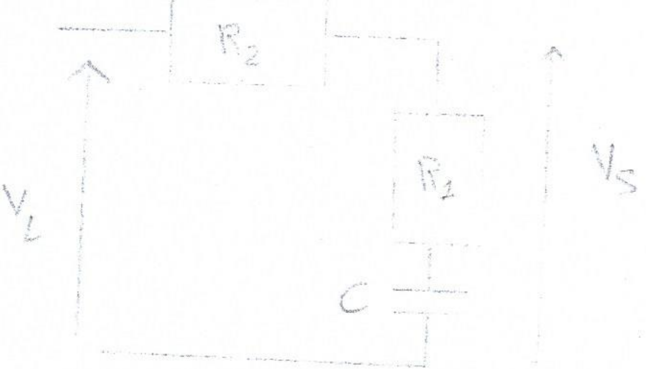
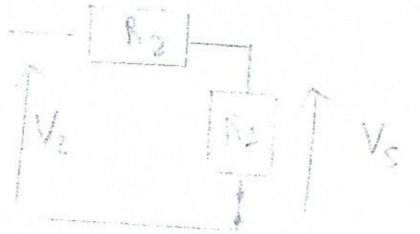
# TD n°1 : Electrocinétique

## Exercice n°1 : Analyses spectrale et temporelle de la réponse d'un filtre

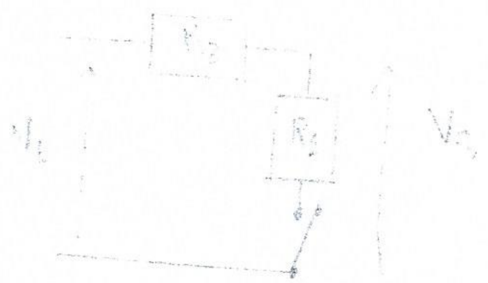



① HF :




$$\underline{H}(j\omega \to \infty) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

BF :




$$\underline{H}(j\omega \to 0) = 1$$

② Calcul de la FTSO :

$$H(j\omega) = \frac{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{jR_1C_1\omega}}{1 + \frac{1}{j(R_1+R_2)C_1\omega}}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{(1 + jR_1C_1\omega)\,\cancel{j(R_1+R_2)C_1\omega}}{\cancel{jR_1C_1\omega}\,(1 + j(R_1+R_2)C_1\omega)} \times \frac{\cancel{R_1}}{\cancel{R_1+R_2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{1 + j(R_1+R_2)C_1\omega} = \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}}$$

avec $\tau_1 = R_1C_1$
$\tau_2 = (R_1+R_2)C_1$ et $H_0 = 1$.

③ A.N. $\left| \begin{array}{l} \tau_1 = \dfrac{1}{\omega_1} = R_1 C_1 = 10^4 \, 10^{-8} = 10^{-4} \, s \\ \tau_2 = \dfrac{1}{\omega_2} = (R_1 + R_2) C_1 = 10^5 \, 10^{-8} = 10^{-3} \, s \end{array} \right.$

donc $\tau_2 \gg \tau_1$ i.e $\omega_1 \gg \omega_2$ avec $\omega_1 = 10^4 \, rad.s^{-1}$
$\omega_2 = 10^3 \, rad.s^{-1}$

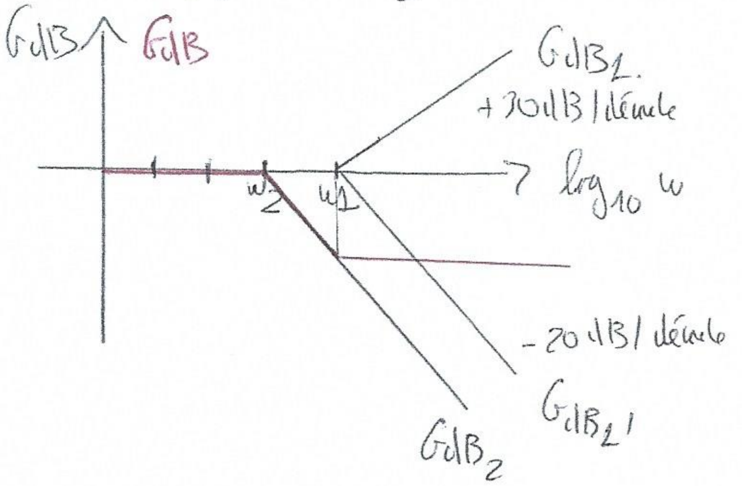
donc $H(j\omega) = H_1(j\omega) \times H_2(j\omega)$ $H_{b1}$

