

# PROPAGATION EN MILIEU DISPERSIF : PLASMAS - PAQUETS D'ONDE

## Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Ondes dans un plasma</b> . . . . .	<b>3</b>
I.1	Définition . . . . .	3
I.2	Hypothèses «fortes» - modèle retenu . . . . .	3
I.3	Equations dynamiques - conductivité complexe . . . . .	4
	a - Cas général . . . . .	4
	b - Cadre d'étude : le plasma dilué . . . . .	6
I.4	Equations électromagnétiques . . . . .	7
	a - Conservation de la charge - conséquences . . . . .	7
	b - Equation de propagation du champ électrique- analyse harmonique . . . . .	8
	c - Equations de Maxwell complexes - structure de l'onde - permittivité diélectrique complexe . . . . .	8
I.5	Relation de dispersion - vitesse de phase - propagation ou atténuation . . . . .	9
	a - Obtention . . . . .	9
	b - Interprétation physique -vitesse de phase <b>A RETENIR!</b> . . . . .	10
I.6	Structure de l'OEM dans le plasma - cas particulier $\omega = \omega_p$ (résonance du plasma) . . . . .	14
I.7	Analyse énergétique . . . . .	14
	a - Cas de la zone de transparence $\omega > \omega_p$ . . . . .	14
	b - Cas de la zone d'opacité $\omega < \omega_p$ . . . . .	16
I.8	Exemple d'application : transmission par satellite et réflexion ionosphérique . . . . .	17
I.9	Cas général d'un MLHI - indice complexe . . . . .	18
<b>II</b>	<b>Paquets d'ondes et dispersion</b> . . . . .	<b>19</b>
II.1	L'OPPH : une onde sans réalité physique - approche mécanique . . . . .	19
II.2	Principe de construction d'ondes "réalistes" . . . . .	19
	a - Superposition de deux OPPH . . . . .	19
	b - Superposition de nombreuses OPPH . . . . .	21

	c - Le problème de la localisation : superposition continue d'ondes ou paquet d'ondes . . . . .	22
	d - Vitesse de déplacement du paquet : retour sur la vitesse de groupe . . . . .	23
II.3	Déformation du paquet d'ondes : dispersion . . . . .	25
II.4	Retour sur la relation temps-fréquence (hors programme) . . . . .	26

---

# I Ondes dans un plasma

## I.1 Définition

**DÉFINITION - (I.1) - 1:**

On appelle plasma un gaz partiellement ou totalement ionisé et globalement neutre, chaque atome ou molécule ayant au moins libéré un électron :



**Questions :** Conditions de propagation d'une OPPH électromagnétique dans le plasma compte-tenu des interactions possibles entre les charges et le champ  $(\vec{E}, \vec{B})$ ? Exemples d'applications?

## I.2 Hypothèses «fortes» - modèle retenu

On examinera le plasma soumis à un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ , par exemple le champ d'une OPPH se dirigeant vers les  $x$  croissants :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$$

HYPOTHÈSES :

- Nous supposerons également que le plasma possède des propriétés magnétiques identiques à celles du vide, soit :

$$\mu_{\text{plasma}} = \mu_0$$

- Toute charge  $q$  du plasma, ion ou électron, subit les actions conjuguées des contributions magnétiques et électriques du champ de l'onde :

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = \underbrace{q\vec{E}}_{=\vec{f}_e} + \underbrace{q\vec{v} \wedge \vec{B}}_{=\vec{f}_m}$$

Formons justement le rapport  $\alpha$  des normes des contributions électrique et magnétique de la force de Lorentz :

$$\alpha = \frac{f_{\text{magn}}}{f_{\text{elect}}} = \frac{q\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \simeq \frac{Bv}{E}$$

Par ailleurs, en utilisant la relation de structure de l'onde plane en remplaçant la célérité dans le vide  $c$  par la vitesse de phase de l'onde  $v_\varphi$  (supposée vérifiée lorsque l'onde se déplace dans le plasma !!), on peut dégager un ordre de grandeur entre les amplitudes des champs électrique et magnétique :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{v_\varphi} \underset{v_\varphi \simeq c}{\simeq} \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} \implies B \simeq \frac{E}{c}$$

d'où :

$$\alpha \simeq \frac{Ev}{cE} = \frac{v}{c} \ll 1$$

Conséquence :

la contribution magnétique  $\vec{f}_m$  est négligeable face à la contribution électrique  $\vec{f}_e$  si l'on considère **un mouvement non relativiste des charges**, ce qui sera l'hypothèse retenue ici. donc :

$$\vec{F}_{Lorentz} \simeq \vec{f}_e = q\vec{E} \tag{XVI.1}$$

- On suppose les charges du plasma soumises à une force de frottement type «fluide» (frottement entre charges) :

◇ Frottement sur les électrons de masse  $m$  :

$$\vec{f}_{f_e} = - \frac{m}{\tau} \cdot \vec{v}_e$$

↑  
temps carac. frein.

◇ Frottement sur les ions de masse  $M$  :

$$\vec{f}_{f_i} = - \frac{M}{\tau} \cdot \vec{v}_i$$

↑  
temps carac. frein.

$\tau$  représente le temps caractéristique du freinage avec  $\tau \sim 10^{-15}$  s (bon conducteur solide)  $\leftrightarrow 10^{-3}$  s (plasma dilué)

### I.3 Equations dynamiques - conductivité complexe

a - Cas général

On appellera  $\begin{cases} M : \text{la masse de l'ion} \\ m : \text{la masse de l'électron} \end{cases}$

Chaque charge du plasma, électron ou ion du est soumise à l'action du champ électrique  $\vec{E}$  de l'onde ; les équations dynamiques du problème sont obtenues en appliquant la RFD aux électrons et cations **supposés monovalent i.e.  $z = 1$**  du plasma :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cas des électrons : } m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } e^-}}{x_e}, t) - \frac{m}{\tau} \cdot \vec{v}_e \\ \text{cas des ions : } M \frac{d\vec{v}_i}{dt} = e\vec{E}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. ion}/e^-}}{x_i}, t) - \frac{M}{\tau} \cdot \vec{v}_i \end{array} \right.$$

On pose les hypothèses suivantes :

- les  $e^-$  et les ions peu distants à l'échelle de la longueur d'onde :  $|x_i - x_e| \ll \lambda \implies \vec{E}(x_i, t) \simeq \vec{E}(x_e, t)$
- l'onde dans le plasma est une OPPH  $\implies$  on peut réécrire les équations précédentes en RSF.

$$\begin{cases} \left( j\omega + \frac{1}{\tau} \right) m \vec{v}_e = -e \vec{E} \implies \vec{v}_e = -\frac{e}{\left( j\omega + \frac{1}{\tau} \right) m} \cdot \vec{E} \\ \left( j\omega + \frac{1}{\tau} \right) M \vec{v}_i = e \vec{E} \implies \vec{v}_i = +\frac{e}{\left( j\omega + \frac{1}{\tau} \right) M} \cdot \vec{E} \end{cases}$$

En appelant  $N_e$  et  $N_i$  avec  $N_i = N_e = N$  (neutralité du milieu) les densités volumiques électronique et ionique, on peut écrire le vecteur densité volumique de courant :

$$\vec{J} = \sum_{\text{charges } p} n_p q_p \vec{v}_p = -N_e e \vec{v}_e + N_i e \vec{v}_i = N e (\vec{v}_i - \vec{v}_e)$$

soit en formalisme complexe :

$$\vec{J} = \frac{N e^2}{\left( j\omega + \frac{1}{\tau} \right)} \underbrace{\left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)}_{=\frac{1}{\mu}} \vec{E} \quad \text{avec } \mu = \frac{mM}{m+M} \text{ masse réduite du système (ion, } e^-)$$

soit finalement :

$$\vec{J} = \frac{N e^2}{\left( j\omega + \frac{1}{\tau} \right) \mu} \vec{E}$$

De plus,  $m \ll M$  par exemple  $\frac{m}{m_{\text{proton}}} \simeq \frac{1}{1800} \ll 1$  ce qui entraîne naturellement  $\mu \simeq m$  et donc :

$$\vec{J} \simeq \frac{N e^2}{\left( j\omega + \frac{1}{\tau} \right) m} \vec{E} \quad (\text{XVI.2})$$

