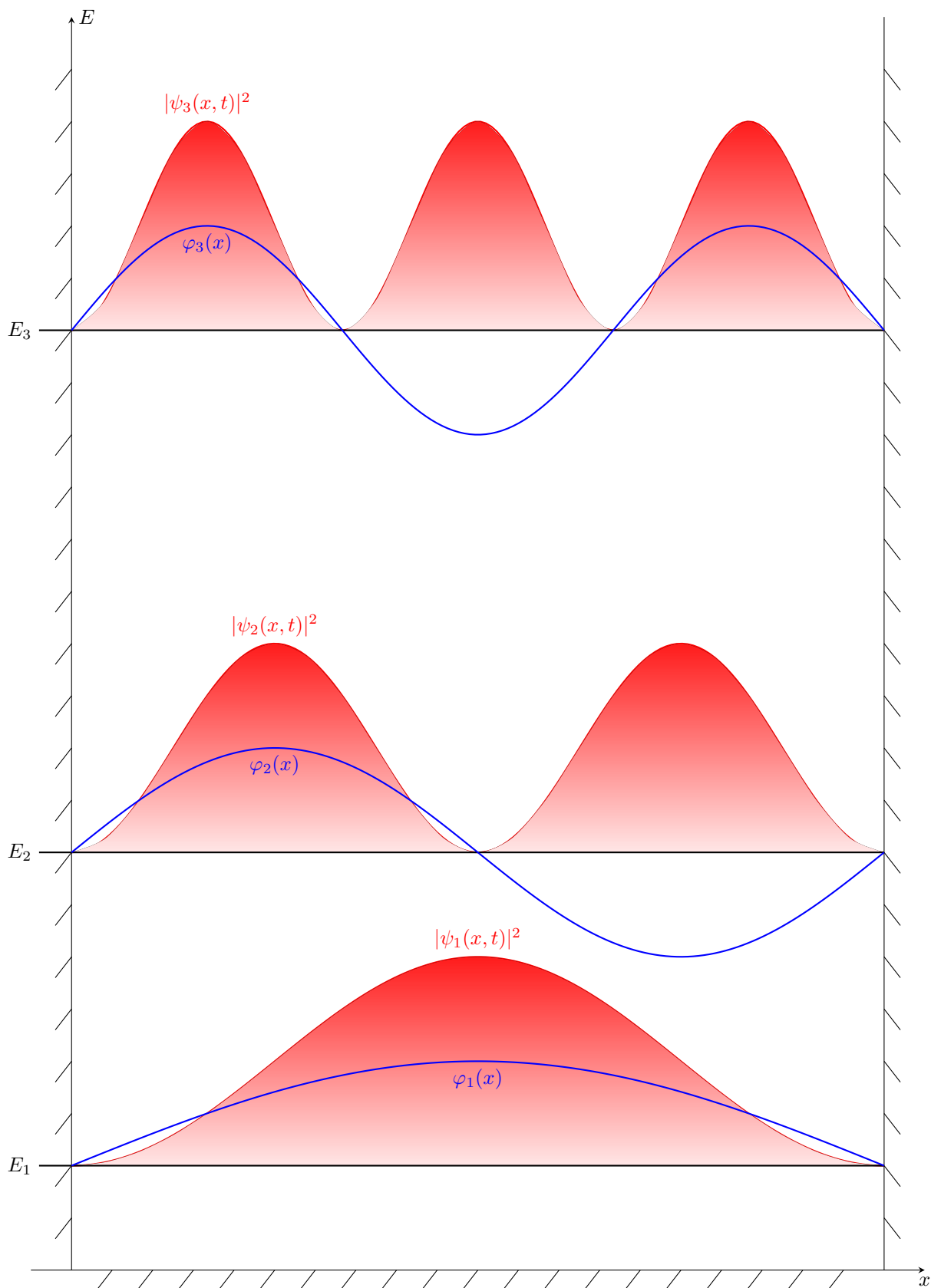
/1 La constante de normalisation A est choisie de telle sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\psi}(x, t)|^2 dx = 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^\ell |\tilde{\varphi}(x)|^2 dx = 1$$

6)

/3



7)

/1 Dans le cas d'une corde de longueur ℓ fixée à ses deux extrémités, la longueur de la corde doit correspondre à un nombre entier n de fuseaux, chaque fuseau étant de longueur $\frac{\lambda}{2}$:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \ell = n \pi \Rightarrow \ell = n \frac{\lambda}{2}$$

avec n un entier. Il y a en effet des nœuds à la fonction d'onde en $x = 0$ et $x = \ell$, comme pour la corde.