avec $\left| \begin{array}{l} H_1(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1} \quad \text{on note } H_1' = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \quad \underline{\text{FTSO PB1}} \\ H_2(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} \quad : \quad \underline{\text{FTSO d'un PB 1.}} \end{array} \right.$

NB: $G_{dB} = 20 \log |H_1 H_2| = \underbrace{20 \log |H_1|}_{= -20 \log |H_1'|} + 20 \log |H_2|$

$= 20 \log |H_2| - 20 \log |H_1'|$

$\Rightarrow G_{dB} = G_{dB_2} - G_{dB_1'}$




④ Pulsation de coupure:

$G = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 2\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2$

$\Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2$

$\Rightarrow \omega^2 \left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}}}$

ou encore $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{\tau_2^2 - \tau_1^2}}$

⑤ A partir de la FFSO :

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2} \Rightarrow \boxed{s(t) + \tau_2 \frac{ds(t)}{dt} = e(t) + \tau_1 \frac{de(t)}{dt}}$$

⑥ On exploite la linéarité du filtre ⇒ le signal de sortie est constitué de la somme des réponses à chacun des harmoniques du signal.

$$V_E(t) = A\cos^2(\omega t) = \underbrace{\frac{A}{2}}_{\text{composante continue}} + \underbrace{\frac{A}{2}\cos(2\omega t)}_{\text{seule composante sinusoïdale}}$$

Calcul des amplitudes en sortie

→ Signal de sortie correspondant à la composante continue : $\frac{A}{2} \times \overset{1}{\overset{\shortparallel}{|G(0)|}} = \frac{A}{2}$

→ —— —— sinusoïdale : $\frac{A}{2} \times G(2\omega) = \frac{A}{2} \times \left(\frac{1 + (2\omega\tau_1)^2}{1 + (2\omega\tau_2)^2}\right)^{1/2} = 0{,}10\frac{A}{2}$

de plus : Phase de la composante sinusoïdale

$$\varphi_s = \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\varphi_e} + \arg H(2j\omega) = \arctan 2\omega\tau_1 - \arctan 2\omega\tau_2 = -0{,}09$$

Ainsi $\boxed{s(t) = \frac{A}{2} + 0{,}1\frac{A}{2}\cos(2\omega t - 0{,}09)}$

⑦ On étudie ici la réponse indicielle : $e(t) = E$ pour $t > 0$

soit à résoudre : $\tau_2 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = E$

$$\Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_2} s(t) = \frac{E}{\tau_2}$$

$$\begin{cases} s_H(t) = K e^{-\frac{t}{\tau_2}} \\ s_p(t) = E \end{cases} \Rightarrow s(t) = s_H(t) + s_p(t) = E + K e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

C.I. à $t = 0$ $\quad v_c(t=0) = 0$

donc $s(t=0) = U_{R_2}(t=0) = R_1\, i(t=0)$

$i(t=0)$ est obtenu par le diviseur de tension que constituent les résistances $R_1$ et $R_2$ : $\quad i(t=0) = \dfrac{E}{R_1+R_2}$

donc $\quad s(t=0) = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} E$

finalement : $\quad E + K = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} E \Rightarrow K = \dfrac{R_1 - R_1 - R_2}{R_2+R_2} E = \dfrac{-R_2}{R_1+R_2} E$

et donc $\quad \boxed{s(t) = E\left(1 - \dfrac{R_2}{R_1+R_2}\, e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)}$

Exercice n°2 : Linéarité et non linéarité des filtres

① Par définition, un filtre linéaire ne peut pas faire apparaître en sortie des fréquences non présentes en entrée ( le filtre n'agit que sur l'amplitude et la phase, donc :

→ le filtre 1 est non linéaire en raison de la présence de 2 raies supplémentaires par rapport au spectre du signal d'entrée (à 5 kHz et 6 kHz)