A l'aide de la loi d'Ohm locale :

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

que l'on rapproche de l'équation XVI.2, on déduit par identification la **conductivité complexe du plasma** :

$$\underline{\gamma}(\omega) = \frac{N e^2}{\left( j\omega + \frac{1}{\tau} \right) m} \quad [\gamma] = R^{-1} \cdot L^{-1} \rightarrow S \cdot m^{-1} \quad (\text{XVI.3})$$

REMARQUE - (I.3) - 1:

- On suppose ici une ionisation unique i.e.  $z = 1$ .

- Cas d'un gaz plusieurs fois ionisé : si  $z > 1$  alors 
$$\begin{cases} N_i = \frac{N}{z} & \text{et} & q_i = +ze \\ N_e = N & \text{et} & q_e = -e \end{cases}$$

On a alors :

$$\vec{J} = \sum_{\text{charges } p} n_p q_p \vec{v}_p = - \underbrace{N_e}_{=N} e \vec{v}_e + \underbrace{N_i}_{=\frac{N}{z}} \underbrace{q_i}_{=ze} \vec{v}_i = Ne(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$$

et

$$\begin{cases} \vec{v}_e = - \frac{e}{\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right) m} \cdot \vec{E} \\ \vec{v}_i = + \frac{ze}{\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right) M} \cdot \vec{E} \end{cases}$$

soit finalement :

$$\vec{J} = Ne(\vec{v}_i - \vec{v}_e) = \frac{Ne^2}{\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)} \left(\frac{z}{M} + \frac{1}{m}\right) \vec{E}$$

**b - Cadre d'étude : le plasma dilué**

Dans le cadre du programme, nous limitons notre étude aux hypothèses suivantes :

- Plasma «dilué» soit un temps de relaxation du freinage  $\tau$  élevé, soit :  $\tau \sim 10^{-3} \text{ s}$
- Fréquence «suffisamment» élevé (OEM HF) :  $\omega \gg 10^6 \text{ rad.s}$

$$\implies \omega \gg \frac{1}{\tau} \implies \omega\tau \gg 1$$

ce qui entraine une écriture simplifiée de la densité volumique de courant :

$$\underline{\gamma}(\omega) = \frac{Ne^2}{j\omega m} \tag{XVI.4}$$

Ainsi, en formalisme réel, l'équation XVI.2 s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{Ne^2}{m} \vec{E} \tag{XVI.5}$$

## I.4 Equations électromagnétiques

### a - Conservation de la charge - conséquences

L'analyse précédente montre la présence d'un courant volumique  $\vec{J}$  au sein du plasma. La section suivante examine cette fois le cas de la charge volumique locale  $\rho$ .

L'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0$$

soit en RSF :

$$j\omega \underline{\rho} + \text{div} [\underline{J}] = j\omega \underline{\rho} + \underbrace{\gamma \text{div} \vec{E}}_{= \frac{\rho}{\epsilon_0}} = 0$$

$$\underline{\rho} \left[ \frac{\gamma}{\epsilon_0} + j\omega \right] = 0$$

qui donne en injectant l'expression de la conductivité complexe :

$$\underline{\rho} \left[ \frac{Ne^2}{jm\omega\epsilon_0} + j\omega \right] = \underline{\rho} \left[ -j \frac{Ne^2}{m\omega\epsilon_0} + j\omega \right] = 0$$

soit :

$$j\omega \underline{\rho} \left[ 1 - \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2} \right] = 0$$

et enfin en posant l'expression de la **pulsation plasma** :  $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$

$$j\omega \underline{\rho} \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] = 0$$

Deux situations possibles pour assurer la validité de l'équation de conservation de la charge :

$$\begin{cases} \omega = \omega_p & \Rightarrow \boxed{\underline{\rho} \neq 0} & \Rightarrow \rho \neq 0 & \text{possible résonance du plasma (cf plus loin dans ce cours)} \\ \omega \neq \omega_p & \Rightarrow \boxed{\underline{\rho} = 0} & \Rightarrow \rho = 0 & \text{cas de notre étude (électronneutralité locale du plasma)} \end{cases}$$

**A RETENIR** : le plasma est toujours **neutre** :  $\begin{cases} \text{globalement} \\ \text{localement si } \omega \neq \omega_p \end{cases}$

**b - Equation de propagation du champ électrique- analyse harmonique**

Compte-tenu des résultats précédents, les équations de Maxwell dans le plasma s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \underbrace{\vec{J}}_{\neq \vec{0}} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{array} \right.$$

L'équation de propagation du champ électrique est obtenu par la même démarche que dans le cas du vide ; on prend ainsi le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \vec{E}] = \operatorname{grad} [\operatorname{div} \vec{E}] - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} [\operatorname{rot} \vec{B}]$$

Par ailleurs, comme  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left[ \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$ , en combinant ces deux dernières équations, on obtient :

$$\operatorname{grad} [\operatorname{div} \vec{E}] - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \left[ \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right]$$

qui devient en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ , et l'expression du courant de densité volumique  $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{Ne^2}{m} \vec{E}$  :

$$\Delta \vec{E} - \frac{\mu_0 Ne^2}{m} \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{(XVI.6)}$$

PRINCIPE DE L'ANALYSE HARMONIQUE : cette équation présente de fortes similitudes avec l'équation de D'Alembert ; en outre l'OPPH étant l'élément de base de décomposition de tout signal on pourra rechercher des solutions de type OPPH complexes se propageant dans le plasma : d'expression

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

**NB** :  $\vec{k}$  peut-être complexe (cf plus bas MLHI)  $\rightarrow \underline{\vec{k}}$

**c - Equations de Maxwell complexes - structure de l'onde - permittivité diélectrique complexe**

Si le milieu est siège d'une OPPH alors les équations de Maxwell deviennent en formalisme complexe :

$$MG : \operatorname{div} \vec{E} = -j \vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \implies \vec{k} \perp \vec{E} \text{ donc } \vec{E} \text{ est transverse dans le plasma}$$

$$MF : \operatorname{rot} \vec{E} = -j \vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \implies \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \text{ relation de structure de l'OPPH dans le plasma}$$

$$MT : \operatorname{div} \vec{B} = -j \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \implies \vec{k} \perp \vec{B} \text{ donc } \vec{B} \text{ est transverse dans le plasma}$$

$$MA : \operatorname{rot} \vec{B} = -j \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + j\epsilon_0 \omega \vec{E} \right)$$

L'écriture de l'équation de Maxwell-Ampère peut être modifiée avec :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left( \frac{Ne^2}{j\omega m} \frac{j\omega}{j\omega} \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

soit encore :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \epsilon_0 - \frac{Ne^2}{m\omega^2} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

d'où :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \left( 1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0 \omega^2} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Pour rapprocher l'équation de celle obtenue habituellement dans le vide, on pose la grandeur complexe  $\epsilon_r$  appelée permittivité diélectrique relative complexe :

$$\epsilon_r = 1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0 \omega^2}$$

on obtient finalement la nouvelle formulation de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{avec } \epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

## I.5 Relation de dispersion - vitesse de phase - propagation ou atténuation

### a - Obtention

#### **DÉFINITION - (I.5) - 2:**

Relation liant la norme du vecteur d'onde avec la pulsation d'une OPPH pour que cette dernière soit solution de l'équation de propagation :

$$k = f(\omega)$$

En général, se présente plutôt sous la forme :  $k^2 = f(\omega^2)$

**Exemple** : relation de dispersion du vide (cf chapitre XV) :  $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$

**NB** : l'obtention de la relation de dispersion est une question ultra-classique des écrits, et cette dernière peut être dégagée de plusieurs manières; voici trois méthodes qu'il faut parfaitement connaître, le choix de la plus adaptée se fera en fonction de la formulation de l'énoncé.

