

LOIS DU FROTTEMENT SOLIDE

Sommaire

I	Rappels et éléments fondamentaux de cinématique et dynamique du solide	3
I.1	Les mouvements du solide et des solides en contact	3
	a - Relation du champ des vitesses d'un solide (RCVS) - translation d'un solide	3
	b - Vitesse de glissement entre deux solides	5
	c - Vitesses de roulement et de pivotement (hors programme, mais bien utile pour comprendre la suite!) - cas de la translation pure	7
	d - Condition de roulement sans glissement (CRSG hors programme))	7
I.2	Rappels des théorèmes de dynamique du solide	8
	a - Théorème de la résultante cinétique	8
	b - Théorème du moment cinétique	9
II	Actions de contact entre deux solides - lois empiriques	13
II.1	Modélisation des actions de contact	13
II.2	Lois d'Amontons-Coulomb	14
	a - Lois d'Amontons	14
	b - Lois de Coulomb	14
III	Mise en oeuvre des lois de frottement solide : effets sur les solides en translation	18
III.1	Première approche simple : le pavet sur un plan incliné	18
	a - Première possibilité : l'équilibre - phénomène d'arc-boutement	18
	b - Seconde possibilité : le glissement avec frottement	18
	c - Troisième possibilité : le basculement	19

III.2	Autres applications simples	20
	a - La marche à pied	20
	b - Le monte charge	20
IV	Aspects énergétiques du frottement solide	21
IV.1	Puissance des actions appliquées à un solide	21
	a - Définition - forme "générique"	21
	b - Forme "utile" - cas du solide en translation (à retenir)	22
	c - Puissance des actions de contact entre deux solides	23
IV.2	Quelques théorèmes utiles d'énergétique : TPC et TEC	24
IV.3	Exemple de bilan énergétique : le monte charge de déménagement	25

I Rappels et éléments fondamentaux de cinématique et dynamique du solide

I.1 Les mouvements du solide et des solides en contact

a - Relation du champ des vitesses d'un solide (RCVS) - translation d'un solide

Considérons un solide S et deux points A et B quelconques de ce solide. Le solide S est en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire, et on lui associe son référentiel propre \mathcal{R}' , c'est à dire rigidement lié à lui¹, d'origine O' .

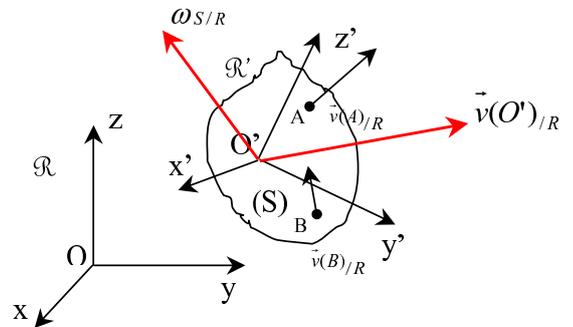


FIGURE II.1 – Degrés de liberté d'un solide

On peut alors noter que :

- $O' \in S$ possède un mouvement de translation
 $\implies 3\delta^\circ$ de liberté de translation
- $\vec{\omega}(R'/R) = \vec{\omega}(S/R)$
 $\implies 3\delta^\circ$ de liberté de rotation

QUESTION : quel lien entre les vitesses de tous les points d'un solide ?

RÉPONSE : relation du champ des vitesses d' un solide

Appliquons la relation de dérivation d'un vecteur à \vec{AB} en appelant $\vec{\omega}_{R'/R}$ le vecteur rotation du solide par rapport au référentiel \mathcal{R} :

$$\left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{AB}$$

soit :

$$\underbrace{\left(\frac{d\vec{AO}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}}_{=-\vec{v}(A)/R} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{OB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{v}(B)/R} = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{AB}$$

On retiendra le résultat suivant :

1. S est donc un "solide de référence" du référentiel \mathcal{R}'

PROPRIÉTÉ - (I.1) - 1:

Lors du mouvement d'un solide S , les vitesses respectives de deux de ses points A et B sont reliées entre-elles par la relation du champ des vitesses dans un solide (RCVS) :

$$\vec{v}(B \in S)_{/R} = \vec{v}(A \in S)_{/R} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overline{AB} \quad (\text{II.1})$$