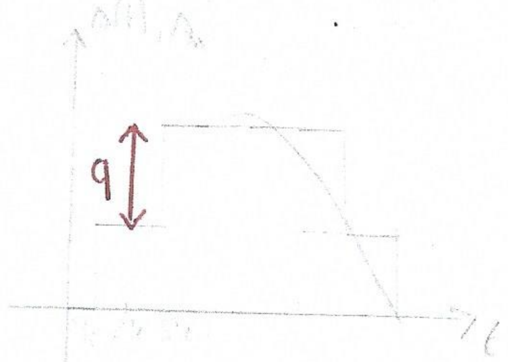
→ les filtres 2 et 3 sont à priori linéaires

② → filtre 2 laisse l'harmonique 4 inchangé alors que 3 est un peu atténué et 2 très fortement ⇒ filtre passe-haut avec $f_c \sim 2$ kHz

→ filtre 3 laisse quasi inchangés les harmoniques 1 et 2 atténue 3, et fait disparaître 4 ⇒ passe-bas avec $f_c = 3$ kHz.

## Exercice n°8 : Erreur de quantification

①



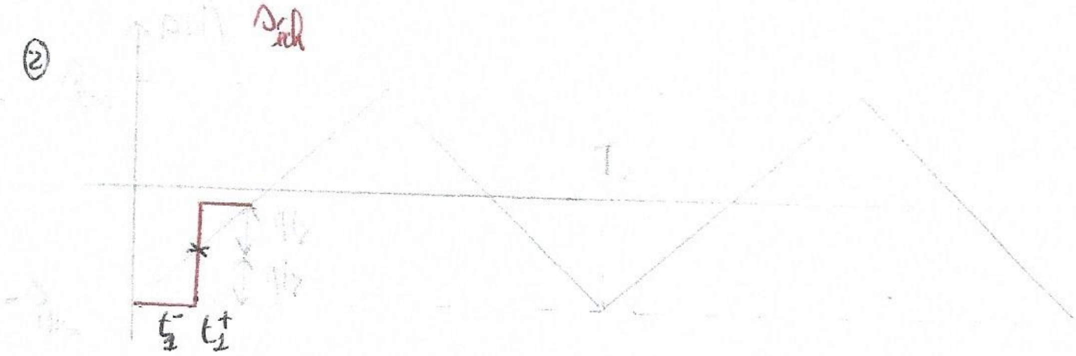
Basculement de $s_n$ à $s_{n+1} = s_n + q$

si $s(t) > s_n + \frac{q}{2}$

$\Rightarrow$ erreur d'arrondi $\boxed{\varepsilon \in \left[-\frac{q}{2} ; +\frac{q}{2}\right]}$

soit $\varepsilon = \max(|s(t) - s_n|)$

②



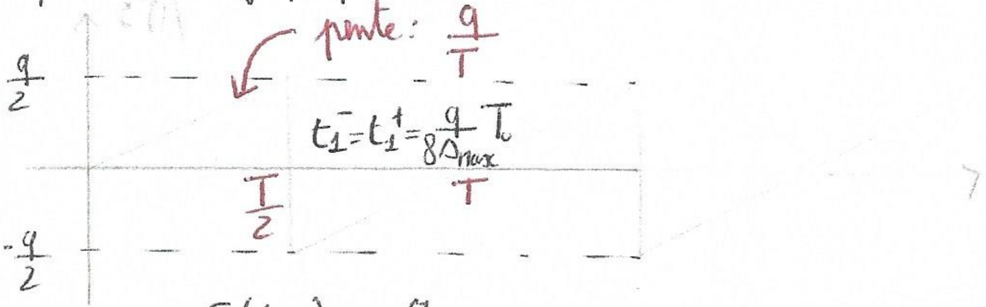

$\rightarrow \varepsilon = s(t) - s_{éch}$ évolue entre $0$ et $\frac{q}{2}$ entre $t=0$ et $t = t_1^-$

Puis basculement à $\varepsilon = -\frac{q}{2}$

$\rightarrow$ Durée de la montée de $0$ à $\frac{q}{2}$ (pour $\varepsilon$) : pente de $s(t)$ $p = \frac{2s_{Max}}{\frac{T_0}{2}} = \frac{4s_{Max}}{T_0}$

donc $p \times (t_1^-) = \frac{q}{2} \Rightarrow t_1^- = t_1^+ = \frac{q}{2p} = \frac{q}{8s_{Max}} T_0$