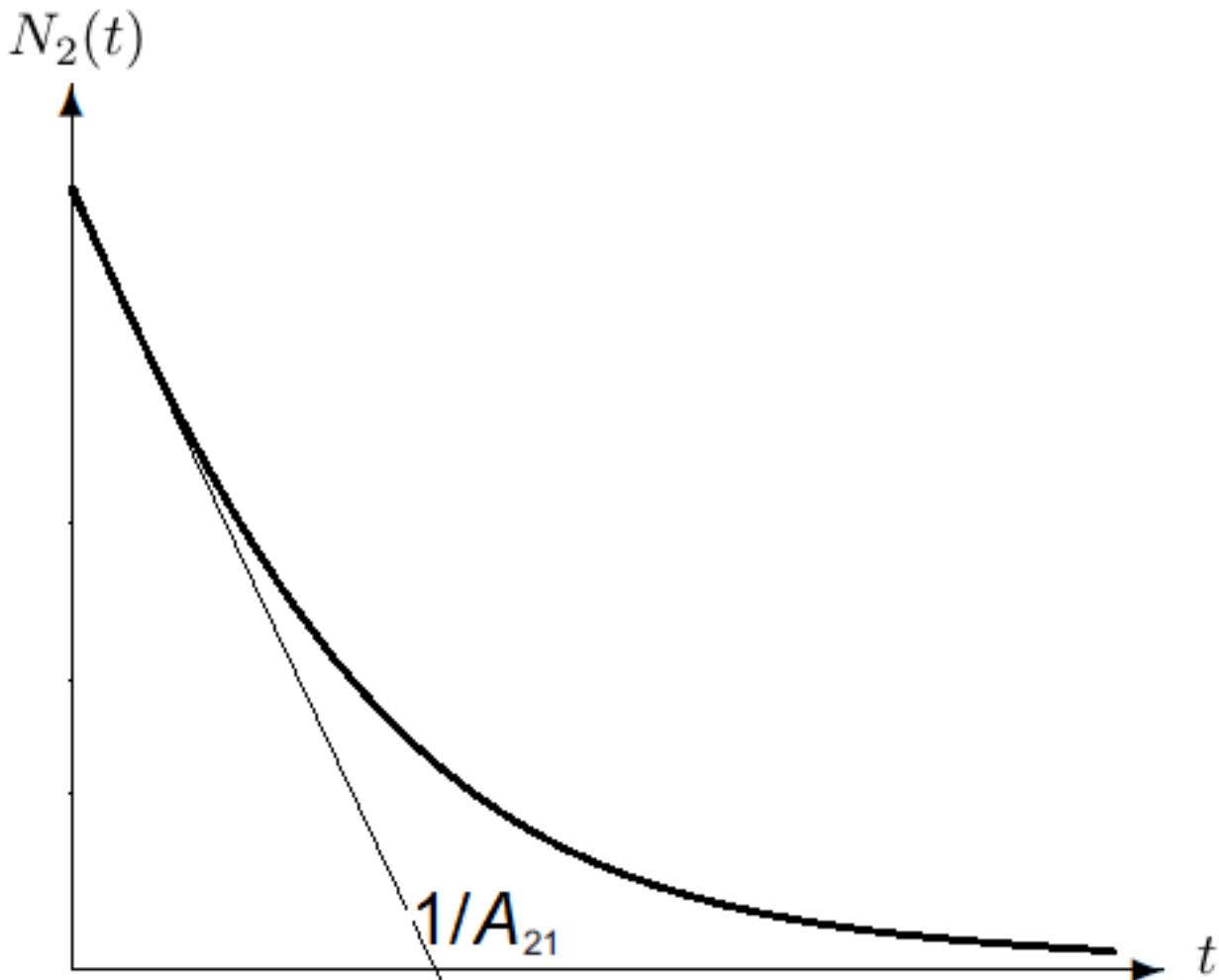
II- Etude énergétique

8)

/1 Le processus en jeu est l'émission spontanée.