CADRE DU PROGRAMME :

$$\text{UNIQUEMENT LES SOLIDES EN TRANSLATION} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{\omega}_{S/R} = \vec{0} \\ \vec{v}(A \in S)_{/R} = \vec{v}(B \in S)_{/R} = \vec{v}(\forall M \in S)_{/R} \end{array} \right]$$

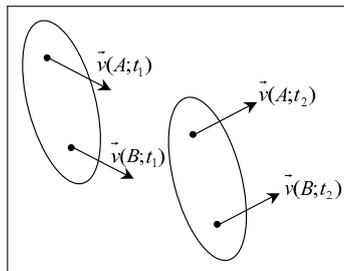


FIGURE II.2 – Translation d'un solide

Attention : cette définition de la translation d'un solide n'implique absolument pas que les trajectoires des points du solide soient rectilignes, ce que l'on peut par exemple observer sur ce schéma représentant la trajectoire d'un hélicoptère. En l'occurrence on parlera ici de translation "circulaire" du solide exactement comme pour un référentiel.

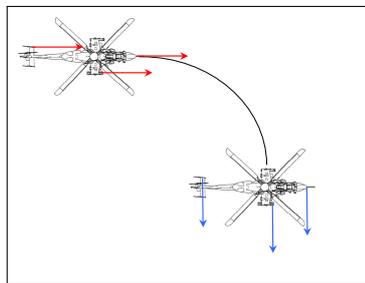


FIGURE II.3 – Exemple de mouvement de translation

b - Vitesse de glissement entre deux solides

On envisage deux solides S_1 et S_2 en mouvement dans le référentiel d'étude \mathcal{R} et en contact.

La notion de contact recouvre 3 possibilités :

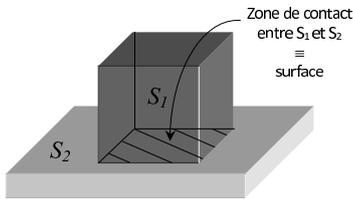


FIGURE II.4 – Contact surfacique

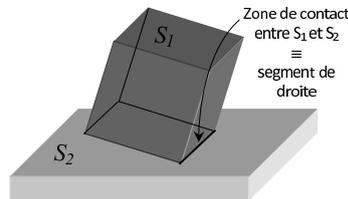


FIGURE II.5 – Contact linéique

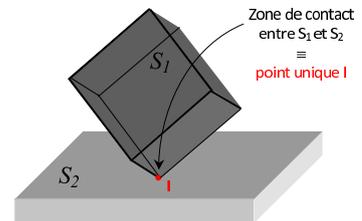


FIGURE II.6 – Contact ponctuel

Dans ces 3 cas de figure, on a au minimum un point de contact I .

QUESTION : comment calculer la vitesse de glissement d'un solide par rapport à un autre en un point de contact I unique ?

On suppose donc le contact ponctuel (fig.6) ; appelons :

- I point géométrique de contact
- I_1 point de S_1 coïncident avec I à l'instant considéré
- I_2 point de S_2 coïncident avec I à l'instant considéré

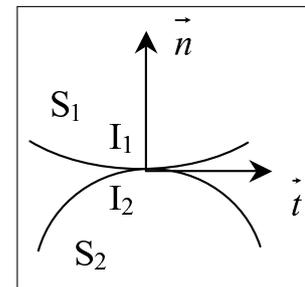


FIGURE II.7 – Contact ponctuel de deux solides

DÉFINITION - (I.1) - 1:

On appelle vitesse de glissement du solide S_1 par rapport au solide S_2 en contact ponctuel notée $\vec{v}_{1/2} = \vec{v}_g(I) = \vec{v}_g$ la vitesse du point $I_1 \in S_1$ par rapport à S_2 :

$$\vec{v}_{1/2} = \vec{v}(I_1)_{/S_2} \tag{II.2}$$

REMARQUE - (I.1) - 1:

Dans l'écriture de la vitesse de glissement de S_1 par rapport à S_2 , le solide S_2 est assimilé à un référentiel par rapport auquel la vitesse est évaluée.

