PC*1 / PC*2 / PC ***CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE DE PHYSIQUE N°1***

9 septembre 2017

I LAMPE AU NEON

1) a) Tant que la lampe reste éteinte, aucun courant ne circule dans le branche qui la contient, et on est en présence d'un circuit RC série.

On a : $E = Ri(t) + u(t)$ avec $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$ et $q(t) = Cu(t)$ ce qui conduit à $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{RC} = \dfrac{E}{RC}$

On peut poser $\boxed{\tau = RC}$ homogène à un temps, et résoudre l'équation en $u(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + E$

A l'instant initial, le condensateur est déchargé : $u(0) = 0 = A + E$ soit $A = -E$ et finalement

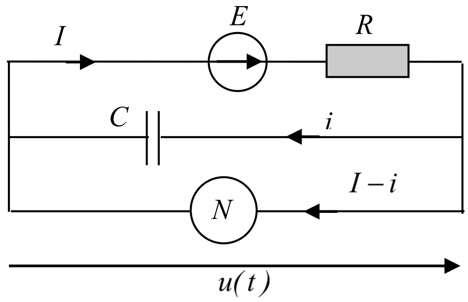
$$\boxed{u(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

b) La lampe peut s'allumer si $u(t)$ peut atteindre la valeur U_a soit si $\boxed{U_a < E}$

Dans ce cas, la lampe s'allume à l'instant t_1 tel que : $u(t_1) = E\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t_1}{\tau}\right)\right) = U_a$

soit $\boxed{t_1 = \tau Ln\dfrac{E}{E - U_a}}$

2) Quand la lampe est allumée, le circuit est équivalent à



avec : $u = E - RI$

$i = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du}{dt}$

$u = \rho(I - i)$

soit $u = \rho\left(\dfrac{E-u}{R} - C\dfrac{du}{dt}\right)$ et $\rho C\dfrac{du}{dt} + \left(1 + \dfrac{\rho}{R}\right)u = \dfrac{\rho E}{R}$ puis $\dfrac{\rho C}{1 + \dfrac{\rho}{R}}\dfrac{du}{dt} + u = \dfrac{\rho}{R\left(1 + \dfrac{\rho}{R}\right)}E$

et $\dfrac{RC}{1 + \dfrac{R}{\rho}}\dfrac{du}{dt} + u = \dfrac{E}{1 + \dfrac{R}{\rho}}$ ou $\tau'\dfrac{du}{dt} + u = E'$ soit la forme demandée avec $\boxed{E' = \dfrac{E}{1 + \dfrac{R}{\rho}}}$ et $\boxed{\tau' = \dfrac{RC}{1 + \dfrac{R}{\rho}}}$

Cette équation a pour solution générale $u(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau'}\right) + E'$ avec $u(t_1) = A\exp\left(-\dfrac{t_1}{\tau'}\right) + E' = U_a$

donc $A = (U_a - E')\exp\left(\dfrac{t_1}{\tau'}\right)$ et $\boxed{u(t) = E' + (U_a - E')\exp\left(-\dfrac{t - t_1}{\tau'}\right)}$

La lampe reste allumée pour $t \geq t_1$ si la tension $u(t)$ reste supérieure à la tension d'extinction U_e

Au cours du temps, $u(t)$ va évoluer vers E'. $\boxed{\text{La lampe reste allumée si } E' > U_e}$

3) Si l'extinction est possible, on se place dans le cas $E' < U_e$.

L'instant t_2 de l'extinction est donné par $U_e = E' + \left(U_a - E'\right) exp\left(-\dfrac{t_2 - t_1}{\tau'}\right)$ soit

$$exp\left(\frac{t_2 - t_1}{\tau'}\right) = \frac{U_a - E'}{U_e - E'} \quad \text{et} \quad t_2 - t_1 = \tau' Ln\left(\frac{U_a - E'}{U_e - E'}\right) \qquad \boxed{t_2 = t_1 + \tau' Ln\left(\frac{U_a - E'}{U_e - E'}\right)}$$

4) a) Pour $t > t_2$, la lampe est éteinte, et on revient à l'équation $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$ de solution générale

$$u(t) = A exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E \quad \text{mais avec } u(t_2) = U_e \quad \text{soit } U_e = A exp\left(-\frac{t_2}{\tau}\right) + E$$

