

Problème 1 LE COUP DE Foudre

I Echauffement : Etude d'un condensateur sphérique.

1) Par tout point M on peut faire passer deux plans de symétrie électriques diamétraux, donc $\vec{E} = E\vec{u}_r$ donc $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

Par invariance $E_r(r, \theta, \varphi) = E_r(r)$.

On applique le théorème de Gauss avec une surface sphérique de rayon r : $\oiint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$$\text{soit } \oiint_S E(r) \cdot dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{soit } \boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r}$$

2) $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}(r) = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$ donc $dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$ et $\int_{V_1}^{V_2} dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{et} \quad \boxed{U = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$$

3) On a $C = \frac{Q}{U}$ soit $\boxed{C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$

4) Les lignes de courants sont orientées dans le sens des potentiels décroissants donc elles sont radiales et issues de l'armature positive, ici l'armature intérieure, vers l'armature extérieure.

II Analyse du condensateur terrestre

5) a) $C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ avec $R_1 = R$ le rayon terrestre et $R_2 = R + h$ donc $C = \frac{4\pi\epsilon_0 R(R+h)}{h}$

b) Avec $h \ll R$ $\boxed{C \approx \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{h}}$ La capacité d'un condensateur plan est $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ avec S la surface commune des armatures et e la distance entre les armatures.

La capacité trouvée est celle d'un condensateur plan d'armatures de surface $S = 4\pi R^2$ distantes de h .

c) AN : $\boxed{C = 56 \text{ mF}}$

6) En prenant le modèle simplifié d'un condensateur plan, le champ électrique entre les armatures est donné

par $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ soit $\boxed{E = 1,2 \cdot 10^2 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}}$. On retrouve l'ordre de grandeur proposé (100 à 120 $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$)

7) L'énergie électrique est donnée par $W_{elec} = \frac{1}{2} C U^2$ avec $U = Eh$ soit $W_{elec} = \frac{1}{2} C (Eh)^2$

Avec un champ électrique de l'ordre de 100 à 120 $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$, on obtient W_{elec} de l'ordre de 1800 GJ à 2600 GJ.

On retient une valeur moyenne de $\boxed{W_{elec} \approx 2300 \text{ GJ}}$

8) Par beau temps, le champ électrique est dirigé vers le sol, par temps nuageux, il est dirigé vers le haut.

- 9) a) La foudre est une décharge électrique ou claquage entre deux régions d'un nuage ou entre un nuage et la Terre. L'éclair est le phénomène lumineux qui l'accompagne.
- 10) Avec un champ critique de l'ordre de 20 kV.m^{-1} , atteint quand le nuage est au plus bas à $d=2 \text{ km}$ du sol, il vient $U = Ed$ soit U de l'ordre de 40 MV

11) $W_{\text{foudre}} = UI\Delta t$ soit $W_{\text{foudre}} = 20 \text{ GJ}$

Cette énergie est a priori difficilement récupérable ;

- La foudre est un phénomène aléatoire, dans le temps et dans l'espace : une installation localisée aurait peu de chance d'être rentable.
- L'énergie d'un coup de foudre est finalement assez faible : une centrale nucléaire de 1 GW fournit la même énergie en une vingtaine de secondes.
- Il faudrait concevoir un dispositif pouvant supporter 50000 A
- Il faudrait disposer d'un dispositif permettant de stocker une grande quantité d'énergie.
- Ce dispositif devrait être très réactif car l'énergie arrive en 10 ms .

Dans le film *Retour vers le futur*, Doc prétend que la foudre peut fournir plus d'énergie que le plutonium pour faire démarrer sa DeLorean, et voyager dans le temps...

Dans le roman de Mircea Eliade, *Le temps d'un centenaire*, un vieillard frappé par la foudre rajeunit et développe une hypermnésie...

Ces faits ne sont pas avérés scientifiquement... !