EXPRESSION :

En utilisant la loi de composition des vitesses, en exprimant la vitesse de I_1 on obtient :

$$\vec{v}(I_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(I_1)_{/S_2} + \underbrace{\vec{v}_e(S_2)}_{\text{vitesse } I_2 \text{ coïncid.}} = \vec{v}(I_1)_{/S_2} + \vec{v}(I_2)_{/\mathcal{R}}$$

d'où l'on tire l'expression analytique de la vitesse de glissement :

$$\boxed{\vec{v}_{1/2} = \vec{v}(I_1)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I_2)_{/\mathcal{R}}} \quad (\text{II.3})$$

REMARQUE - (I.1) - 2:

Par un raisonnement similaire, on montre que la vitesse de glissement du solide 2 par rapport au solide 1 est simplement l'opposé de $\vec{v}_{1/2}$.

$$\vec{v}_{2/1} = -\vec{v}_{1/2} \quad (\text{II.4})$$

Exercice de cours: (I.1) - n° 1 *Direction de la vitesse de glissement.*

En évaluant $\vec{v}(I)_{/\mathcal{R}}$ (vitesse du point I) par composition des vitesses avec S_1 puis S_2 , montrer que $\vec{v}_{1/2}$ appartient au plan tangent de contact entre les deux solides.

Réponses :

$$\vec{v}(I)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(I)_{/S_2} + \underbrace{\vec{v}(I_2)_{/\mathcal{R}}}_{=\vec{v}_e} = \vec{v}(I)_{/S_1} + \vec{v}(I_1)_{/\mathcal{R}}$$

soit :

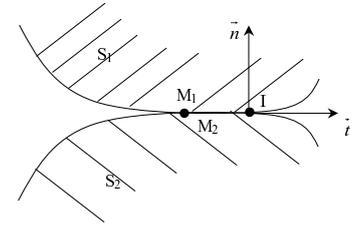
$$\vec{v}_{1/2} = \vec{v}(I_1)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I_2)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(I)_{/S_2} - \vec{v}(I)_{/S_1}$$

or par définition, le point tangent I possède une vitesse appartenant au plan tangent, soit $\begin{cases} \vec{v}(I)_{/S_1} \in \mathcal{P}_{tang} \\ \vec{v}(I)_{/S_2} \in \mathcal{P}_{tang} \end{cases}$

ce qui conduit par force à : $\boxed{\vec{v}_{1/2} \in \mathcal{P}_{tang}}$

c - Vitesses de roulement et de pivotement (hors programme, mais bien utile pour comprendre la suite !) - cas de la translation pure

La vitesse de glissement entre deux solides en un point de contact I caractérise le mouvement relatif entre les deux solides en ce point. Si le contact n'est pas ponctuel, on peut chercher à écrire la vitesse de glissement en un autre point, par exemple en M .



Appelons \mathcal{R} le référentiel d'étude. On peut écrire la vitesse de tout point de contact M_1 de S_1 coïncident avec tout point M_2 de S_2 en écrivant la RCVS en un autre point de contact que I :

$$\begin{cases} \vec{v}(M_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(I_1)_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{S_1/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{I_1M_1} \\ \vec{v}(M_2)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(I_2)_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{S_2/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{I_2M_2} \end{cases}$$

Ainsi, la vitesse de glissement en M est :

$$\begin{aligned} \vec{v}_g(M) &= \vec{v}(M_1) - \vec{v}(M_2) = \vec{v}_g(I) + [\vec{\omega}_{S_1/\mathcal{R}} - \vec{\omega}_{S_2/\mathcal{R}}] \wedge \overrightarrow{IM} \\ &= \vec{v}_g(I) + \vec{\omega}(S_1/S_2) \wedge \overrightarrow{IM} \end{aligned}$$

en posant la vitesse de rotation relative entre les deux solides : $\vec{\omega}(S_1/S_2) = \vec{\omega}_g(S_1/S_2) = \vec{\omega}_{S_1/\mathcal{R}} - \vec{\omega}_{S_2/\mathcal{R}}$

On pose en général : $\vec{\omega}(S_1/S_2) = \omega_n(S_1/S_2)\vec{n} + \omega_t(S_1/S_2)\vec{t}$ avec :

$\omega_n(S_1/S_2)$	vitesse de pivotement de S_1 par rapport à S_2
$\omega_t(S_1/S_2)$	vitesse de roulement de S_1 par rapport à S_2

Cadre du programme : uniquement les solides en translation donc $\vec{\omega}_{S_1/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{S_2/\mathcal{R}} = \vec{\omega}(S_1/S_2) = \vec{0}$

CONSÉQUENCE : dans le cas de la translation, la vitesse de glissement est indépendante du point de calcul :

$$\vec{v}_g(M) = \vec{v}_g(I) = \vec{v}_g(\forall M)$$

d - Condition de roulement sans glissement (CRSG hors programme)

Lors de l'étude du mouvement de deux solides en contact, il peut arriver sous certaines conditions d'adhérence que la vitesse de glissement soit nulle. On parle alors de **roulement sans glissement**.