/1 $\frac{dN_2}{dt} = -A_{21} N_2 \Rightarrow N_2(t) = N_i e^{-A_{21} t}$.

/2



9)

/1 Le précédent processus impose une durée de l'ordre de $\frac{1}{A_{21}}$, soit une largeur spectrale de l'ordre de $\Delta\nu \approx A_{21}$.

10)

/1 $u_\nu(\nu)$ s'exprime en $\text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$.

11)

/2 Les quatre équations d'évolution sont :

$$\begin{cases} \frac{dN_0}{dt} = -W_{pompe} N_0 + A_{10} N_1 \\ \frac{dN_1}{dt} = +W(N_2 - N_1) + A_{21} N_2 - A_{10} N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = -W(N_2 - N_1) - A_{21} N_2 + A_{32} N_3 \\ \frac{dN_3}{dt} = +W_{pompe} N_0 - A_{32} N_3 \end{cases}$$

/1 $0 = +W_{pompe} N_0 - A_{32} N_3$ permet d'éliminer N_3 : $0 = -W_{pompe} N_0 + A_{10} N_1$

de plus, $0 = +W(N_2 - N_1) + A_{21} N_2 - A_{10} N_1$

Enfin, $0 = -W(N_2 - N_1) - A_{21} N_2 + A_{32} N_3 \Rightarrow 0 = -W(N_2 - N_1) - A_{21} N_2 + W_{pompe} N_0$.

12)

/1 La désexcitation depuis le niveau 3 est très rapide, de sorte que $N_3 \approx 0$.

13)

/1 Donc $N = N_0 + N_1 + N_2 \Rightarrow N_0 = N - N_1 - N_2$.

Donc

$$A_{10} N_1 = W_{pompe} N_0 = W_{pompe} (N - N_1 - N_2) = W_{pompe} (N - 2 N_1 - (N_2 - N_1)) \Rightarrow$$

$$(A_{10} + 2 W_{pompe}) N_1 = W_{pompe} (N - (N_2 - N_1))$$

/1 D'autre part

$$W (N_2 - N_1) = -A_{21} N_2 + A_{10} N_1 = -A_{21} (N_2 - N_1) + (A_{10} - A_{21}) N_1 \Rightarrow (W + A_{21}) (N_2 - N_1) = (A_{10} - A_{21}) N_1$$

on remplace par l'expression de N_1 trouvée précédemment :

$$(W + A_{21}) (N_2 - N_1) = (A_{10} - A_{21}) \frac{W_{pompe} (N - (N_2 - N_1))}{(A_{10} + 2 W_{pompe})}$$

/1 Soit

$$(A_{10} + 2 W_{pompe}) (W + A_{21}) (N_2 - N_1) = (A_{10} - A_{21}) W_{pompe} N - (A_{10} - A_{21}) W_{pompe} (N_2 - N_1) \Rightarrow$$

$$[(A_{10} + 2 W_{pompe}) (W + A_{21}) + (A_{10} - A_{21}) W_{pompe}] (N_2 - N_1) = (A_{10} - A_{21}) W_{pompe} N$$

On trouve donc

$$\frac{N_2 - N_1}{N} = \frac{(A_{10} - A_{21}) W_{pompe}}{(A_{10} + 2 W_{pompe}) (W + A_{21}) + (A_{10} - A_{21}) W_{pompe}}$$

soit l'expression donnée :

$$\frac{N_2 - N_1}{N} = \frac{(A_{10} - A_{21}) W_{pompe}}{A_{10} (W + A_{21}) + (A_{10} + A_{21} + 2 W) W_{pompe}}$$

14)

/1 Cours d'électroma :

$$\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 \cdot c} \vec{u}_z = \frac{c \cdot B^2}{\mu_0} \vec{u}_z \Rightarrow$$

$$\vec{\pi} = c \cdot e_{em} \vec{u}_z \text{ donc } u_\nu = \frac{I_\nu}{c}.$$

15)