**Hypothèse :** Supposons une OPPH se propageant dans le milieu :  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

- MÉTHODE N°1 : (la plus proche de la définition, mais la moins fréquente dans les énoncés d'écrits.)

**Exercice de cours:** (I.5) - n° 1 Retrouver la relation de dispersion en utilisant l'équation de propagation des champs XVI.6 dégagée dans l'exercice précédent.

- MÉTHODE N°2 : en formalisme complexe "pur"

Les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \Rightarrow -j \vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} & \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) & \Rightarrow -j \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left( -j \frac{Ne^2}{m\omega} + j\epsilon_0\omega \right) \vec{E} \end{cases}$$

Les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère permettent avec l'expression du vecteur densité volumique de courant dégagée ci-dessus de transformer l'équation de Maxwell-Faraday ainsi :

$$-jk \vec{e}_x \wedge \left( \frac{k \vec{e}_x \wedge \vec{E}}{\omega} \right) = \mu_0 \left( -j \frac{ne^2}{m\omega} + j\epsilon_0\omega \right) \vec{E}$$

En explicitant et en simplifiant cette relation, on obtient :

$$k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \left( 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2} \right)$$

soit avec la pulsation plasma  $\omega_p$  :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \epsilon_r \quad (\text{Relation de Klein-Gordon}) \quad (\text{XVI.7})$$

**REMARQUE - (I.5) - 2:**

La relation de dispersion du plasma est **non linéaire**, ce qui entrainera des conséquences importantes dans la propagation de signaux réels dans ce milieu.

**b - Interprétation physique -vitesse de phase A RETENIR!**

Supposons l'OPPH se dirigeant dans le sens des  $x$  croissants i.e.  $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ .

On envisage deux cas de figure pour interpréter la relation de dispersion du plasma :

• CAS  $\omega > \omega_p$  :

Dans cette situation, le nombre d'onde  $k$  est réel, et sera noté  $k'$ . En ne retenant que la solution positive on obtient :

$$k'(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Le champ électrique a ainsi pour expression :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j[\omega t - k'(\omega)x]} \equiv \text{onde qui se propage selon } x \nearrow$$

soit en notation réelle :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos [\omega t - k'(\omega)x] = \vec{E}_0 \cos \left[ \omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} x \right] = \vec{E}_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v_\varphi(\omega)} \right) \right]$$

en définissant la **vitesse de phase**, ou vitesse de déplacement d'un plan de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c!!!!!!$$

REMARQUE - (I.5) - 3:

On constate que la vitesse de phase exprimée ci-dessus est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide, ce qui peut paraître incohérent. Nous verrons par la suite, dans l'étude des *paquets d'ondes*, qu'il n'en est rien, puisque cette vitesse ne correspond pas à la vitesse de propagation d'une information (ou de l'énergie) ; le postulat de relativité restreinte n'est donc pas violé ! En outre, nous examinons le déplacement du plan de phase d'une OPPH, onde sans réalité physique.

Interprétation et conclusion :

- ◇ Il y a propagation pour  $\omega > \omega_p$  : on parle de **zone transparence**.
- ◇ la relation de dispersion  $k = f(\omega)$  est non linéaire  $\implies v_\varphi = \frac{k(\omega)}{\omega} = f(\omega) \neq cste$

**Conséquence** : si une onde est composée de plusieurs OPPH (cf. synthèse de Fourier) alors il correspond une vitesse de phase différente pour chaque composante et le paquet d'onde se déforme au cours de sa propagation. On parle de **dispersion** (cf plus bas)

REMARQUE - (I.5) - 4:

Une relation de dispersion linéaire type  $k = cste \times \omega$  assure l'absence de dispersion puisqu'alors la vitesse de phase est indépendante de la pulsation. On peut citer l'exemple du vide (déjà calculé dans le chapitre XV sur la propagation des OEM dans le vide) :

$$k = \frac{\omega}{c} \implies v_\varphi(\forall \omega) = \frac{\omega}{k} = c = cste$$

En outre, on peut caractériser le milieu par son **indice optique**  $n'$  :

$$k' = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{=k_0 \text{ cas du vide}} = n' \frac{\omega}{c}$$

en posant l'indice optique

$$n' = \frac{k'}{k_0} = \frac{c}{\omega} k' = \frac{c}{v_\varphi}$$

avec ici dans le cas du plasma :

$$n' = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

réel dans le cas présent.

• CAS  $\omega < \omega_p$  :

Si maintenant  $\omega < \omega_p$ , la relation de dispersion indique que le nombre d'onde est cette fois imaginaire pur :

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \underbrace{\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]}_{<0} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1\right]$$

d'où :

$$k = \pm j \left(\frac{\omega}{c}\right) \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$$

$k$  étant ici complexe, nous le noterons  $\underline{k}$  avec :

$$\underline{k}(\omega) = \pm j k'' \quad \text{avec } k''(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$$

**En ne retenant que la racine de partie imaginaire négative**<sup>1</sup>, le champ électrique correspondant à une onde se propageant dans le sens des "x" croissants s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - \underline{k}x)} = \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t + j k''(\omega)x)} \\ \implies \underline{\vec{E}} &= \vec{E}_0 \cdot e^{-k''(\omega)x} \cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

soit en notation réelle :

1. L'autre racine conduisant à une amplitude divergente pour le champ  $\vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \underbrace{e^{-k''(\omega)x}}_{\text{terme d'atténuation}} \cdot \cos(\omega t)$$

Le tracé de la norme du champ en fonction de  $x$  à  $t$  fixé est représenté ci-dessous :

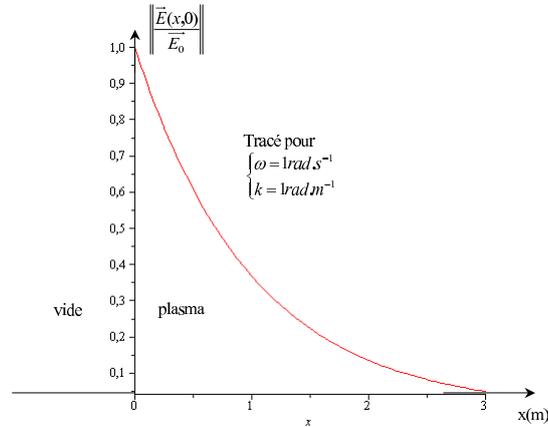


FIGURE XVI.1 – Amplitude évanescente du champ électrique dans le plasma

**Interprétation et conclusion :**

- On constate qu'il n'y a pas de propagation dans ce domaine de pulsation, et que l'amplitude du champ électrique est évanescente : on parle de **zone d'opacité**.
- Compte tenu de la formulation du champ électrique il est impossible de définir une vitesse de phase.
- On peut définir une profondeur caractéristique de pénétration du champ avec :

$$\delta''(\omega) = \frac{1}{k''(\omega)} = \frac{c}{\omega \sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1}}$$