DÉFINITION - (I.1) - 2:

Lors d'un roulement sans glissement, on a :

$$\vec{v}_{1/2} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}(I_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(I_2)_{/\mathcal{R}} \quad (\text{II.5})$$

EXEMPLE : Transport à rouleaux

NB : le cadre du programme restreint notre travail au cas des solides en translation. Néanmoins, on propose ci-dessous l'exemple classique du transport à rouleaux, dispositif par lequel on translate un solide en en faisant tourner d'autres :

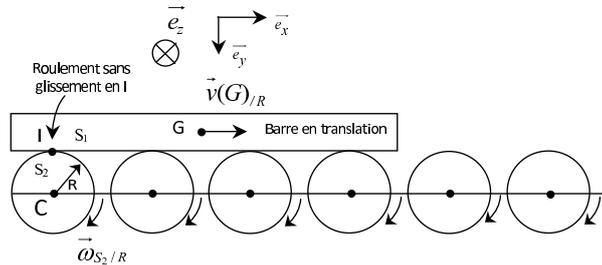


FIGURE II.8 – Principe d'un transport à rouleaux en phase de non glissement

Si le transporteur à rouleaux fonctionne sans glissement, on peut écrire la CRSG au point I de contact entre un des rouleaux et la planche translattée, soit :

$$\vec{v}_g = \vec{v}(S_1/S_2) = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{v}(C)_{/\mathcal{R}}}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}(S_2/\mathcal{R}) \wedge \vec{CI} = \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\omega}(S_1/\mathcal{R})}_{=\vec{0}} \wedge \vec{GI}$$

soit :

$$\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} = R\omega \cdot \vec{e}_x$$

I.2 Rappels des théorèmes de dynamique du solide

a - Théorème de la résultante cinétique

RÉSULTANTE CINÉTIQUE D'UN SOLIDE :

On considère un solide en mouvement dans le référentiel d'étude \mathcal{R} supposé galiléen. La résultante cinétique dans \mathcal{R} de ce système est par définition :

$$\vec{P}_{/\mathcal{R}} = \int_{sol} d\vec{p}(M) = \int_M \vec{v}(M) \cdot dm$$

or

$$\vec{v}(M) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}}$$

d'où

$$\vec{P}_{/\mathcal{R}} = \int_M \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} \cdot dm = \frac{d}{dt} \int_M \vec{OM} \cdot dm$$

et la relation définissant le centre de masse $\int_M \vec{OM} \cdot dm = m \cdot \vec{OG}$ permet finalement d'obtenir :

$$\boxed{\vec{P}_{/\mathcal{R}} = m \cdot \left. \frac{d\vec{OG}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} = m \cdot \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}}$$

THÉORÈME DE LA RÉSULTANTE CINÉTIQUE :

On montre (facilement) que la résultante des forces extérieures est égale à la dérivée temporelle de la résultante cinétique $\vec{P}_{/\mathcal{R}}$ du système, soit :

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_{/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{R}_{ext}} \quad \text{Théorème de la Résultante Cinétique ou TRC} \quad (\text{II.6})$$

ou bien son équivalent :

$$\boxed{m \frac{d\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{R}_{ext}} \quad \text{Théorème du Centre de Masse TCM} \quad (\text{II.7})$$

avec la résultante des actions extérieures :

$$\left[\begin{array}{l} \vec{R}_{ext} = \sum_i \vec{F}_{ext}(M_i) \text{ pour des forces discrètes, } M_i \text{ étant le point d'application de la force } \vec{F}_{ext}(M_i) \\ \vec{R}_{ext} = \int_{sol}^i d\vec{F}(M) = \int_V \vec{f}(M) \cdot d\tau(M) \text{ pour un champ de force volumique } \vec{f}(M) \text{ réparties sur le solide} \end{array} \right.$$

b - Théorème du moment cinétique

MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE PAR RAPPORT À UN POINT (VECTEUR!) :