On obtient la constante $A = \left(U_e - E\right) exp\left(\dfrac{t_2}{\tau}\right)$ et $\boxed{u(t) = \left(U_e - E\right) exp\left(-\dfrac{t - t_2}{\tau}\right) + E}$

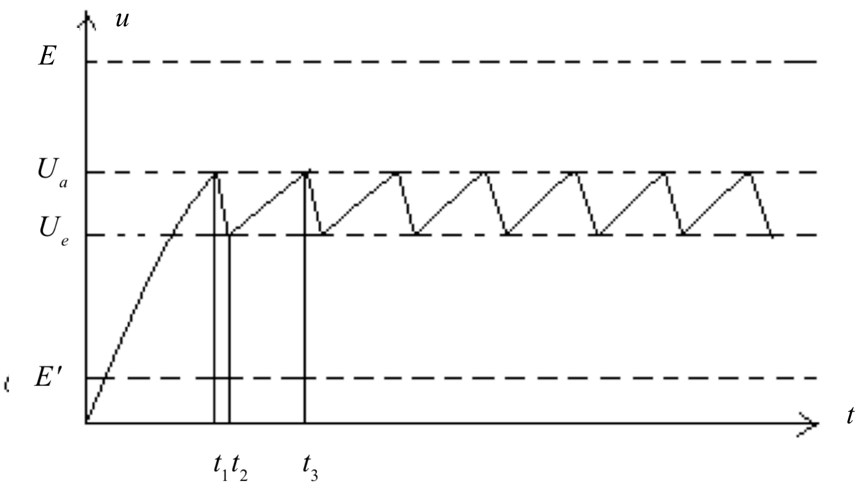
b) Au cours du temps, cette tension va évoluer vers *E*. Avec $U_a < E$, la tension de ré-allumage sera atteinte à un instant t_3 tel que $U_a = \left(U_e - E\right) exp\left(-\dfrac{t_3 - t_2}{\tau}\right) + E$ soit $exp\left(\dfrac{t_3 - t_2}{\tau}\right) = \dfrac{U_e - E}{U_a - E}$

et $\boxed{t_3 = t_2 + \tau Ln\left(\dfrac{E - U_e}{E - U_a}\right)}$ ou encore $t_3 = t_1 + \tau' Ln\left(\dfrac{U_a - E'}{U_e - E'}\right) + \tau Ln\left(\dfrac{E - U_e}{E - U_a}\right)$

5) a) A l'instant t_3, on se retrouve dans la même situation qu'à l'instant t_1 : la tension va diminuer la lampe va s'éteindre, etc… La période du phénomène est la durée entre deux allumages successifs soit $T = t_3 - t_1$

$$\boxed{T = \tau' Ln\left(\frac{U_a - E'}{U_e - E'}\right) + \tau Ln\left(\frac{E - U_e}{E - U_a}\right)}$$

b)



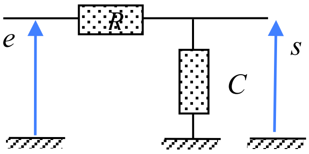
6) Si $\rho << R$, E' et τ' sont négligeables, et $T \approx \tau Ln\left(\dfrac{E - U_e}{E - U_a}\right)$. On en déduit $\boxed{R = \dfrac{T}{C\,Ln\left(\dfrac{E - U_e}{E - U_a}\right)}}$

AN : $\boxed{R = 9{,}8\ \text{M}\Omega}$

II FILTRAGE

A Filtre RC

1)



Il n'y a que deux possibilités de montage. Pour avoir un filtre passe bas, il faut couper les hautes fréquences, donc mettre un condensateur en sortie, qui se comporte comme un court circuit en haute fréquence.

$$\underline{H}_1(j\omega)=\frac{\underline{S}}{\underline{E}}=\frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C+R}=\frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+R}=\frac{1}{1+jRC\omega} \quad \text{et en } \omega_0=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{RC} \qquad \boxed{\underline{H}_1(j\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

La pulsation de coupure à -3dB correspond à une atténuation du gain par $\sqrt{2}$ puisque

$$G(\omega_0)=\frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \text{ entraine } 20\log G(\omega_0)=20\log G_{max}-20\log\sqrt{2}=20\log G_{max}-3$$

soit $G_{dB}(\omega_0)=G_{dB\,max}-3dB$

$$G_1=20\log\left|\underline{H}_1(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{et } G(\omega_c)=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{obtenu pour } \omega_c=\omega_0$$

$$\boxed{\text{La pulsation de coupure à -3dB est donc la pulsation } \omega_0=\frac{1}{RC}}$$