Comme pour l'indice optique, on définit ici l'indice d'extinction  $n''$  par la relation :

$$k'' = n'' \frac{\omega}{c}$$

soit :

$$n'' = \frac{c}{\omega} k''$$

avec ici dans le cas du plasma

$$n'' = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$$

## I.6 Structure de l'OEM dans le plasma - cas particulier $\omega = \omega_p$ (résonance du plasma)

■ CAS  $\omega > \omega_p$  :

- L'équation de Maxwell Gauss s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \stackrel{\omega > \omega_p}{=} 0 \Rightarrow -j \vec{k}'(\omega) \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} \text{ est transversal dans le plasma } \forall \omega > \omega_p}$$

- L'équation de Maxwell-flux s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow -j \vec{k}'(\omega) \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} \text{ est transversal dans le plasma } \forall \omega > \omega_p}$$

- L'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -j \vec{k}'(\omega) \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \\ \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k}'(\omega) \wedge \vec{E}}{\omega}} & \quad \boxed{\text{relation de structure de l'OPPH } \forall \omega > \omega_p} \end{aligned}$$

■ CAS  $\omega = \omega_p$  :

Si  $\omega = \omega_p$  (condition de résonance du plasma) on rappelle que la conservation de la charge conduit à l'éventuelle existence d'une densité volumique de charge non nulle :

$$-j \vec{k} \cdot \vec{E} = \rho(\omega = \omega_p) \neq 0$$

ainsi

$$\boxed{E_{\parallel} \neq 0} \quad // \text{ désignant la direction parallèle à } \vec{k}'$$

$\Rightarrow$  Existence de modes longitudinaux (cf TD)

COMPLÉMENT EN LIVE : le plasma est en résonance à  $\omega_p$ .

## I.7 Analyse énergétique

a - Cas de la zone de transparence  $\omega > \omega_p$

- CHAMP MAGNÉTIQUE

On donne l'expression du champ électrique de l'OPPH polarisée par exemple selon  $\vec{e}_y$  :

$$\vec{E} = E_0 e^{j[\omega t - k'(\omega)x]} \vec{e}_y$$

avec  $k'(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

Donc :

$$\vec{B} = \frac{k' \vec{e}_x \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{n'}{c} E_0 e^{j[\omega t - k'(\omega)x]} \vec{e}_z$$

soit en notation réelle :  $\vec{B} = \frac{n'}{c} E_0 \cos(\omega t - k'(\omega)x) \vec{e}_z$

- PUISSANCE TRANSPORTÉE : VECTEUR DE POYNTING

ATTENTION : ce calcul nécessite le retour à la notation réelle.

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

soit :

$$\vec{R} = \frac{n'}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2[\omega t - k'(\omega)x] \vec{e}_x$$

et en valeur moyenne :

$$\langle \vec{R} \rangle_t = \frac{n'}{2\mu_0 c} E_0^2 \vec{e}_x \implies \text{L'énergie se propage !}$$

- PUISSANCE CÉDÉE AUX PORTEURS DE CHARGE (PERTE OU NON D'ÉNERGIE ?)

Avec l'expression du champ électrique

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k'x)} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k'x)$$

et la densité volumique de courant :

$$\vec{J} = \frac{Ne^2}{j\omega m} \vec{E} = \frac{-jNe^2}{\omega m} \vec{E} \Rightarrow \vec{J} = \mathcal{R}_e \left[ \frac{-jNe^2}{\omega m} \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - k'x)} \right] = \frac{Ne^2}{m\omega} \vec{E}_0 \sin(\omega t - k'x)$$

on calcule la puissance volumique cédée aux porteurs de charge du plasma :

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{Ne^2}{m\omega} E_0^2 \sin(\omega t - k'x) \cos(\omega t - k'x)$$

Ce qui conduit en valeur moyenne à :

$$\langle \mathcal{P}_{vol} \rangle_t = 0$$

**CONCLUSION :** On constate que la puissance moyenne cédée au milieu est nulle. La puissance de l'onde est donc intégralement "transportée" par celle-ci dans ce modèle élémentaire de plasma. Le milieu est excité mais restitue intégralement l'énergie !

**b - Cas de la zone d'opacité  $\omega < \omega_p$**

• CHAMP MAGNÉTIQUE

On rappelle, là-encore, l'expression du champ électrique dans ce domaine de fréquence :

$$\vec{E} = E_0 \cdot e^{-k''(\omega)x} \cdot e^{j\omega t} \vec{e}_y$$

Comme précédemment, le champ magnétique est calculé à l'aide de la relation de structure de l'onde plane, soit :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = -\frac{jk'' \vec{e}_x \wedge \vec{E}}{\omega} = -j \frac{n''}{c} E_0 \cdot e^{-k''(\omega)x} \cdot e^{j\omega t} \vec{e}_z$$

soit en notation réelle :

$$\vec{B} = \frac{n''}{c} E_0 \cdot e^{-k''(\omega)x} \cdot \sin \omega t \cdot \vec{e}_z$$

• PUISSANCE TRANSPORTÉE : VECTEUR DE POYNTING

Le calcul est élémentaire et donne :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{n''}{\mu_0 c} E_0 \cdot e^{-2k''(\omega)x} \sin \omega t \cdot \cos \omega t \cdot \vec{e}_x$$

Soit finalement en valeur moyenne temporelle :

$$\langle \vec{R} \rangle_t = \vec{0} \implies \text{L'énergie ne se propage pas !}$$

Ainsi, l'énergie électromagnétique ne se propage pas dans le milieu.

$\implies$  on doit naturellement examiner si cette dernière est cédée aux porteurs de charge (§ suivant.)

• PUISSANCE CÉDÉE AUX PORTEURS DE CHARGE

Avec l'expression du champ électrique

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-k''(\omega)x} \cdot e^{j\omega t} \implies \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-k''(\omega)x} \cdot \cos(\omega t)$$

et la densité volumique de courant :

$$\vec{J} = \frac{Ne^2}{j\omega m} \vec{E} = -j \frac{Ne^2}{\omega m} \vec{E} \implies \vec{J} = \frac{Ne^2}{m\omega} E_0 \cdot e^{-k''(\omega)x} \cdot \sin(\omega t)$$

la puissance volumique cédée aux porteurs de charge est donc :

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{Ne^2}{m\omega} E_0^2 \cdot e^{-2k''(\omega)x} \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

qui là encore possède une valeur moyenne temporelle nulle :

$$\langle \mathcal{P}_{vol} \rangle_t = 0$$

CONCLUSION : l'analyse précédente montre donc que la puissance électromagnétique ne se propage pas et n'est pas non plus absorbée par le milieu. Elle est donc simplement réfléchi à l'interface entre le milieu de propagation initial et le plasma, ce dernier restituant l'énergie par oscillation des charges (le milieu rayonne dans la profondeur d'excitation, soit quelques  $\delta^{\prime\prime}$ ).

### I.8 Exemple d'application : transmission par satellite et réflexion ionosphérique

Dans la zone de haute atmosphère (50 à 1000 km), les rayonnements solaires provoquent l'ionisation, au moins partielle, des molécules de dioxygène et de diazote (essentiellement). Cette zone atmosphérique est appelée ionosphère et sa densité électronique est de l'ordre de  $N \simeq 10^{10} \text{ m}^{-3} \leftrightarrow 10^{12} \text{ m}^{-3}$ . Ce milieu est donc "actif" vis à vis des OEM qui le rencontrent.

On calcule en particulier l'ordre de grandeur de la fréquence plasma :  $f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} = 1 \text{ MHz} - 10 \text{ MHz}$ .