On reprend le cas du solide en mouvement dans le référentiel d'étude \mathcal{R} supposé galiléen. Le moment cinétique dans $\mathcal{R}[O; x, y, z]$ de ce solide est par définition :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \int_{sol} \vec{OM} \wedge d\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}} = \int_M \vec{OM} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot dm$$

soit :

$$\vec{L}_{O/R} = \int_V \rho(M) \cdot \vec{OM} \wedge \vec{v}(M)_{/R} \cdot d\tau$$

MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE PAR RAPPORT À UN AXE (SCALAIRE!) : pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ_O passant par O , il est très pratique de projeter le moment cinétique sur cet axe pour dégager une formulation scalaire simple et qui sera très utile par la suite :

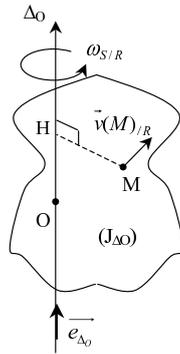


FIGURE II.9 – Solide en rotation autour de l'axe Δ_O fixe

$$L_{\Delta_O} = \vec{L}_{O/R} \cdot \vec{e}_{\Delta_O} = \int_M (\vec{OM} \wedge \vec{v}(M)_{/R}) \cdot \vec{e}_{\Delta_O} \cdot dm = \int_M \left(\underbrace{\vec{e}_{\Delta_O} \wedge \vec{OM}}_{=HM\vec{e}_{\theta}} \right) \cdot \underbrace{\vec{v}(M)_{/R}}_{=HM\omega_{S/R}\vec{e}_{\theta}} \cdot dm$$

soit :

$$L_{\Delta_O} = \omega_{S/R} \underbrace{\int_M HM^2 \cdot dm}_{=J_{\Delta_O} \text{ moment d'inertie du solide } / \Delta_O} = J_{\Delta_O} \cdot \omega_{S/R} \quad (\text{II.8})$$

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE POUR UN SOLIDE :

■ En un point fixe O

On considère un point fixe O du référentiel d'étude supposé galiléen \mathcal{R} . On montre (facilement là-encore) que le moment résultant des forces extérieures appliquées à un solide et calculé en un point O fixe de \mathcal{R} est égal à la dérivée temporelle du moment cinétique cinétique en O de ce solide $\vec{L}_{O/R}$ soit :

$$\frac{d\vec{L}_{O/R}}{dt} = \vec{M}_O(ext) \quad TMC \quad (\text{II.9})$$

avec le moment résultant des forces extérieures :

$$\left[\begin{array}{l} \vec{M}_{O_{ext}} = \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}(M_i)) \quad \text{pour les distributions discrètes de forces} \\ \vec{M}_{O_{ext}} = \int_V \vec{OM} \wedge \vec{f}_{ext}(M) \cdot d\tau(M) \quad \text{pour un solide soumis à la densité de force volumique } \vec{f}_{ext}(M) \end{array} \right.$$

Forme utile : toujours pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ_O passant par O , il est très avantageux de donner une formulation scalaire au TMC par simple projection du TMC vectoriel sur cet axe :

$$\frac{d\vec{L}_{O/R} \cdot \vec{e}_{\Delta_O}}{dt} = \vec{M}_O(ext) \cdot \vec{e}_{\Delta_O}$$

soit :

$$\boxed{J_{\Delta_O} \frac{d\omega_{S/R}}{dt} = M_{\Delta_O}(ext) \quad TMC_{\Delta_O}} \quad (II.10)$$

avec : $M_{\Delta_O} = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_{\Delta_O}$ projection de la résultante de force sur l'axe de rotation.

■ **En un point mobile P** (hors programme, mais bien utile !)

On discrétise le solide pour plus de commodité (n'enlève rien au raisonnement !!)