III Coup de foudre sur une ligne électrique

Aspect dynamique

- 12) Les inductances retardent les variations de courants dans les circuits. Les surintensités sont perçues avec un retard de quelques $\tau = L/R$ avec R la résistance linéique de la ligne.

- 13) a) La vitesse de l'onde doit s'exprimer en fonction des seuls paramètres L et C

Les énergies électriques et magnétiques d'un tronçon de ligne de longueur dx sont $W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{Cdx}$ et

$$W_m = \frac{1}{2} LdxI^2 \text{ donc } W_e = \frac{1}{2} \frac{I^2 \Delta t^2}{Cdx}. \text{ En identifiant, } \frac{\Delta t^2}{Cdx} \text{ est homogène à } Ldx \text{ soit } LC \text{ homogène à } \left(\frac{\Delta t}{dx} \right)^2$$

La vitesse de l'onde est donc $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- b) AN : $c = 2,6 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ soit une distance parcourue $d = 2,6 \cdot 10^2 \text{ km}$

Aspect thermique

- 14) L'énergie de la foudre arrive sur la ligne en 10 ms . Cette durée est beaucoup trop courte pour qu'il y ait diffusion

On a le bilan : $W_{\text{elec}} = W_{\text{th}}$ avec $W_{\text{elec}} = R_{\text{elec}} I^2 \Delta t = \gamma_{\text{alm}} \frac{L}{\pi r_0^2} I^2 \Delta t$ et $W_{\text{th}} = mc\Delta T = \rho(\pi r_0^2 L)c\Delta T$

Il vient $\frac{\gamma_{\text{alm}} L}{\pi r_0^2} I^2 \Delta t = \rho(\pi r_0^2 L)c\Delta T$ soit $\Delta T = \frac{\gamma_{\text{alm}} I^2 \Delta t}{\rho c(\pi r_0^2)^2}$ AN : $\Delta T \approx 1 \cdot 10^{-2} \text{ K}$: la ligne ne risque rien.

On peut estimer la profondeur L_{dif} de diffusion radiale dans le barreau : $L_{\text{dif}}^2 \approx \frac{\lambda}{\rho c} \Delta t$ soit $L_{\text{dif}} \approx 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

$L_{\text{dif}} = 1 \text{ mm} \ll 3 \text{ cm}$. On peut négliger le transfert thermique.

Rq : la prise en compte du transfert thermique minimiserait encore la température de câble...

IV Attirer la foudre

- 15) a) Le champ et le potentiel électriques à l'extérieur de la sphère chargée sont identiques à ceux produit par la même charge concentrée au centre de la sphère, soit $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ et $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

On en déduit $E(M) = \frac{|V(M)|}{R}$

A potentiel égal, le champ E est plus important pour R petit, soit pour les objets possédant localement un petit rayon de courbure, ie les objets pointus.

- b) Le principe d'un paratonnerre est paradoxalement d'attirer le courant de foudre en augmentant localement le champ électrique, afin ensuite de le canaliser, vers une prise de terre afin qu'il s'écoule dans le sol. Il faut éviter de se tenir à proximité d'endroits pointus : sous un cyprès, près d'un clocher, au sommet d'une colline ...

V ...puis la canaliser et s'en protéger

- 16) a) Le courant I est réparti sur la surface d'un hémisphère, donc à la distance r , $S(r) = 2\pi r^2$

$$I = \iint_S j(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 j(r) \quad \text{et} \quad j(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \quad \text{Avec} \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{I}{2\pi r^2 \gamma_{sol}} \vec{u}_r$$

et on en déduit $dV = -E dr = -\frac{I}{2\pi r^2 \gamma_{sol}} dr = d\left(\frac{I}{2\pi r \gamma_{sol}}\right)$ soit $V = \frac{I}{2\pi r \gamma_{sol}}$

- b) Les équipotentielles sont des hémisphères centrées sur le paratonnerre. En surface, le champ électrique est tangent au sol, et les équipotentielles étant normales aux lignes de champ, les équipotentielles sont des cercles centrés sur le point d'impact de la foudre, et dont la valeur décroît à mesure que l'on s'en éloigne.