/1 Dans le système de section S compris entre les abscisses z et $z + dz$,

- à l'instant t , l'énergie électromagnétique pour ν comprise entre ν_0 et $\nu_0 + d\nu$ est $u_\nu(\nu_0, z, t) S dz d\nu$,
- à l'instant $t + dt$, l'énergie électromagnétique comprise entre ν_0 et $\nu_0 + d\nu$ est $u_\nu(\nu_0, z, t + dt) S dz d\nu$

Soit

$$\frac{\partial u_\nu(\nu_0, z, t)}{\partial t} S dz d\nu = \frac{\partial I_\nu(\nu_0, z, t)}{\partial t} \frac{S dz}{c} d\nu$$

Le bilan peut s'écrire

$$\frac{\partial u_\nu(\nu_0, z, t)}{\partial t} S dz d\nu = +I_\nu(\nu_0, z, t) d\nu S - I_\nu(\nu_0, z + dz, t) d\nu S + B u_\nu(\nu_0) d\nu (N_2 - N_1) h \nu_0$$

$$\frac{\partial u_\nu(\nu_0, z, t)}{\partial t} S dz = -\frac{\partial I_\nu(\nu_0, z, t)}{\partial z} S dz + B \frac{I_\nu}{c} (n_2 - n_1) S dz h \nu_0$$

/1 On obtient donc bien : $\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = \gamma I_\nu$ où $\boxed{\gamma(\nu_0) = \frac{B}{c} (n_2 - n_1) h \nu_0}$.

16)

/1 L'équation différentielle en régime permanent devient $\frac{dI_\nu}{dz} = \gamma I_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{I_\nu} = \gamma dz$ qui s'intègre en $\boxed{I_\nu(z) = I_0 e^{\gamma z}}$.

/1 Si $n_2 - n_1 > 0$ (inversion de population), $\gamma > 0$, il y a amplification de l'onde. Aussi, la population dans le niveau haut doit être plus importante que celle du niveau bas dans la transition laser.

/1 $\boxed{A_{10} - A_{21} > 0}$: le niveau 1 doit se vider plus vite que le niveau 2 (on dit que le niveau 2 est métastable).

/1 $\boxed{W_{pompe} > 0}$: il faut fournir de l'énergie au laser, par pompage.

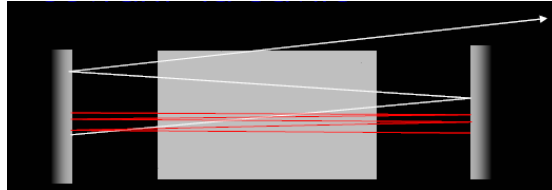
III- Etude de la cavité

17)

- /1 Il faut qu'un des deux miroirs soit imparfait ($R_2 < 1 \Rightarrow T_2 = 1 - R_2 \neq 0$)
car il faut qu'une partie de l'onde dans la cavité soit transmise à l'extérieur.

18)

- /1 Intérêt que présente la cavité sur l'amplification laser : passer plusieurs fois dans le milieu amplificateur, c'est comme avoir un milieu plus long!
/1 Intérêt que présente la cavité sur la cohérence temporelle du laser : la cavité se comporte comme un filtre (de Fabry-Pérot), qui sélectionne certains modes, comme dans la corde vibrante, donc le pic de fréquence est plus fin.
/1 Intérêt que présente la cavité sur la cohérence spatiale : sélectionner une direction bien précise.



19)

- /1 Puisque $I \propto e^{\gamma z} \propto E^2$, l'amplitude du champ électrique varie comme $e^{\frac{\gamma}{2}z}$. En ajoutant le déphasage dû à la propagation, on tombe bien sur le bon résultat.

- /1 $\boxed{E_1(z=0, t) = r_1 r_2 E_0 e^{\gamma \ell} e^{-j(\omega t - 2k\ell)}}$ après un aller-retour dans la cavité.