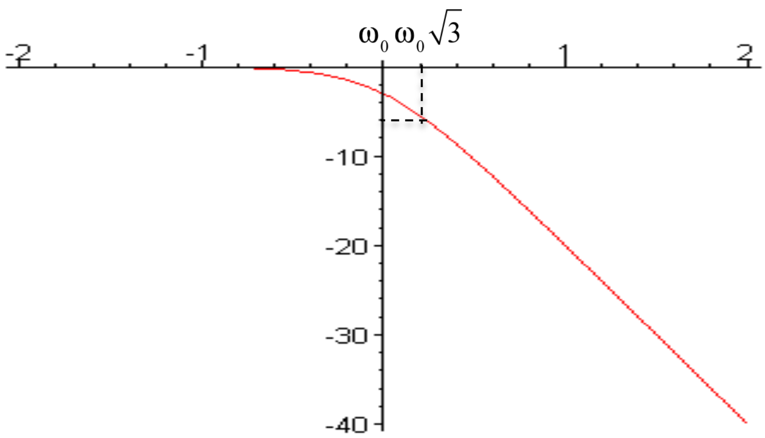
De même, la pulsation de coupure à -6 dB correspond à une atténuation du gain par 2 puisque

$$G(\omega_0')=\frac{G_{max}}{2} \text{ entraine } 20\log G(\omega_0')=20\log G_{max}-20\log 2=20\log G_{max}-6 \text{ soit}$$

$$G_{dB}(\omega_0')=G_{dB\,max}-6dB$$

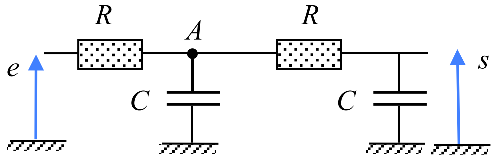
$$G_1(\omega_0')=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0'}{\omega_0}\right)^2}}=\frac{1}{2} \quad \text{obtenu pour } 1+\left(\frac{\omega_0'}{\omega_0}\right)^2=4 \quad \text{soit } 1+\left(\frac{\omega_0'}{\omega_0}\right)^2=4 \quad \text{et } \boxed{\omega_c'=\sqrt{3}\omega_0}$$

2)



B Filtres en cascade

3) En utilisant la première question, le filtre est du type ci contre avec $\underline{Z}_1 = R$ et $\underline{Z}_2 = \dfrac{1}{jC\omega}$



4) En notant $\underline{V}_A$ le potentiel en A, le pont diviseur en sortie donne : $\dfrac{\underline{S}}{\underline{V}_A} = \dfrac{1}{1+jRC\omega}$ soit $\underline{V}_A = \left(1+jRC\omega\right)\underline{S}$

et la loi des nœuds appliquée en A : $\dfrac{\underline{E}-\underline{V}_A}{R} = \dfrac{\underline{V}_A - \underline{S}}{R} + \dfrac{\underline{V}_A - 0}{\underline{Z}_C}$ soit $\underline{E} - \underline{V}_A = \underline{V}_A - \underline{S} + jRC\omega\underline{V}_A$

puis : $\underline{E} = -\underline{S} + \left(2+jRC\omega\right)\underline{V}_A = -\underline{S} + \left(2+jRC\omega\right)\left(1+jRC\omega\right)\underline{S} = \left(1+3jRC\omega - R^2C^2\omega^2\right)\underline{S}$

et finalement : $\boxed{\underline{H}_2(j\omega) = \dfrac{1}{1+3j\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ En posant $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, $\underline{H}_2(jx) = \dfrac{1}{1+3jx-x^2}$

5) $G_2(\omega_2) = \dfrac{G_{2max}}{\sqrt{2}}$ soit avec $G_{2max} = 1$ et $G_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2 + 9x^2}}$, la pulsation réduite de coupure

à – 3dB est donnée par $\left(1-x^2\right)^2 + 9x^2 = 2$ ou en posant $X = x^2$, $X^2 + 7X - 1 = 0$

de solution $X = \dfrac{-7+\sqrt{53}}{2}$ (seule la solution positive est acceptable) soit $x = \sqrt{\dfrac{-7+\sqrt{53}}{2}} = 0{,}374$

La pulsation de coupure à -3 dB est $\boxed{\omega_2 = 0{,}37\,\omega_0}$

En hautes fréquences, $\underline{H}_2(j\omega) \to -\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$ soit $G_{2dB} \to 40\,log\,\omega_0 - 40\,log\,\omega$:

$\boxed{\text{Le diagramme présente une pente asymptotique à } -40 dB \text{ / décade}}$.