- 17) En notant a la distance entre ses deux pieds, et en supposant $a \ll D$, la différence de potentiel entre les deux

pieds d'une personne est $U = Ea = \frac{I}{2\pi D^2 \gamma_{sol}} a$ et le courant qui la traverse est $I_h = \frac{U}{R_h} = \frac{Ia}{2\pi D^2 \gamma_{sol} R_h}$

On veut $I_h < I_h^{max}$ soit $\frac{Ia}{2\pi D^2 \gamma_{sol} R_h} < I_h^{max}$ et $D > D_c = \sqrt{\frac{Ia}{2\pi \gamma_{sol} R_h I_h^{max}}}$

AN : En prenant $a = 50$ cm, il vient $D_c = 80$ m. On a bien validé $a \ll D$.

- 18) a) La valeur de la résistance du sol peut varier d'un lieu à l'autre, et le sol n'est pas forcément homogène

b) En courant, la longueur des pas augmente, et on peut atteindre la tension de pas.

c) Les vaches ont un écartement plus grand entre leurs pattes, et elles ont des cornes aussi...

d) Les arbres par effet de pointe attire préférentiellement la foudre.

- 19) a) Le champ disruptif de l'air est de l'ordre de 10^6 V.m⁻¹ soit bien supérieur à la valeur critique proposée.

En fait, ce champ peut être fortement augmenté localement par effet de pointe entre autres.

- b) Les orages permettent de décharger le condensateur terrestre. Sans eux, le rayonnement cosmique continu augmenterait toujours le champ électrique entre l'électrosphère et la surface terrestre, et ça, ça ne serait pas bon du tout...

Problème 2 L'EXPERIENCE D'ELIHU THOMSON

A Considérations générales

1) Question de cours : $B_z = \mu_0 n i_s$

2) Le champ variable $\vec{B}(M,t)$ crée une fem $e(t)$ dans l'anneau, donc un courant $i_A(t)$. Celui ci crée un champ magnétique noté $\vec{B}_p(M,t)$ qui se superpose au champ $\vec{B}_{ext}(M,t)$. L'anneau est le siège d'un champ résultant appelé $\vec{B}_r(M,t)$.

Le champ au centre de l'anneau situé à la cote z est $\vec{B}_p(z,t) = \frac{\mu i_A(t)}{2a} \vec{u}_z$ et le champ résultat au centre de

l'anneau est donc
$$\vec{B}_r(z,t) = \left(\mu_0 n i_s(t) + \frac{\mu i_A(t)}{2a} \right) \vec{u}_z$$

3) On considère un cylindre élémentaire de hauteur dz et de rayon r « petit ».

\vec{B} est à flux conservatif et le flux total sortant $d\Phi$ est nul, soit avec les surfaces orientées vers l'extérieur :

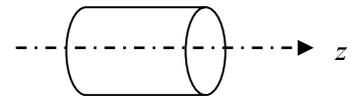
$$-B_z(0,z,t)dS_{base} + B_z(0,z+dz,t)dS_{base} + B_r(r,z,t)dS_{lat} = 0$$

A un terme d'ordre 2 près, $B_z(r,z,t) \approx B_0(0,z,t)$ et $B_r(r,z,t) \approx B_r(r,z+dz,t)$

$$\text{Il vient } -B_z(0,z,t)dS_{base} + B_z(0,z+dz,t)dS_{base} + B_r(r,z,t)dS_{lat} = 0$$

$$\text{et } \frac{\partial B_z(0,z,t)}{\partial z} dz \pi r^2 + B_r(r,z,t) 2\pi r dz = 0 \quad \text{soit } B_r(r,z,t) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(0,z,t)}{\partial z}$$

$$\text{et } B_r(r,z,t) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz} \cos(\omega t)$$