Bilan : représentation graphique de $\varepsilon(t)$




$\varepsilon(t_1^-) = \frac{q}{2}$

$\varepsilon(t_1^+) = -\frac{q}{2}$

NB : on appelle $T$ la période de ce signal

③ Le signal d'erreur étant impair $\Rightarrow \langle \varepsilon(t) \rangle = a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{(T)} \varepsilon(t).dt = 0$

Puis : $\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{(T)} \underbrace{\varepsilon^2(t)}_{\text{paire}}.dt = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} \varepsilon^2(t).dt$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\left(\frac{q}{T}t\right)^2 dt = \frac{2q^2}{\cancel{T^3}}\,\frac{\cancel{T^3}}{3\times 8} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{eff} = \sqrt{\langle \varepsilon^2(t) \rangle} = \frac{q}{2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{q^2}{12}$$

A.N. ⚠ codage sur $n$ bits $\Rightarrow$ représentation des nombres $\in [0 ; 2^n - 1]$

donc le pas de quantification est (CAN linéaire)

$$q = \frac{\Delta s}{2^n - 1} \qquad \text{A.N.} \quad \varepsilon_{eff} = \frac{q}{2\sqrt{3}} = \frac{\Delta s}{2\sqrt{3}\,(2^n - 1)}$$

soit $\dfrac{\varepsilon_{eff}}{\Delta s} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}\,(2^n - 1)} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \left.\dfrac{\varepsilon_{eff}}{\Delta s}\right|_{8\,bits} = 1{,}13.10^{-3} \\ \left.\dfrac{\varepsilon_{eff}}{\Delta s}\right|_{12\,bits} = 7{,}05.10^{-5} \end{array} \right.$

④ $|\varepsilon(t)|$ inchangé $\Rightarrow \varepsilon_{eff}$ inchangé $\Rightarrow$ idem

⑤ Amplitude élevée $\Rightarrow$ on peut assimiler la courbe à une succession de portions linéaires

portion considérée comme linéaire
$\Rightarrow$ étude précédente avec $s(t)$ triangle
exploitable ici

## Exercice n° 5 : Détection de signaux micro-ondes

Ecriture du signal : $s(t) = A\cos(\overbrace{2\pi f t + \underbrace{\varphi_0(t)}_{\text{phase à l'origine non stable}}}^{\theta(t)})$

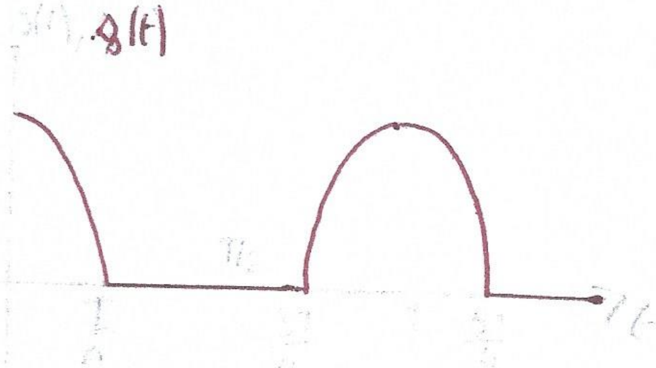
1a) Filtre moyenneur $\Rightarrow$ $\boxed{\text{sortie} = \langle s(t)\rangle = 0}$

$\rightarrow$ incapable d'extraire l'amplitude A

b) fréquence instantanée de ce signal : $f_s = \frac{1}{2\pi}\frac{d\,\theta(t)}{dt} = f + \frac{d\varphi_0}{dt}\frac{1}{2\pi}$ $\quad \frac{d\varphi_0}{dt} \neq 0$

$\Rightarrow f_s = fct(t) \Rightarrow$ la fréquence n'étant pas stable $\Rightarrow$ non filtrable

2) a)




on fixe $\varphi(t) = C^{te} = 0$

b) alternances négatives coupées $\Rightarrow$ redresseur

c) Composante continue : $a_0 = \langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{(T)} s(t).dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} s(t).dt$

$= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} A\cos(\omega t).dt = \frac{2A}{T\omega}\left[\sin\omega t\right]_0^{T/4} = \frac{2A}{\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cancel{T}} = \frac{A}{\pi}$

Signal pair $\Rightarrow$ on calcule les $a_n$:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(n\omega t).dt = \frac{4A}{T}\int_0^{T/4}\cos(\omega t)\cos(n\omega t).dt$$

$$= \frac{2A}{T}\int_0^{T/4}\left(\cos(n+1)\omega t + \cos(n-1)\omega t\right).dt$$

$$= \frac{2A}{\cancel{T}(n+1)\frac{2\pi}{\cancel{T}}}\left[\sin(n+1)\frac{\pi}{2}\right] + \frac{2A}{\cancel{T}(n-1)\frac{2\pi}{\cancel{T}}}\left[\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{A}{(n+1)\pi}\left[\sin(n+1)\frac{\pi}{2}\right] + \frac{A}{(n-1)\pi}\left[\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

<u>mieux</u>: on calcule séparément cas $n=1$ et $n>1$

$$a_1 = \frac{2A}{T}\int_0^{T/4}\cos(2\omega t).dt + \frac{2A}{T}\int_0^{T/4}dt$$

$$= \frac{2A\cdot}{\cancel{T}\,2\times\frac{2\pi}{\cancel{T}}}\left[\sin 2\omega t\right]_0^{\frac{T}{4}} + \frac{2A}{T}\times\frac{T}{4}$$

$$= \frac{A}{2\pi}\sin\left(2\times\frac{2\pi}{\cancel{T}}\times\frac{\cancel{T}}{4}\right) + \frac{A}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{A}{2}$$

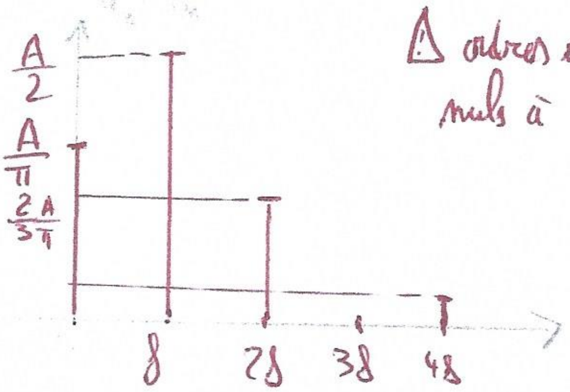
$$a_2 = \frac{A}{3\pi}\underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{=-1} + \frac{A}{\pi} = \frac{A}{\pi} - \frac{A}{3\pi} = \frac{2A}{3\pi}$$

$a_3 = 0$

$a_4 \neq 0$

$\vdots$

Spectre :



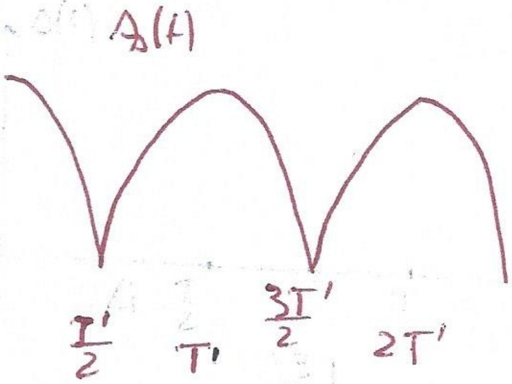

⚠ ordres impairs nuls à partir de $n>1$

d) filtre passe-bas ⇒ il reste $\langle s(t)\rangle = a_0 = \frac{A}{\pi}$

si $G_{dB}(\omega=0) = 0$ i.e $G(\omega=0) = 1$ on a $D = \frac{A}{\pi}$.

soit $\boxed{\frac{D}{A} = \frac{1}{\pi}}$

③ a) <u>Representation du signal</u>




<u>csq</u>: l'opérateur bialternance permet de doubler la fréquence du signal donc du fondamental.

et calcul harmoniques identiques en posant $\omega \to 2\omega$ $(T \to \frac{T}{2})$

et ma forme de signal entre $[0 ; \frac{T'}{2}]$

qu'entre $[0 ; \frac{T}{4}]$ précédemment

b) Interêt du bialternance :