- /1 Généralisation à p aller-retours : $\boxed{E_p(z=0, t) = (r_1 r_2)^p E_0 e^{p\gamma \ell} e^{-j(\omega t - 2pk\ell)}}$

20)

/1

$$E(z=0, t) = \sum_{p=0}^{\infty} E_p(z=0, t) = E_0 e^{-j(\omega t)} \sum_{p=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{\gamma \ell} e^{+j2k\ell})^p = E_0 e^{-j(\omega t)} \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{\gamma \ell} e^{+j2k\ell}}$$

(cqfd)

21)

- /1 Il y a résonance si le champ est maximum, donc si le dénominateur est nul : $1 = r_1 r_2 e^{\gamma \ell} e^{+j2k\ell}$ Or, comme $r_1 r_2 > 0$,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = r_1 r_2 e^{\gamma \ell} \\ e^{+j2k\ell} = 1 \end{cases}$$

- /1 $2k\ell = 2n\pi$ où $n \in Z$ soit $\boxed{\ell = n\frac{\lambda}{2}}$ où $n \in N^*$.

/1 et

$$1 = r_1 r_2 e^{\gamma \ell} \Rightarrow 1 = R_1 R_2 e^{2\gamma \ell} = 1 \times (1 - T_2) e^{2\gamma \ell}$$

donc $\boxed{T_2 = 1 - e^{-2\gamma \ell}}$.

22)

- /1 La condition de résonance sur la longueur d'onde est la même dans le cas d'une corde fixée à ses deux extrémités et dans le cas de la particule quantique dans un puits de potentiel infini.
/1 $2k\ell = 2n\pi$ où $n \in Z$ correspond à une condition d'interférence constructive!

23)

- /1 A He-Ne-Laser with a resonator length of 30 cm ($\ell = 30$ cm) at an emission wavelength of 632.8 nm ($\lambda = 632,8$ nm). The difference in frequency of two neighbored modes is :

$$\Delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c}{\lambda_{n+1}} - \frac{c}{\lambda_n} = c \left(\frac{n+1}{2\ell} - \frac{n}{2\ell} \right) = \frac{c}{2\ell} = \frac{30 \times 10^8}{2 \times 0,30}$$

AN : $\boxed{\Delta\nu = 500 \text{ MHz}}$. (In the above example the distance between modes would be 500 MHz).

- /1 Du coup, la valeur de la largeur en fréquence d'un mode est elle-même plus petite que l'écart entre deux modes, $\boxed{\delta\nu < 500 \text{ MHz}}$.

24)

- /1 Pour une source classique (lampe à vapeur de néon), l'élargissement spectral est principalement dû à l'effet doppler, qui est bien plus grand que l'écart entre deux modes de la cavité, lui-même bien plus grand que la largeur d'un seul mode de la cavité (qui est la largeur spectrale du laser hélium-néon).

IV- Faisceau laser

25)

/1 Pour une OPPHH, $\underline{E}(z, t) = \underline{E}_0 e^{-j(\omega t - kz)}$.

/1 L'amplitude de l'onde (homogène) ne dépend pas de r , ce qui laisse entendre que le faisceau est de largeur infinie, ce qu'une simple observation dément.

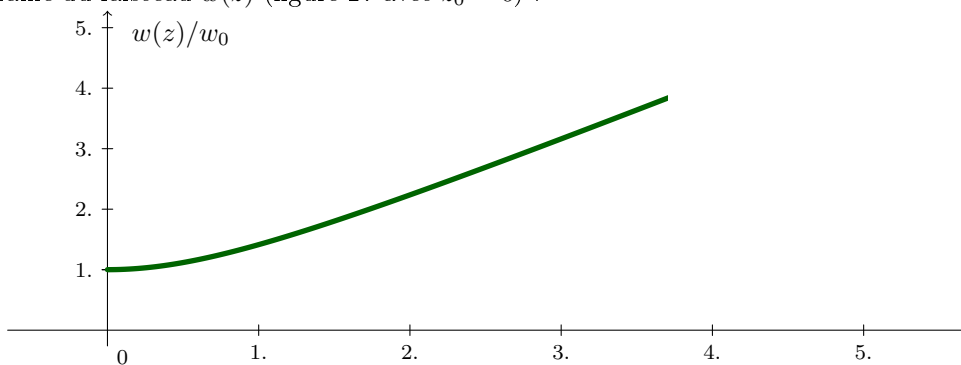
26)