Rq : On peut aussi utiliser la relation locale $\text{div} \vec{B} = 0$ soit $\frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r(r,z,t))}{\partial r} + \frac{\partial B_z(r,z,t)}{\partial z} = 0$ et

$$\frac{\partial(r B_r(r,z,t))}{\partial r} = -r \frac{\partial B_z(r,z,t)}{\partial z} \quad \text{puis en considérant } \frac{\partial B_z(r,z,t)}{\partial z} \approx \frac{\partial B_z(0,z,t)}{\partial z},$$

$$r B_r(r,z,t) = -\frac{r^2}{2} \frac{\partial B_z(0,z,t)}{\partial z} \quad \text{et } B_r(r,z,t) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(0,z,t)}{\partial z}$$

4) Par définition $\phi_p = li$ avec i le courant du circuit et $\phi_{ext} = M i_{ext}$, avec i_{ext} le courant du circuit extérieur créant le flux.

5) En notant l_A l'inductance propre d'une spire de l'anneau, ϕ_{p1} le flux propre d'une spire de l'anneau, et \vec{B}_{p1} le champ propre créé par une spire, et compte tenu que $a \ll b$, il vient :

$$\phi_{p1} = \iint_{1spire} \vec{B}_{p1} \cdot d\vec{S} \approx B_{p1}(0,t) \pi a^2 = \frac{\mu_0 i_A}{2a} \pi a^2 = \frac{\mu_0 \pi a}{2} i_A = l_A i_A$$

$$\text{Avec un anneau à } N \text{ spires, } \vec{B}_{pN}(0,t) = \frac{\mu_0 N i_A}{2a} \quad \text{et } \phi_{pN} = \frac{\mu_0 N i_A}{2a} N \pi a^2 = N^2 \frac{\mu_0 \pi a}{2} i_A = L_A i_A$$

$$\text{On a bien } L_A = N^2 l_A$$

Le flux du champ \vec{B} envoyé par le solénoïde à travers N spires d'un anneau est évidemment N fois le flux envoyé à travers une spire :

$$\phi_{S \rightarrow 1spire} = \iint_{1spire} \vec{B} \cdot d\vec{S} = M_1 i_S \quad \text{et } \phi_{S \rightarrow Nspires} = \iint_{Nspires} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \iint_{1spire} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N M_1 i_S = M i_S \quad \text{On a bien } M = N M_1$$

6) Un élément d'anneau $d\vec{l} = ad\theta\vec{e}_\theta$, placé dans $\vec{B}(r=a, z, t)$ parcouru par $i_A(t)$ est soumis à la force de Laplace $d\vec{F}(z, t) = i_A(t)d\vec{l} \wedge \vec{B}(r=a, z, t)$.

$$\text{On en déduit } d\vec{F} = \begin{vmatrix} 0 & B_r(a, z, t) \\ i_A(t)ad\theta & B_\theta(a, z, t) \\ 0 & B_z(a, z, t) \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_z(a, z, t)i_A(t)ad\theta \\ 0 \\ -B_r(a, z, t)i_A(t)ad\theta \end{vmatrix}$$

Par symétrie, les forces radiales élémentaires s'exerçant sur deux éléments diamétraux sont opposées :

$$\text{la force résultante est orientée selon } Oz : \vec{F} = \int_0^{2\pi} -B_r(a, z, t)i_A(t)ad\theta\vec{e}_z = -2\pi a B_r(a, z, t)i_A(t)\vec{e}_z$$

$$\text{Or, pour } r \ll \text{petit}, B_r(r, z, t) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(0, z, t)}{\partial z} \text{ soit ici } B_r(a, z, t) = -\frac{a}{2} \frac{\partial B_z(0, z, t)}{\partial z} = -\frac{a}{2} \frac{dB_0(z)}{dz} \cos(\omega t)$$

$$\text{Il vient } \boxed{\vec{F} = \pi a^2 i_A(t) \frac{dB_0(z)}{dz} \cos(\omega t) \vec{e}_z}$$