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T'}\int_{(T')} s(t).dt = \frac{1}{T'} \times 2A\int_0^{\frac{T'}{2}=\frac{T}{4}} \cos(\omega t).dt$$

$$= \frac{2A}{T'\frac{2\pi}{T}}\left[\sin \frac{2\pi}{\cancel{T}} \times \frac{\cancel{T}}{4}\right] = \frac{2A}{\pi}$$

c) <u>Intérêt</u>: on double la sensibilité avec $\frac{D'}{A} = \frac{2}{\pi}$.

Exercice n°12 : Spectre d'un signal numérique

$\alpha = \frac{\tau}{T_e}$.

① $C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) e^{-jn2\pi\nu t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\alpha\frac{T_e}{2}}^{\alpha\frac{T_e}{2}} \underbrace{g(t)}_{E} e^{-jn2\pi\nu t} dt$

$= \frac{E}{T_e} \int_{-\alpha\frac{T_e}{2}}^{+\alpha\frac{T_e}{2}} e^{-jn2\pi\nu t} dt = \frac{E}{T_e(-jn2\pi\nu)} \left[ e^{-jn2\pi\nu\alpha\frac{T_e}{2}} - e^{+jn2\pi\nu\alpha\frac{T_e}{2}} \right]$

$= E\alpha \left[ \frac{\sin(n\pi\alpha)}{+n\pi\alpha} \right] \Rightarrow C_n = E\alpha \, \text{sinc}(n\pi\alpha)$ (1)

$\hat{I}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi\nu t} . dt = E \int_{-\alpha\frac{T_e}{2}}^{\alpha\frac{T_e}{2}} e^{-j2\pi\nu t} . dt$

1 seule impulsion

$= E \left[ \frac{e^{-j\pi\alpha} - e^{+j\pi\alpha}}{-j2\pi\nu} \right] = \frac{E\alpha}{\nu} \left[ \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} \right]$

$\Rightarrow \hat{I}(\nu) = E\alpha T_e \, \text{sinc}(\pi\alpha)$ (2)

donc en identifiant (1) et (2) $C_n = \frac{1}{T} \hat{I}(n\nu)$

② Oui ! $C_n = \frac{1}{T_e} \int_{-T/2}^{+T_e/2} g(t) e^{-jn2\pi\nu t} . dt$

$\hat{I}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{motif}(t) e^{-j2\pi\nu t} . dt$ $\quad g_{motif}(t) = g(t)$ sur $\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]$

$= 0$ ailleurs

donc $\hat{I}(\nu) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\, e^{-j2\pi\nu t}\, dt$

donc $\boxed{C_n = \frac{1}{T_e}\hat{I}(n\nu)}$ ⟹ relation généralisable.

③ Δ 0 ou 1 ⟹ impulsion de sa puissance en $\sim |\pm E|^2$.

<u>Rappel</u>: $d_n = |2C_n|$ et $f^2_{eff} = \frac{1}{2}\underset{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ \text{ici}}}{a_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1} |2C_n|^2$

$\Rightarrow \bar{P} = \frac{f_{eff}^2}{R} \sim \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2$

donc $\bar{P} \sim \frac{1}{T^2}\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{I}(n\nu)|^2$.

plutôt:

$f_{eff}^2 = \frac{1}{2}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$.

Extension au cas continu:

$d\bar{P} \sim \frac{1}{T^2}|\hat{I}(\nu)|^2$

soit $\boxed{\frac{d\bar{P}}{d\nu} = \sim \frac{1}{T}|\hat{I}(\nu)|^2}$ densité de puiss.

$\sim \frac{1}{T} \rightarrow d\nu$

④ <u>Nouveau signal</u>: portions de sinusoïdes qui se succèdent

$f_{mv}(t) = f(t) \times A\sin(2\pi\nu_0 t)$

↳ signal de fréquence f impulsionnel $\frac{d\bar{P}}{d\nu} \sim \underbrace{|\hat{I}(\nu)|^2}_{\text{FFT 1 seule impulsion}}$

≡ <u>modulation</u>:

<u>Allure du spectre</u>