- Dans la zone de fréquence  $f < f_p$  on a **opacité de l'ionosphère** : l'onde ne traverse pas le plasma mais excite les particules qui ré-émettent selon une réflexion  $\Rightarrow$  COMMUNICATIONS TERRESTRES PAR RÉFLEXION SUR L'IONOSPHERE (1er succès : Marconi en 1901 pour la première communication hertzienne trans-continentale).
- Dans la zone de fréquence  $f > f_p$  : on a **transparence de l'ionosphère**, il n'y a pas d'effet d'atténuation d'amplitude, et l'onde traverse la plasma avec **dispersion**  $\Rightarrow$  COMMUNICATIONS SATELLITAIRES (1er succès : Spoutnik 1 le 4/10/1957 fréquences 20.005 et 40.002 MHz).

En outre, en exploitant des fréquences hautes de l'ordre de  $10^{10} \text{ Hz}$  à  $10^{11} \text{ Hz} \gg f_p$  on assure une faible dispersion ; en effet :

$$k'(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \simeq \frac{\omega}{c} \Rightarrow v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \neq f(\omega) \quad \text{dispersion négligeable}$$

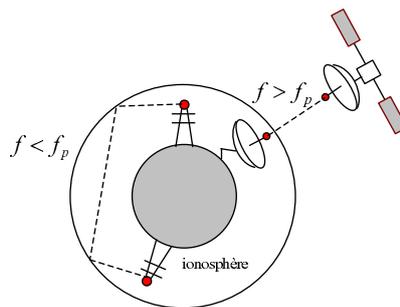


FIGURE XVI.2 – Communications hertziennes terrestres et satellitaires

### Conclusion :

Le cas du plasma sans interaction («dilué») est singulier car il découple les phénomènes de dispersion et d'atténuation :

- dispersion pour  $\omega > \omega_p$  avec  $k = k'(\omega) \in \mathbb{R}$
- atténuation pour  $\omega < \omega_p$  avec  $k = -jk''(\omega) \in \mathbb{C}$

qui interviennent dans des domaines de fréquences disjoints. Dans le cas général, lorsque l'on tient compte d'interactions de frottement entre les particules du milieu (ce qui a été négligé ici), **absorption et atténuation interviennent simultanément** (cf TD et modèle MLHI ci-dessous).

### I.9 Cas général d'un MLHI - indice complexe

**DÉFINITION - (I.9) - 3:**  
 MLHI : milieu linéaire homogène isotrope.

Dans le cas des MLHI,  $\underline{k}$  comporte à la fois une partie réelle et une partie imaginaire (couplage atténuation et dispersion) :

$$\boxed{\underline{k} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dispersion}}}{k'(\omega)} - j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{atténuation}}}{k''(\omega)}} \implies \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{atténuation}}}{e^{-k''(\omega)x}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propag. avec dispersion}}}{e^{j(\omega t - k'(\omega)x)}}$$

La relation de dispersion prend alors la forme très générale suivante :

$$\underline{k}^2 = \underline{\epsilon}_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \text{ avec } \underline{\epsilon}_r \text{ permittivité diélectrique relative complexe}$$

On définit l'indice complexe  $\underline{n}$  du MLHI par :

$$\underline{n}^2 = \underline{\epsilon}_r$$

avec

$$\underline{n} = n' - jn''$$

La relation de dispersion s'écrit donc :

$$\underline{k}^2 = \underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

soit :

$$\underline{k} = \pm \underline{n} \frac{\omega}{c} = \pm n' \frac{\omega}{c} \mp jn'' \frac{\omega}{c}$$

avec  $k' > 0$ , on a :

$$k' = n' \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad k'' = +n'' \frac{\omega}{c}$$

soit :

$$\begin{cases} n' = c \frac{k'(\omega)}{\omega} = \frac{c}{v_\varphi(\omega)} \text{ indice optique du MLHI} \\ n'' = +c \frac{k''}{\omega} \text{ indice d'extinction du MLHI} \end{cases}$$

## II Paquets d'ondes et dispersion

### II.1 L'OPPH : une onde sans réalité physique - approche mécanique

L'utilisation de l'OPPH comme modèle d'onde, ainsi que la puissance du formalisme complexe qui lui est naturellement associé ont permis de dégager bon nombre de propriétés essentielles dans ce qui précède (relation de dispersion, distance caractéristique d'atténuation, vitesse de phase etc...). Néanmoins, ce modèle occulte un aspect essentiel de tout phénomène propagatif : ce dernier possède un début, une fin, et comporte de fait une étendue spatio-temporelle limitée, ce qu'une OPPH est incapable de décrire convenablement en raison de son caractère périodique. Nous avons déjà vu dans le chapitre sur la propagation des OEM dans le vide que la synthèse de Fourier permettait à partir de l'élément de base qu'est l'OPPH et de la donnée du spectre  $\underline{g}(\omega)$  du signal de reconstituer ce dernier par intégrale de Fourier.

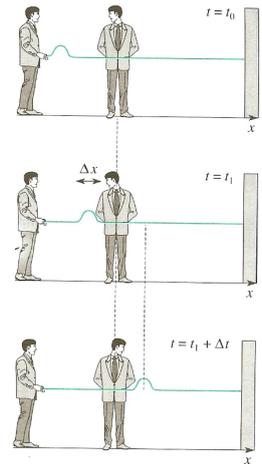


FIGURE XVI.3 – Propagation d'un signal d'extension spatiale

On retiendra la propriété suivante :

**PROPRIÉTÉ - (II.1) - 1:**

*Du fait de son caractère périodique et donc non localisé, une OPPH est incapable de décrire un phénomène de propagation finie dans l'espace et le temps.*

La suite du chapitre propose de revenir sur ce principe de construction d'ondes «réalistes», c'est à dire ne présentant aucune périodicité spatio-temporelle, et possédant donc une extension finie.

Par ailleurs, nous verrons que les propriétés des milieux dispersifs ne sont pas sans conséquences sur la propagation des signaux réels (ex. cas du plasma).

QUESTION : comment construire une onde réelle? → **par synthèse de Fourier à partir d'OPPH!!!**

### II.2 Principe de construction d'ondes "réalistes"

#### a - Superposition de deux OPPH

Superposons deux OPPH de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , supposées en phase à  $t = 0$  et en  $x = 0$ , et de même amplitude se propageant dans un milieu caractérisé par sa relation de dispersion  $k = k(\omega)$ . On posera pour le calcul  $\omega_1 < \omega_2$  :

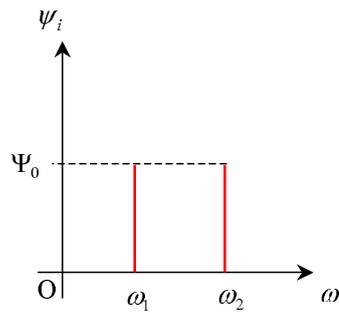


FIGURE XVI.4 – Spectre d'un "paquet" de deux ondes de même amplitude

$$\psi(x, t) = \psi_0 \times \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \psi_0 \times \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$\text{avec : } \begin{bmatrix} k_1 = k(\omega_1) \\ et \\ k_2 = k(\omega_2) \end{bmatrix} \text{ donnés par la relation de dispersion du milieu}$$

**NB** : Ces fonctions sont liées à la nature du milieu de propagation.

On supposera les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  voisines, et on adoptera les notations suivantes :

$$\begin{cases} \omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ \delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \\ k_m = \frac{k_1 + k_2}{2} \simeq k(\omega_m) \\ \delta k = \frac{k_2 - k_1}{2} \end{cases}$$