7) Le flux du champ du solénoïde (S) à travers l'anneau (A) est, par définition de l'inductance mutuelle $M(z)$:

$$\phi(z, t) = M(z)i_S(t) . \text{ Il vient : } i_S(t) \frac{dM(z)}{dz} = \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} \text{ et } \boxed{F(z, t) = i_A(t)i_S(t) \frac{dM}{dz} = i_A(t) \frac{\partial \phi}{\partial z}}$$

8) Pour l'anneau immobile maintenu à z constant, on est dans le cas d'une induction de Neumann, et la fem est

$$\text{donnée par la loi de Faraday } e(t) = -\frac{d\phi}{dt} \text{ soit } \boxed{e(t) = -M(z) \frac{di_S(t)}{dt}}$$

9) Quand $a \ll b$, on peut admettre que le champ axial pour tout r près de l'axe est égal au champ axial sur l'axe :

$$B_z(r, z, t) \approx B_0(z) \cos(\omega t) \text{ et}$$

$$\phi(z) = \iint_{\text{anneau}} B_z(r, z, t) dS \approx B_0(z) \cos(\omega t) \pi a^2 \text{ et } e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \pi a^2 B_0(z) \omega \sin(\omega t)$$

$$\text{soit en posant } \phi_0(z) = \pi a^2 B_0(z) \quad \boxed{e(t) = \phi_0(z) \omega \sin(\omega t)}$$

B Modélisation de la première série d'expériences.

10) L'équation électrique de l'anneau est $e(t) = R_A i_A(t)$ avec $e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_A i_A(t) + M i_S(t))$

En négligeant l'inductance propre L_A de l'anneau, il reste : $R_A i_A(t) = -\frac{d}{dt}(M i_S(t))$ soit

$$i_A(t) = -\frac{M}{R_A} \frac{di_S(t)}{dt} = \frac{M}{R_A} I_S \omega \sin(\omega t)$$

L'hypothèse $a \ll b$ n'est plus valable, mais la composante axiale de la force de Laplace est dans le cas

$$\text{général : } F_z = i_A(t)i_S(t) \frac{dM(z)}{dz} \text{ soit } i_A(t) = \frac{e(t)}{R_A}$$

La symétrie de révolution du système conduit à $F_r = 0$ et on a toujours $F_\theta = 0$

$$\text{Il reste : } \vec{F}_L = i_A(t)i_S(t) \frac{dM(z)}{dz} \vec{e}_z \text{ soit } \vec{F}_L = \frac{M}{R_A} I_S^2 \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) \frac{dM(z)}{dz} \vec{e}_z \text{ et}$$

$$\boxed{\langle \vec{F}_L \rangle_t = \frac{M}{R_A} I_S^2 \omega \frac{dM(z)}{dz} \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle_t \vec{e}_z = \vec{0}}$$

11) En prenant en compte l_A mais en négligeant r_A il vient : $e(t) = -\frac{d}{dt}(L_A i_A(t) + M i_S(t)) = 0$ soit

$$i_A(t) = -\frac{M}{L_A} I_S \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \vec{F}_L = -\frac{M}{L_A} I_S^2 \cos^2(\omega t) \frac{dM(z)}{dz} \vec{e}_z \quad \text{donc} \quad \langle \vec{F}_L \rangle_t = -\frac{M}{L_A} I_S^2 \frac{dM(z)}{dz} \langle \cos^2(\omega t) \rangle_t \vec{e}_z$$

$$\text{soit} \quad \boxed{\langle \vec{F}_L \rangle_t = -\frac{M I_S^2}{2 L_A} \frac{dM(z)}{dz} \vec{e}_z}$$

12) L'inductance mutuelle M diminue quand l'anneau s'éloigne du solénoïde, donc $\frac{dM}{dz} < 0$.