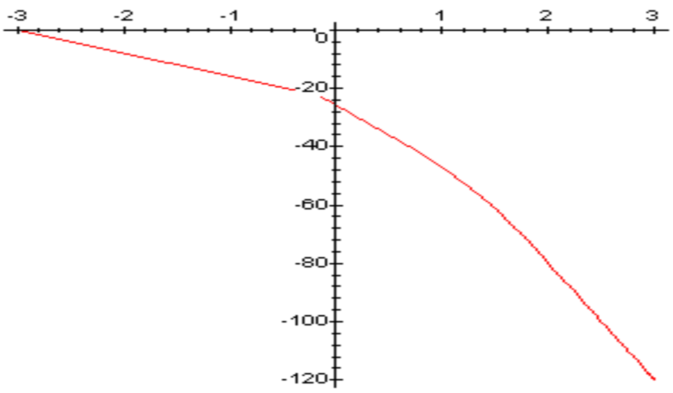
6) Le dénominateur D de $\underline{H}_2(jx)$ peut se développer en : $D = 1 + j\dfrac{\omega_\alpha + \omega_\beta}{\omega_0^2}\omega - \dfrac{\omega^2}{\omega_\alpha\omega_\beta}$

En identifiant : $\dfrac{\omega_\alpha + \omega_\beta}{\omega_0^2} = \dfrac{3}{\omega_0}$ et $\omega_\alpha\omega_\beta = \omega_0^2$ soit $\begin{cases} \omega_\alpha + \omega_\beta = 3\omega_0 \\ \omega_\alpha\omega_\beta = \omega_0^2 \end{cases}$

On résoud : $\left(3\omega_0 - \omega_\beta\right)\omega_\beta = \omega_0^2$ soit $\omega_\beta^2 - 3\omega_0\omega_\beta + \omega_0^2 = 0$ $\Delta = 9\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 5\omega_0^2$

de solution $\omega_\beta = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\omega_0$. On en déduit : $\boxed{\omega_\alpha = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_0 = 0{,}38\,\omega_0}$, $\boxed{\omega_\beta = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0 = 2{,}61\omega_0}$

7)



Le dénominateur de la fonction de transfert étant factorisable en un produit de deux termes, le diagramme présente deux ruptures de pente.

C Filtre de Butterworth

8) Le dénominateur de la fonction de transfert $1-2x^2+j(2x-x^3)$ a pour module

$\sqrt{\left(1-2x^2\right)^2+\left(2x-x^3\right)^2}$ et en développant on a $\sqrt{1+4x^4-4x^2+4x^2+x^6-4x^4}=\sqrt{1+x^6}$

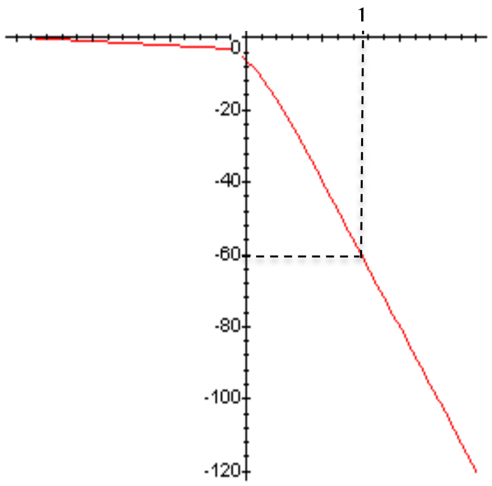
La forme proposée convient.

9) - En très basse fréquence ($\omega << \omega_0$), $G_3 \to 1$ et $G_{3dB} \to 0$

- En hautes fréquences, ($\omega >> \omega_0$), $G_3 \to \dfrac{1}{\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^3}=\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^3$ et $G_{3dB} \to 60\,log\,\omega_0 - 60\,log\,\omega$

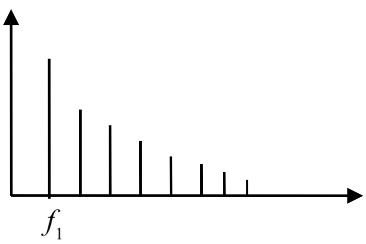
On est en présence d'une asymptote oblique de pente -60 dB par décade

- Pour $\omega=\omega_0$, $G_3(\omega_0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$: $\boxed{\omega_0 \text{ est la pulsation de coupure à } -3\text{ dB}}$



Un tel filtre est très sélectif : les fréquences supérieures à la pulsation de coupure sont très rapidement atténuées, d'autant plus que *n* est grand.
Le choix du nombre *n* permet de choisir la sélectivité du filtre.
L'atténuation est constante : il n'y a pas deux ruptures de pente.
Le gain du filtre reste toujours inférieur au gain dans la bande passante.