Avec ces notations, on obtient sans peine l'expression de l'onde résultante :

$$\psi(x, t) = \psi_0 \times [\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)]$$

$$\psi(x, t) = 2\psi_0 \times \cos\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}t - \frac{(k_2 - k_1)}{2}x\right) \times \cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t - \frac{(k_1 + k_2)}{2}x\right)$$

soit finalement :

$$\psi(x, t) = 2\psi_0 \times \underbrace{\cos(\delta\omega t - \delta k x)}_{\text{terme d'enveloppe lent}} \times \underbrace{\cos(\omega_m t - k_m x)}_{\text{terme de phase rapide}}$$

Le signal obtenu est représenté sur la figure ci-contre :

Ce graphe comporte deux phénomènes :

- d'une part un signal rapide de pulsation  $\omega_m$  et se propageant à la **vitesse de phase** :

$$v_\varphi = \frac{\omega_m}{k_m} \quad (\text{XVI.8})$$

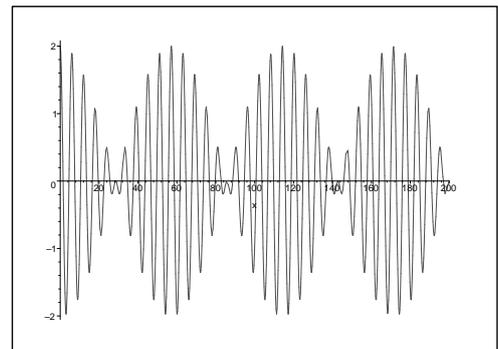


FIGURE XVI.5 – Paquet de deux OPPH

- d'autre part une modulation de l'amplitude du signal appelée "enveloppe" de pulsation  $\delta\omega$  et se propageant à la vitesse  $v_g$  appelée **vitesse de groupe** :

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \tag{XVI.9}$$

**REMARQUE - (II.2) - 5:**

On note que cette superposition de deux OPPH ne permet toujours pas de décrire un phénomène limité dans l'espace et le temps ; elle ne convient donc pas pour modéliser un phénomène propagatif réel.

**b - Superposition de nombreuses OPPH**

Afin de remédier à ce problème de localisation de l'onde, on propose de superposer un nombre  $2N + 1$  d'OPPH de même amplitude, dont les pulsations respectives sont réparties entre les deux pulsations extrêmes  $\omega_{-N}$  et  $\omega_{+N}$  à intervalles réguliers de  $\delta\omega$ . On suppose le milieu non dispersif :

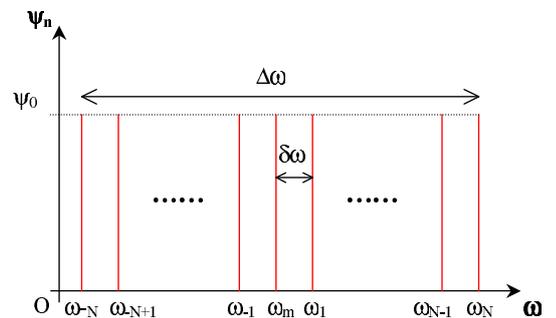


FIGURE XVI.6 – Distribution spectrale discrète de  $2N + 1$  OPPH

L'onde résultante s'écrit donc :

$$\psi(x, t) = \sum_{n=-N}^{n=+N} \psi_0 \times \cos(\omega_n t - k_n x) \quad \text{avec} \quad k_n = k(\omega_n)$$

$$\text{en posant : } \begin{cases} \omega_n = \omega_m + n \times \delta\omega & \text{avec } \omega_m = \frac{\omega_{-N} + \omega_N}{2} \text{ et } \delta\omega = \frac{\Delta\omega}{2N} = \frac{\omega_N - \omega_{-N}}{2N} \\ k_n = k_m + n \times \delta k & \text{avec } k_m = k(\omega_m) \text{ et } \delta k = \frac{\Delta k}{2N} = \frac{k(\omega_N) - k(\omega_{-N})}{2N} \end{cases}$$

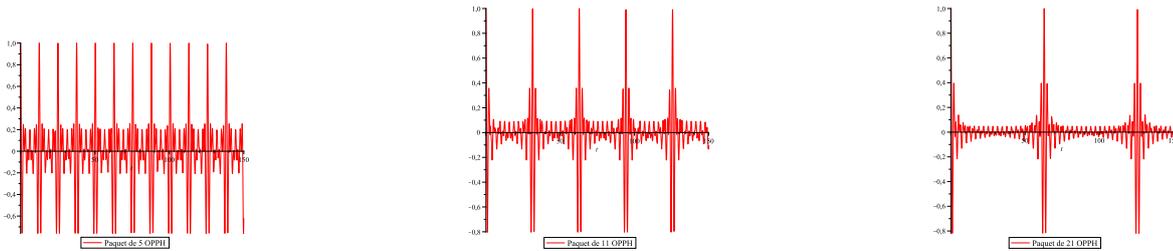
**Exercice de cours: (II.2) - n° 2** Calcul d'un paquet d'ondes à répartition spectrale discrète.

Montrer à l'aide du formalisme complexe que l'onde résultant de la superposition de  $2N + 1$  ondes s'écrit :

$$\psi(x, t) = \psi_0 \underbrace{\frac{\sin \left[ \frac{2N+1}{2} (\delta\omega t - \delta k x) \right]}{\sin \left[ \frac{(\delta\omega t - \delta k x)}{2} \right]}}_{\text{enveloppe du signal}} \times \cos(\omega_m t - k_m x)$$

La suite propose d'illustrer graphiquement la modification du paquet d'onde lorsque le nombre  $2N + 1$  de composantes spectrales croît, ceci toujours dans la perspective de réaliser la synthèse d'un paquet d'ondes localisé, c'est à dire sans périodicité.

Les graphiques suivants représentent l'évolution temporelle de la fonction  $\psi(x, t)$  à la position fixée  $x = 0$  pour les cas  $N = 2$  (paquet de 5 OPPH),  $N = 5$  (paquet de 11 OPPH), et  $N = 10$  (paquet de 21 OPPH) en amplitude normalisée :



Ces représentations montrent qu'en dépit du nombre  $N$  croissant de composantes harmoniques dans l'onde résultante  $\psi$ , cette dernière n'est toujours pas localisée, car son enveloppe est toujours périodique dans le temps. Cette période est celle du facteur le plus lent dans l'expression calculée de  $\psi$  (le dénominateur de pulsation  $\delta\omega/2$ ) et vaut :

$$T_{env} = \frac{4\pi}{\delta\omega} \text{ soit une période apparente } T_{app} = \frac{T_{env}}{2} = \frac{2\pi}{\delta\omega}$$

**c - Le problème de la localisation : superposition continue d'ondes ou paquet d'ondes**

La fabrication d'un paquet d'ondes par superposition discrète d'OPPH n'assure toujours pas que le phénomène ondulatoire décrit soit localisé.

En observant l'expression de la période d'enveloppe indiquée ci-dessus, on constate que l'on peut "éteindre" cette périodicité, c'est à dire faire tendre  $T$  vers l'infini ( $T \rightarrow +\infty$ ) en imposant simplement :

$$\delta\omega \rightarrow 0$$

Ainsi l'écart entre les différentes pulsations des OPPH sommées doit être nul.

En d'autre terme, ceci revient à dire que l'on doit sommer une infinité d'OPPH comprise entre 2 pulsations extrêmes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  définissant la **largeur spectrale**  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  du paquet d'ondes.