La force de Laplace est donc orientée vers le haut, et peut compenser le poids de l'anneau : l'observation F1 est validée.

$$\text{Cependant,} \quad \langle \vec{F}_L \rangle_t = -\frac{(NM_1) I_S^2}{2(N^2 l_A)} \frac{d(NM_1(z))}{dz} \vec{e}_z = -\frac{M_1 I_S^2}{2l_A} \frac{dM_1(z)}{dz} \vec{e}_z : \text{indépendante de } N$$

L'observation F2 est invalidée : un anneau à 2 spires subit la même force de Laplace qu'un anneau à 1 spire, mais étant deux fois plus lourd, devrait se stabiliser plus bas.

13) Pour l'anneau : $e(t) = -\frac{d}{dt}(L_A i_A(t) + M i_S(t)) = R_A i_A(t)$ soit $\boxed{R_A i_A(t) + L_A \frac{di_A}{dt} + M \frac{di_S}{dt} = 0}$

Pour le solénoïde d'inductance propre L_S , et couplé par le coefficient d'inductance mutuelle M avec

$$\text{l'anneau : } u_S(t) = R_S i_S(t) - e(t) \quad \text{soit} \quad \boxed{u_S(t) = R_S i_S(t) + L_S \frac{di_S}{dt} + M \frac{di_A}{dt}}$$

14) En notation complexe, après simplification par $\exp j\omega t$:

$$R_A I_A + j\omega L_A I_A + j\omega M I_S = 0 \quad \text{et} \quad U_0 = R_S I_S + j\omega L_S I_S + j\omega M I_A$$

$$\text{soit } Z_A I_A + Z_{AS} I_S = 0 \quad \text{et} \quad U_0 = Z_S I_S + Z_{AS} I_A$$

$$\text{On en déduit } I_S = -\frac{Z_A}{Z_{AS}} I_A \quad \text{et} \quad U_0 = Z_S \left(-\frac{Z_A}{Z_{AS}} I_A \right) + Z_{AS} I_A \quad \text{soit } I_A = -\frac{U_0 Z_{AS}}{Z_A Z_S - Z_{AS}^2} \quad \text{et} \quad \boxed{I_A = -\frac{Z_{AS}}{D^2} U_0}$$

$$\text{et } I_S = -\frac{Z_A}{Z_{AS}} \left(-\frac{Z_{AS}}{D^2} U_0 \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{I_S = \frac{Z_A}{D^2} U_0}$$

$$I_A = -\frac{|Z_{AS}| \exp(j\pi/2)}{|D|^2 \exp(2j\varphi_D)} U_0 = \frac{|Z_{AS}| U_0}{|D|^2} \exp j \left(-\frac{\pi}{2} - 2\varphi_D \right) \quad \text{et} \quad I_S = \frac{|Z_A| \exp j\varphi_A}{|D|^2 \exp j2\varphi_D} U_0 = \frac{|Z_A| U_0}{|D|^2} \exp j(\varphi_A - 2\varphi_D)$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{i_A(t) = \frac{|Z_{AS}| U_0}{|D|^2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - 2\varphi_D\right)} \quad \boxed{i_S(t) = \frac{|Z_A| U_0}{|D|^2} \cos(\omega t + \varphi_A - 2\varphi_D)}$$

15) La force est : $F_{Lz} = i_A(t) i_S(t) \frac{dM(z)}{dz} = \frac{|Z_{AS}| U_0}{|D|^2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - 2\varphi_D\right) \frac{|Z_A| U_0}{|D|^2} \cos(\omega t + \varphi_A - 2\varphi_D) \frac{dM}{dz}$

$$\text{soit } F_{Lz} = \frac{|Z_{AS}| |Z_A| U_0^2}{2|D|^4} \frac{dM}{dz} \left(\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2} - 4\varphi_D\right) + \cos\left(\varphi_A + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$\text{de valeur moyenne } \langle F_{Lz} \rangle_t = \frac{|Z_{AS}| |Z_A| U_0^2}{2|D|^4} \frac{dM}{dz} \cos\left(\varphi_A + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \langle F_{Lz} \rangle_t = \frac{|Z_{AS}| |Z_A| U_0^2}{2|D|^4} \frac{dM}{dz} \sin(\varphi_A)$$