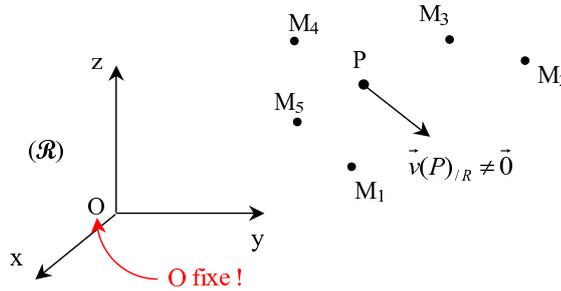


FIGURE II.10 – TMC en un point P mobile

$$\vec{L}_{P/R} = \sum_i \vec{PM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}}$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_{P/R}}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{PM}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}} + \sum_i \vec{PM}_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}}}{dt} \\ &= \sum_i \overbrace{\frac{d\vec{PO}}{dt}}^{=-\vec{v}(P)_{\mathcal{R}}} \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}} + \underbrace{\sum_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}}}_{=\vec{0}} + \sum_i \vec{PM}_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}}}{dt} \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{d\vec{L}_{P/\mathcal{R}}}{dt} = -\vec{v}(P)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P}_{\mathcal{R}} + \sum_i \overrightarrow{PM}_i \wedge \underbrace{m_i \frac{d\vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}}}{dt}}_{=\vec{f}_{i_{int}} + \vec{f}_{i_{ext}}}$$

or on montre très facilement que : $\sum_i \overrightarrow{PM}_i \wedge \vec{f}_{i_{int}} = \vec{0}$ (moment des forces intérieures toujours nul dans un solide/système de points)

donc :

$$\frac{d\vec{L}_{P/\mathcal{R}}}{dt} = -\vec{v}(P)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P}_{\mathcal{R}} + \sum_i \overrightarrow{PM}_i \wedge \vec{f}_{i_{ext}}$$

soit :

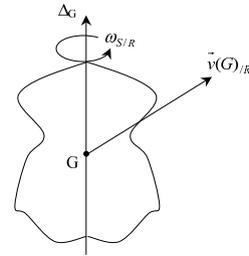
$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{P/\mathcal{R}}}{dt} = -\vec{v}(P)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P}_{\mathcal{R}} + \vec{M}_P(ext)} \quad (II.11)$$

INTÉRÊT : si on choisit $P \equiv G$ (G centre de masse) alors $-\vec{v}(G)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P}_{\mathcal{R}} = \vec{0}$
alors :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{G/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{M}_G(ext) \quad TMC_{\Delta_G}} \quad \text{valable } \forall \text{ mouvement de } G!!! \quad (II.12)$$

FORME UTILE : par ailleurs, si la rotation se fait autour d'un axe de symétrie (axe principal d'inertie), on a (MPSI) : $\vec{L}_{G/\mathcal{R}} = J_G \vec{\omega}_{S/\mathcal{R}}$
donc :

$$\boxed{J_G \frac{d\vec{\omega}_{S/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{M}_G(ext)} \quad (II.13)$$



qui projeté sur l'axe de rotation Δ_G **donne la forme scalaire du TMC** : FIGURE II.11 – Solide en rotation autour d'un axe Δ_G de symétrie

$$\boxed{J_G \frac{d\omega_{S/\mathcal{R}}}{dt} = M_{\Delta_G}(ext)} \quad \text{Forme scalaire du TMC (MPSI)} \quad (II.14)$$

II Actions de contact entre deux solides - lois empiriques

II.1 Modélisation des actions de contact

Expériences préliminaires :

- Masse immobile en contact avec un plan incliné dans le champ de pesanteur : quelle est cette force de maintien ?
- Masse mobile en contact avec un plan incliné dans le champ de pesanteur : la vitesse s'accroît et on constate qu'un solide S_1 en mouvement sur un plan support solide S_2 subit différentes résistances à ses possibles mouvements :

- à la translation de pénétration de S_1 dans $S_2 \Rightarrow$ **action normale de contact de S_2 sur S_1** \vec{R}_{nS_2/S_1}
- à la translation de glissement de S_1 sur $S_2 \Rightarrow$ **action tangentielle de frottement de glissement de S_2 sur S_1** \vec{R}_{tS_2/S_1}
- à la rotation de pivotement de S_1 sur $S_2 \Rightarrow$ **moment normal de frottement de pivotement de S_2 sur S_1** \vec{M}_{nS_2/S_1}
- à la rotation de roulement de S_1 sur $S_2 \Rightarrow$ **moment tangentielle de frottement de roulement de S_2 sur S_1** \vec{M}_{tS_2/S_1}

QUESTION : expressions des actions ?