/2 D'après le document :

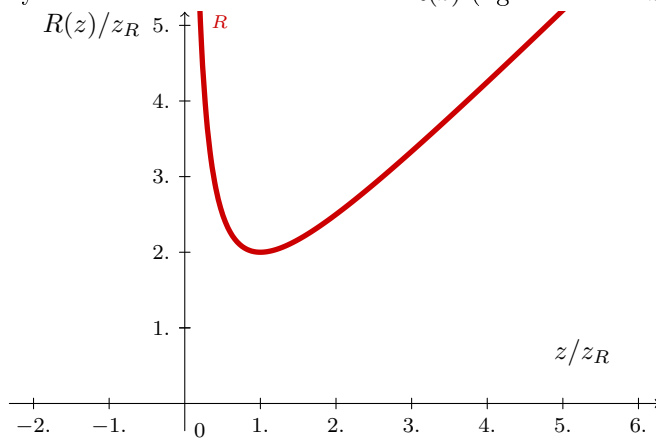
- w_0 , une constante positive appelée "waist" (plus petit rayon de la taille);
- $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$, une constante positive appelée "longueur de Rayleigh";
- le rayon (ou la taille) du faisceau $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$;
- le rayon de courbure du front d'onde $R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$.

/1 La relation qui lie ces constantes est $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$.

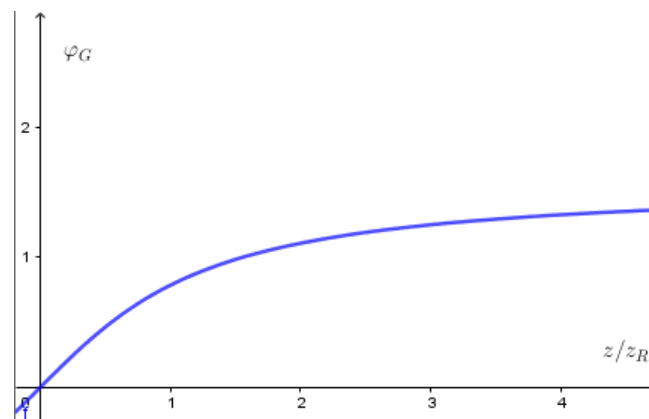
/2 Taille du faisceau $w(z)$ (figure 27 avec $z_0 = 0$) :



/2 Rayon de courbure du front d'onde $R(z)$ (figure 26 avec $z_0 = 0$) :



/3 phase de Gouy :

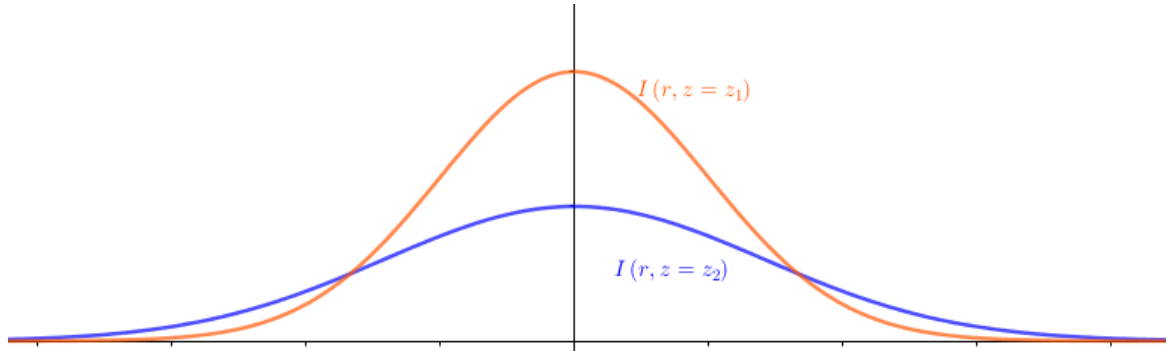


27)

/1

$$I(r, z) = \frac{1}{2} |E(r, z, t)|^2 = \frac{1}{2} |E_0|^2 \frac{w_0^2 e^{-\frac{2r^2}{w(z)^2}}}{w(z)^2} = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 e^{-\frac{2r^2}{w(z)^2}}$$

(cqfd)



/3

/2 La largeur du faisceau n'est pas infinie, elle s'élargit si z augmente, avec une intensité centrale qui décroît, comme on peut le voir en observant la tache du faisceau sur un écran.