On parlera de **spectre continu** et le signal  $\psi(x, t)$  prendra alors la forme d'une intégrale en remplacement de la sommation discrète formant alors un **paquet d'onde** :

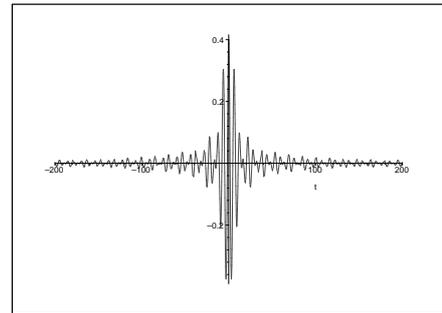
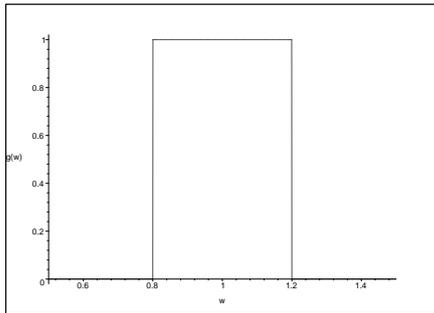
$$\psi(x, t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \underline{g}(\omega) \times e^{j[\omega t - k(\omega)x]} \cdot d\omega = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{g}(\omega) \times e^{j[\omega t - k(\omega)x]} \cdot d\omega}_{=TF^{-1}\text{synthèse de Fourier}} \tag{XVI.10}$$

**REMARQUE - (II.2) - 6:**

La fonction  $\underline{g}(\omega)$  est le spectre (complexe !) du signal ou densité spectrale, et correspond à l'amplitude des différentes OPPH du signal en fonction de la pulsation (accompagnée de la phase à travers son argument). C'est une fonction continue, ce qui assure la continuité de répartition des composantes spectrales ( $\delta\omega \rightarrow 0$ ) .

EXEMPLE :

Spectre «rectangulaire» de fréquences (peu réaliste mais pédagogique !!!) et allure du paquet d'ondes obtenu :



**d - Vitesse de déplacement du paquet : retour sur la vitesse de groupe**

Supposons un paquet d'ondes d'amplitude spectrale  $|g(\omega)|$ .

En outre, si ce dernier possède un spectre relativement étroit autour de la pulsation centrale  $\omega_m$ , soit  $\omega_m \gg \Delta\omega$ , on peut développer au premier ordre l'expression de  $k(\omega)$  avec  $\omega$  voisin de  $\omega_m$ , soit :

$$k(\omega) \simeq k(\omega_m) + (\omega - \omega_m) \frac{dk}{d\omega}$$

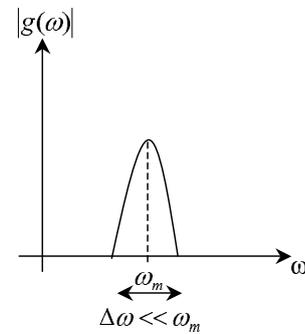


FIGURE XVI.7 – Spectre d'un signal réel

On pose par ailleurs :  $\delta\omega = \omega - \omega_m$  (écart à la pulsation moyenne) soit aussi par simple différenciation  $d(\delta\omega) = d\omega$ .

On a :

$$\underline{\psi}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{g}(\omega) \times e^{j[\omega t - k(\omega)x]} \cdot d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{g}(\omega) \times e^{j[(\omega_m + \delta\omega)t - (k(\omega_m) + \delta\omega \frac{dk}{d\omega})x]} \cdot d(\delta\omega)$$

soit :

$$\underline{\psi}(x, t) = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{g}(\omega) \times e^{j[\delta\omega t - \delta\omega \frac{dk}{d\omega} x]} \cdot d(\delta\omega) \right) \cdot e^{j(\omega_m t - k(\omega_m)x)}$$

**NB :** le calcul de  $\left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_m}$  nécessite la connaissance de la relation de dispersion.

qui devient finalement en posant :  $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_m}$ ,  $v_\varphi = \frac{\omega_m}{k(\omega_m)}$ , et en limitant l'intégration à la largeur spectrale totale  $\Delta\omega$

$$\underline{\psi}(x, t) \simeq \underbrace{\left( \int_{\Delta\omega} \underline{g}(\omega) e^{j \delta\omega \left( t - \frac{x}{v_g} \right)} \cdot d(\delta\omega) \right)}_{\text{terme de modulation d'amplitude} = F\left(t - \frac{x}{v_g}\right)} \times \underbrace{e^{j\omega_m \left( t - \frac{x}{v_\varphi} \right)}}_{\text{terme de phase rapide}}$$

soit :

$$\boxed{\underline{\psi}(x, t) \simeq F\left(t - \frac{x}{v_g}\right) \times e^{j\omega_m \left( t - \frac{x}{v_\varphi} \right)}}$$

**Interprétons cette expression :**

- le second terme est le terme de phase de l'«onde moyenne» du paquet d'ondes. Ce terme de variation "rapide" se déplace à la vitesse de phase  $v_\varphi$  et ne recouvre aucune réalité physique ; en particulier sa vitesse  $v_\varphi$  n'est pas la vitesse de déplacement du paquet d'ondes et donc pas la vitesse de l'information véhiculée par le paquet d'ondes que l'on cherche à transmettre. Il est en quelques sorte "un vestige" de l'usage des OPPH dans la construction du paquet d'ondes réel.
- le premier terme  $F\left(t - \frac{x}{v_g}\right)$  est un facteur de modulation de l'amplitude. Ce facteur d'enveloppe témoigne bien d'une propagation puisqu'il est caractérisé par un groupement de variable  $t - \frac{x}{v_g}$ . Il se propage à la vitesse de groupe  $v_g$ . C'est bien la vitesse du paquet d'ondes!!!

A RETENIR :

**DÉFINITION - (II.2) - 4:**

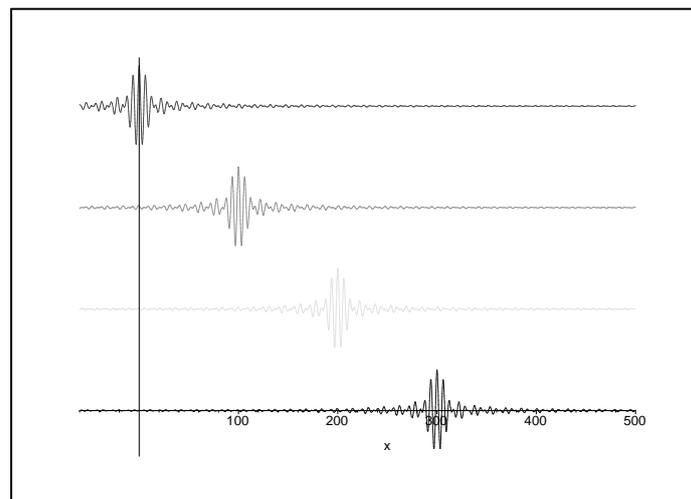
Dans le cas d'un paquet d'onde de spectre continu, de largeur spectrale assez étroite autour de la pulsation "médiane"  $\omega_m$ , le paquet d'ondes résultant se déplace à la vitesse de groupe d'expression :

$$v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_m} \quad (\text{XVI.11})$$

**PROPRIÉTÉ - (II.2) - 2:**

Lorsque l'on transmet une information, par exemple le long d'une corde en imprimant une déformation à l'une des extrémités, seule la vitesse du paquet d'ondes importe  $\implies$  la vitesse de groupe correspond donc à la vitesse de propagation de l'information ou bien de l'énergie du signal.