$$\text{En explicitant : } |Z_{AS}| = M\omega = NM_1\omega = |Z_A| \sin\varphi_A = |Z_A| \frac{L_A \omega}{|Z_A|} = L_A \omega = N^2 l_A \omega \quad \frac{dM}{dz} = N \frac{dM_1}{dz}$$

$$\begin{aligned}
 |D|^4 &= (R_A + jL_A\omega)(R_S + jL_S\omega) + M^2\omega^2 = (R_A R_S - L_A L_S \omega^2 + M^2\omega^2)^2 + (R_A L_S \omega + R_S L_A \omega)^2 \\
 &= (Nr_A R_S - N^2(l_A L_S - M_1^2)\omega^2)^2 + (Nr_A L_S + R_S N^2 l_A)^2 \omega^2 \\
 &= N^2 \left((r_A R_S - N(l_A L_S - M_1^2)\omega^2)^2 + (r_A L_S + R_S N l_A)^2 \omega^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\langle F_{Lz} \rangle_t = - \frac{N^4 M_1 l_A \omega^2 U_0^2}{2N^2 \left((r_A R_S - N(l_A L_S - M_1^2)\omega^2)^2 + (r_A L_S + R_S N l_A)^2 \omega^2 \right)} \frac{dM_1}{dz}$$

$$\text{et finalement : } \langle F_{Lz} \rangle_t = - \frac{M_1 l_A \omega^2 U_0^2}{2} \frac{dM_1}{dz} \frac{N^2}{(r_A R_S - N(l_A L_S - M_1^2)\omega^2)^2 + (r_A L_S + R_S N l_A)^2 \omega^2}$$

Ouf ... On a bien établi la proposition.

$$16) \text{ A.N. : } \boxed{\frac{F(2)}{F(1)} = 3,4}$$

17) En passant de 1 à 2 spires, la masse (et le poids) sont multipliés par 2, et la force de Laplace par 3,4 : l'anneau se stabilisera plus haut conformément à l'observation F2.

18) Le rapport des forces pour deux anneaux géométriquement identiques de cuivre ou d'aluminium vaut $F_L(Cu) = 2,8 F_L(Al)$ pour $N=1$ et 2,5 pour $N=2$, alors que le rapport des masses est : $m(Cu) \approx 3 m(Al)$, donné par le rapport des masses volumiques. L'anneau en cuivre montera un peu moins haut que celui en aluminium, conformément à l'observation F3.

C Modélisation de la deuxième série d'expériences.

19) On reprend l'expression proposée $F_z(z,t) = i_A(t) \frac{\partial \phi}{\partial z}$ où l'on remplace $\phi(z,t)$ et $i_A(t)$ par leurs expressions on obtient immédiatement la relation demandée :

$$\boxed{F_z(z,t) = -\omega \frac{\gamma \Phi_0}{H} \Phi(z) \left(\frac{r_A}{r_A^2 + (\bar{l}\omega)^2} \sin(\omega t) \cos(\omega t) - \frac{\bar{l}\omega}{r_A^2 + (\bar{l}\omega)^2} \cos^2(\omega t) \right)}$$

20) $\langle F_z(z,t) \rangle_t = \omega \frac{\gamma \Phi_0}{2H} \Phi(z) \frac{\bar{l}\omega}{r_A^2 + (\bar{l}\omega)^2}$ et en explicitant $\Phi(z) = \Phi_0 \left(1 - \gamma \frac{z}{H} \right)$ il vient :

$$\langle F_z(z,t) \rangle_t = \omega \frac{\gamma \Phi_0^2}{2H} \frac{\bar{l}\omega}{r_A^2 + (\bar{l}\omega)^2} \left(1 - \gamma \frac{z}{H} \right) \text{ soit la forme proposée avec } \boxed{F_0 = \frac{\gamma \Phi_0^2}{2H} \frac{\bar{l}\omega^2}{r_A^2 + (\bar{l}\omega)^2}}$$