28)

/3 Dans le domaine $|z| \ll z_R$:

- $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \Rightarrow w(z) \approx w_0$;
- $R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \approx \frac{z_R^2}{z} \Rightarrow R(z) \rightarrow \infty$;
- $\tan \varphi_G(z) = \frac{z}{z_R} \approx 0 \Rightarrow \varphi_G(z) \approx 0$.

/2 On peut parler d'onde plane dans un cylindre.

29)

/3 Dans le domaine $|z| \gg z_R$:

- $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \approx w_0 \sqrt{\frac{z^2}{z_R^2}} \Rightarrow w(z) \approx w_0 \frac{z}{z_R}$;
- $R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \approx z$;
- $\tan \varphi_G(z) = \frac{z}{z_R} \approx \infty \Rightarrow \varphi_G(z) \approx \frac{\pi}{2}$.

/2 On peut parler d'onde sphérique dans un cône (d'angle θ).

30)

/1 La divergence du faisceau $\theta(z)$ est telle que $\tan \theta(z) = \frac{w(z)}{z}$ soit $\tan \theta(z) = w_0 \sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z_R^2}} \approx w_0 \sqrt{1 + \frac{1}{z_R^2}} \Rightarrow$

$$\theta(z) \approx \text{atan} \left(\frac{w_0}{z_R} \right) \left(= \frac{\lambda}{\pi w_0} \right).$$

/1 Ceci est cohérent avec les lois de la diffraction selon lesquelles $\sin \theta(z) \approx \frac{\lambda}{w_0}$.

31)

/1 Un faisceau de particule (photon) monodirectionnel suivant Oz vérifie $\Delta p_x = 0$ car $p_x = \hbar k_x = 0$. L'inégalité de Heisenberg spatiale impose donc $\Delta x \rightarrow \infty$.

Mais si $\Delta x \approx d$ (à cause du waist), alors l'inégalité de Heisenberg spatiale impose $\Delta p_x = \hbar \Delta k_x \geq \frac{\hbar}{2d}$. Donc le faisceau est diffracté avec un angle

$$\theta = \frac{k_x}{k_z} \approx \frac{1}{2d} \frac{\hbar}{\hbar k} \approx \frac{\lambda}{2d}$$

où λ est la longueur d'onde de de Broglie associée à la particule quantique.

32)

/2 Il y a

- en $z = 0$, un miroir de courbure infini, donc $R(z = 0) = z + \frac{z_R^2}{z} \rightarrow \infty$;
- en $z = \ell$, un miroir de rayon de courbure $R_c = R(z = \ell) = \ell + \frac{z_R^2}{\ell}$.

La dernière relation donne

$$\frac{z_R^2}{\ell} = R_c - \ell \Rightarrow z_R = \sqrt{\ell (R_c - \ell)}$$

(cqfd)

33)

$$/1 \quad z_R = \sqrt{0,30 \times (10 - 0,30)} \Rightarrow \boxed{z_R = 93 \text{ cm}}.$$

$$/1 \quad \text{Comme } z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad w_0 = \sqrt{\frac{0,93 \times 632,8 \times 10^{-9}}{\pi}} \Rightarrow \boxed{w_0 = 0,45 \text{ mm}}.$$

$$/1 \quad \text{Enfin } \theta \approx \frac{0,45 \times 10^{-3}}{0,93} \Rightarrow \boxed{\theta = 0,48 \text{ mrad} = 1'40''}.$$

34)

$$/1 \quad \text{En } z = 10 \text{ cm} \ll z_R, \text{ on est dans le cas de l'onde plane dans un cylindre, } \boxed{w(z) \approx w_0 = 0,45 \text{ mm}}.$$

$$/1 \quad \text{En } z = 0,10 \text{ km} \gg z_R, \text{ on est dans le cas de l'onde sphérique dans un cône (d'angle } \theta), \boxed{w(z) \approx w_0 \frac{z}{z_R} = 4,8 \text{ cm}}.$$