Le graphe ci-dessous (obtenu en simulation sous MAPLE) représente le paquet d'ondes à 4 dates différentes durant sa propagation :



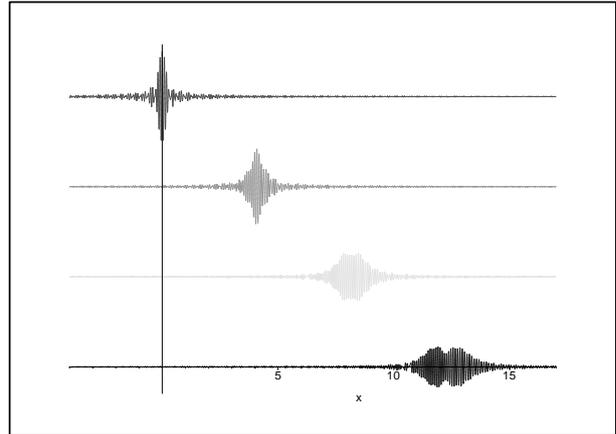
**Exercice de cours:** (II.2) - n° 3 Déterminer pour le plasma étudié en partie I l'expression de la vitesse de groupe<sup>2</sup>. Commenter. Tracer sur le même graphe l'évolution des vitesses de groupe et de phase en fonction de la pulsation.

### II.3 Déformation du paquet d'ondes : dispersion

2. Résultat :  $v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

Intéressons nous maintenant au cas de la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif comme le plasma décrit en première partie de ce chapitre. On rappelle que dans ce cas, la vitesse de phase dépend de la fréquence, ce qui entraîne une vitesse de phase différente pour toutes les composantes OPPH du signal localisé. Voyons sur une simulation l'effet de cette situation.

Nous reprenons ci-dessous le cas d'une onde construite à partir d'une distribution spectrale rectangulaire, mais la propagation est envisagée cette fois dans un milieu dispersif, c'est à dire avec  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = f(\omega) \neq cste$ , ce qui correspond simplement à une relation de dispersion  $k = f(\omega)$  non linéaire. CF SIMULATION MAPLE



## II.4 Retour sur la relation temps-fréquence (hors programme)

Examinons le paquet d'onde précédent évoluant dans le temps à la position fixée  $x = 0$ , soit :

$$\underline{\psi}(0, t) = e^{j\omega_m t} \cdot \int_{\Delta\omega} \underline{g}(\omega) \times e^{j(\delta\omega t)} \cdot d(\delta\omega) = e^{j\omega_m t} \int_{\Delta\omega} |g(\omega)| \times e^{j[\delta\omega t + \alpha(\omega)]} \cdot d(\delta\omega) \quad (\text{XVI.12})$$

avec :  $\underline{g}(\omega) = |g(\omega)| \times e^{j\alpha(\omega)}$  spectre du signal.

**NB** : l'argument  $\alpha(\omega)$  de la fonction  $\underline{g}(\omega)$  représente la phase, propre à chaque "composante harmonique" de pulsation  $\omega$  du paquet d'ondes.

En supposant le paquet d'ondes étroit, on peut développer la grandeur  $\alpha$  autour de  $\omega_m$  pulsation centrale du paquet ; nous obtenons :

$$\alpha(\omega) = \alpha(\omega_m) + \underbrace{(\omega - \omega_m)}_{=\delta\omega} \frac{d\alpha}{d\omega} \Big|_{\omega_m} = \alpha(\omega_m) - \delta\omega \cdot t_m \quad \text{en posant } t_m = - \frac{d\alpha}{d\omega} \Big|_{\omega_m}$$

ceci en posant pour l'instant un peu artificiellement  $t_m$ .

Le paquet d'onde va finalement s'écrire à la position  $x = 0$  :

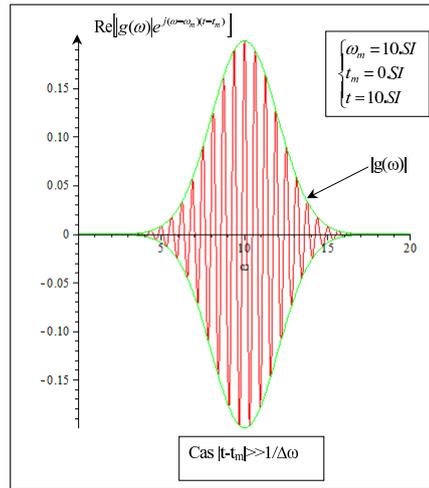
$$\underline{\psi}(0, t) = e^{j[\omega_m t + \alpha(\omega_m)]} \times \int_{\Delta\omega} |g(\omega)| \times e^{j[\delta\omega \cdot (t - t_m)]} \cdot d\omega \quad (\text{XVI.13})$$

CONSIDÉRONS ALORS 2 CAS DE FIGURE :

■ si  $|t - t_m| \gg \frac{1}{\Delta\omega}$ , c'est à dire si l'on considère le paquet d'ondes à une date très éloignée de  $t_m$ , alors l'intégrant oscille un grand nombre de fois sur le domaine d'intégration  $\Delta\omega$  ; en conséquence, l'intégrale prend une valeur négligeable (fonction pseudo-périodique) (destruction du paquet par interférences des composantes) :

$$\psi(0, t) \simeq 0$$

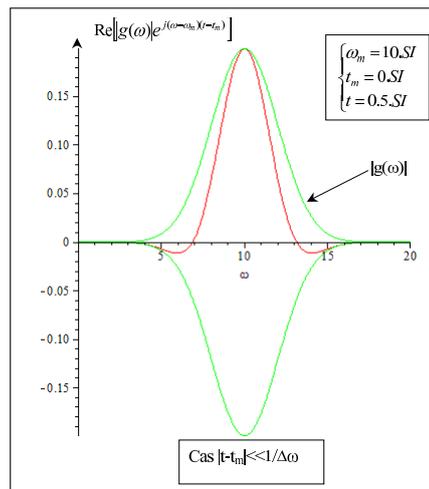
Le graphe ci-dessous, représentant la partie réelle de l'intégrant résume ceci :



■ si  $|t - t_m| \ll \frac{1}{\Delta\omega}$ , c'est à dire si l'on considère le paquet d'ondes à une date proche de  $t_m$ , alors la fonction à intégrer n'oscille quasiment plus et  $\psi(0, t)$  est maximal, i.e. :

$$\psi(0, t) \neq 0$$

Là encore cette situation est résumée dans le graphe ci-dessous :



CONSÉQUENCES :

- ❶ Ainsi, la "position temporelle" du centre du paquet d'onde est  $t_m = - \left. \frac{d\alpha(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_m}$ , soit la date à laquelle le paquet passe en  $x = 0$ .
- ❷ Lorsque  $t$  s'écarte de la valeur  $t_m$ ,  $\psi(0, t)$  décroît, et cette décroissance devient appréciable si  $e^{j[\delta\omega \times (t-t_m)]}$  oscille à peu près une fois lorsque  $\omega$  parcourt le domaine  $\Delta\omega$ , c'est à dire lorsque :

$$\delta\omega \times (t - t_m) \simeq 2\pi$$

soit

$$\Delta\omega \times (t - t_m) \simeq 2\pi$$

Si  $\Delta t$  est la largeur totale temporelle du paquet, alors :

$$\Delta\omega \times \underbrace{\Delta t}_{\text{étendue temporelle du paquet d'onde}} \simeq 2\pi \implies \Delta f \times \Delta t \simeq 1 \quad (\text{XVI.14})$$

Cette dernière propriété est essentielle puisqu'elle montre qu'un paquet d'onde de spectre étroit possède une étendue temporelle importante et inversement.

De manière analogue, on démontre que :

$$\Delta k \times \underbrace{\Delta x}_{\text{étendue spatiale du paquet d'onde}} \geq 2\pi \quad (\text{XVI.15})$$

relation qui lie l'étendue spatiale  $\Delta x$  du paquet d'onde avec sa largeur spectrale en nombre d'onde  $\Delta k$