On applique le PFD à l'anneau de masse m_1 , soit en projection sur l'axe Oz :

$$m_1 \frac{d^2 z}{dt^2} = F_0 \left(1 - \gamma \frac{z}{H} \right) - m_1 g \text{ d'où : } \boxed{m_1 \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\gamma F_0}{H} z = F_0 - m_1 g}$$

21) L'anneau décolle de $z=0$ si $\frac{d^2 z}{dt^2} > 0$ avec $z=0$ soit si $F_0 - m_1 g > 0$ ou $\boxed{F_0 > m_1 g}$

L'anneau se stabilise quand $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$ soit en $\boxed{z_0 = \frac{H}{\gamma F_0} (F_0 - m_1 g)}$ (si $z_0 < H$).

22) AN : $F_0 = 0,135 \text{ N} > m_1 g = 0,12 \text{ N}$ et $\boxed{z_0 = 9,1 \text{ cm}}$

23) $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\gamma F_0}{m_1 H} z = \frac{F_0 - m_1 g}{m_1}$ a pour solution générale : $z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + z_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma F_0}{m_1 H}}$

Avec les conditions initiales : $0 = A + z_0$ et $0 = B\omega_0$ $A = -z_0$ et $B = 0$: $z(t) = z_0(1 - \cos(\omega_0 t))$

On a un mouvement d'oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma F_0}{m_1 H}}$

24) La modélisation proposée a supposé l'anneau immobile et a calculé la fem dans le cadre d'une induction de Neumann. Si l'anneau est en mouvement, il faut prendre aussi en compte une contribution à la fem par induction de Lorentz. Cette contribution engendre par la loi de Lenz une force de Laplace de freinage qui stabilisera l'anneau.

D'autres phénomènes dissipatifs interviennent aussi : les frottements « solides » entre le noyau et l'anneau, les frottements « fluides » entre l'anneau et l'air.

25) Avec r_A dix fois plus petit, F_0 devient $F_0 = 1,362$ N, puis $z_0 = 76$ cm $> H$

Cette position n'est pas une position d'équilibre puisque le flux et donc la force de Laplace y sont nuls.

26) L'anneau a une cote donnée par $z(t) = z_0(1 - \cos(\omega_0 t))$ tant que $z < H$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma F_0}{m_1 H}} = 11,67$ rad.s⁻¹

L'extrémité du noyau $z = H$ est atteinte à un instant $\tau = \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(1 - \frac{H}{z_0}\right)$ $\tau = 105$ ms

La vitesse est alors $\frac{dz(\tau)}{dt} = z_0 \omega_0 \sin(\omega_0 \tau)$ AN : $\frac{dz(\tau)}{dt} = 8,3$ m.s⁻¹

27) La durée caractéristique de variation des courants est $T = \frac{2\pi}{\omega}$. L'utilisation d'une force moyennée

temporellement est justifiée si la durée τ du mouvement de l'anneau est grande devant T , soit $\tau \gg T$

Avec $\tau = 105$ ms et $T = 20$ ms, cette hypothèse est, sinon complètement justifiée, du moins acceptable.

28) Pour $t > \tau$, l'anneau n'est soumis qu'à la pesanteur, et le mouvement vérifie l'équation : $z_1(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t$

(mesurée à partir du sommet du noyau) avec $v_0 = \frac{dz(\tau)}{dt} = z_0 \omega_0 \sin(\omega_0 \tau)$

L'altitude maximale donnée par $z_1(t_1) = 0$ est atteinte à $t_1 = \frac{v_0}{g}$ on trouve : $z_1 = \frac{v_0^2}{2g}$

L'anneau atteint l'altitude maximale $z_{max} = H + \frac{v_0^2}{2g}$ AN : $z_{max} = 4$ m