10) a)



b) Compte tenu du critère proposé, le signal est défini par les 5 premiers termes de son développement, jusqu'au terme de fréquence $9f_1$. Si l'on impose $9f_1 < f_0$, il vient $f_1 < \dfrac{f_0}{9}$ et $T > \dfrac{9}{f_0}$; $\boxed{T > 0{,}9 \text{ ms}}$

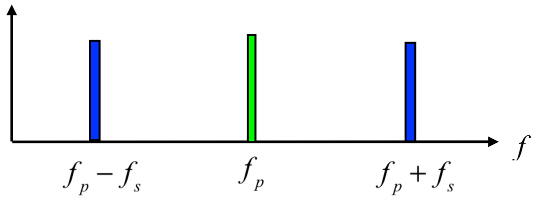
III MODULATION D'AMPLITUDE

1) a) Le signal issu du multiplieur puis du sommateur est :

$$R(t) = P_0 cos(\Omega t) + kP_0S_0 cos(\Omega t)cos(\omega_0 t) = P_0 cos(\Omega t) + \frac{kP_0S_0}{2} cos\left((\Omega+\omega_0)t\right)cos\left((\Omega-\omega_0)t\right)$$

On a bien trois signaux de fréquences respectives celle de la porteuse 220 kHz, $\left(220+0{,}44\right)=220{,}44$ kHz et $\left(220-0{,}44\right)=219{,}56$ kHz

b)



c) Sans sommateur, on obtiendrait seulement les fréquences

2) a) On reprend le calcul précédent avec les valeurs limites du signal à transmettre :

Pour $f_s = 300$ Hz, on obtient les fréquences 220 kHz, $\left(220+0{,}3\right)=220{,}3$ kHz et $\left(220-0{,}3\right)=219{,}7$ kHz

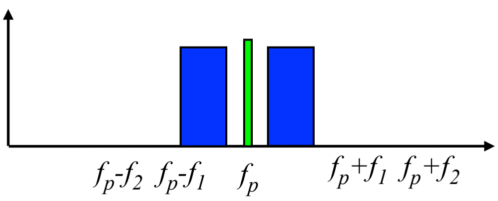
Pour $f_s = 3400$ Hz, on obtient 220 kHz, 223,4 kHz et 216,6 kHz.

La largeur occupé par le signal reçu est de 6,8 kHz, soit bien <u>la valeur proposée de 7 kHz</u>

Estimer la largeur de bande nécessaire à la transmission de la musique revient à considérer un spectre musical de largeur 20 kHz $\left(220 \pm 20\right)$ kHz. <u>Ceci est exagéré</u> :les sons supérieurs à 10 kHz sont rares ; la gamme du piano par exemple ne dépasse pas 4000 Hz

On constate aussi que le domaine non utilisé est une très étroit (300 Hz) de part et d'autre de la porteuse.

b)



3) La bande d'émission va s'étendre entre 215,5 kHz et 224,5 kHz.

Entre deux porteuses, il faut au minimum la largeur de la plage, soit ici $\boxed{9 \text{ kHz}}$.

4) a) <u>Les deux domaines de part et d'autre de la porteuse contiennent la même information</u> ; la transmission de l'un d'entre eux suffit.

b) <u>La porteuse ne contient pas d'information sur le signal</u>. Sa transmission énergivore n'est pas nécessaire. Il faut cependant la reproduire sur le lieu de la réception car elle est nécessaire à la restitution du signal. Il faut reproduire le plus fidélement possible la porteuse.

c) Le facteur de qualité d'un circuit *RLC* série est dnné par $Q = \frac{f}{\Delta f}$.

Avec $f = f_p = 220$ kHz et $\Delta f = 100$ Hz, il vient : $\boxed{Q = 2200}$

<u>Ce facteur de qualité est énorme</u>, il y a certainement mieux qu'un circuit *b* série pour récupérer la porteuse.