Choisissons un point I appartenant au **domaine surfacique de contact** ; les actions résultantes au point I peuvent s'écrire :

$$\text{la résultante : } \vec{R}_{S_2 \rightarrow S_1} = \underbrace{\vec{R}_n(I)}_{\text{"contact"}} + \underbrace{\vec{R}_t}_{\text{"frott. gliss."}}$$

$$\text{le moment résultant en } I \text{ pour tout point } M \text{ de la surface : } \vec{\mathcal{M}}_I = \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{tI}}_{\text{moment de roulement}} + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{nI}}_{\text{moment de pivotement}}$$

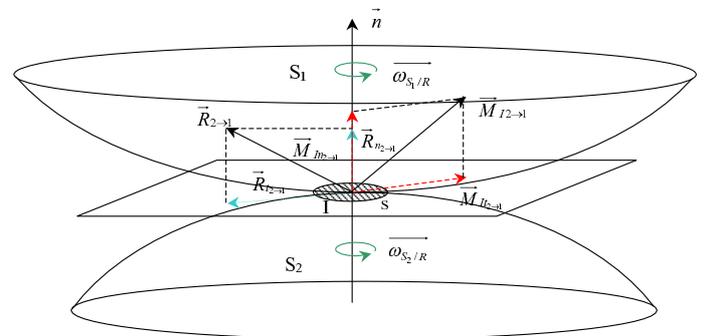


FIGURE II.12 – Actions de deux solides en contact

$\vec{\mathcal{M}}_{nI}(M)$ et $\vec{\mathcal{M}}_{tI}(M)$ s'appellent respectivement les moments élémentaires de **pivotement** et de **roulement** en I .

REMARQUE - (II.1) - 3:

■ Si le contact en I est ponctuel $\implies \vec{\mathcal{M}}_{nI} = \vec{\mathcal{M}}_{tI} = \vec{0}$.

CADRE DU PROGRAMME :

■ On se limitera au cas des solides en translation i.e. **pas de pivotement et pas de roulement** donc même si le contact en I est non ponctuel alors $\implies \vec{\mathcal{M}}_{nI} = \vec{\mathcal{M}}_{tI} = \vec{0}$

BILAN : on ne recherchera que $\vec{R}_{t_{2/1}}$ et $\vec{R}_{n_{2/1}}$.

II.2 Lois d'Amontons-Coulomb

a - Lois d'Amontons

PROPRIÉTÉ - (II.2) - 2:

Lois d'Amontons :

Amontons détermine expérimentalement en 1699 que \vec{R}_t et \vec{R}_n sont indépendants des surfaces de solides en contact.

b - Lois de Coulomb

■ COMPOSANTE NORMALE (ÉVITE L'INTERPÉNÉTRATION DE S_1 ET S_2)

Cette composante constitue la projection sur la normale au plan de contact de la résultante d'action de (S_2) sur (S_1) :

$$R_n = \vec{R}_{2/1} \cdot \vec{n} \quad (\text{II.15})$$

On l'interprète à l'échelle microscopique comme la résultante en I des forces de répulsion atomiques, empêchant les deux solides de s'interpénétrer.

Sa norme est directement dépendante de la situation (sa connaissance dépend des conditions du problème posé. Cf exercices résolus de ce chapitre).

REMARQUE - (II.2) - 4:

S'il y a rupture de contact entre les deux solides alors $R_n = 0$. Ainsi, cette force normale est souvent nommée appelée réaction de support.

■ COMPOSANTE TANGENTIELLE

La composante tangentielle \vec{R}_t constitue la résistance à la translation \Rightarrow **FROTTEMENT DE GLISSEMENT**

Il convient de considérer deux cas de figure :

► SI LA VITESSE DE GLISSEMENT EST NULLE : $\vec{v}_{1/2} = \vec{0}$

PROPRIÉTÉ - (II.2) - 3:

Lois de Coulomb :

L'expérience montre que le glissement ne se produit pas tant que la composante tangentielle exercée par (\mathcal{S}_2) sur (\mathcal{S}_1) n'atteint pas une valeur limite $\|\vec{R}_{tmax}\|$, telle que :

$$\|\vec{R}_t\| \leq \mu_s \|\vec{R}_n\| = \|\vec{R}_{tmax}\| \Leftrightarrow \text{Condition de non glissement} \quad (\text{II.16})$$

avec μ_s facteur sans dimension appelé **coefficient de frottement statique**.

On retiendra également les trois propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ - (II.2) - 4:

- ❶ μ_s est indépendant de l'aire des surfaces en contact.
- ❷ μ_s est indépendant de la norme R_n (dans le modèle choisi !!)
- ❸ μ_s dépend du poli des surfaces.

On donne à titre d'exemple, quelques valeurs du coefficient de frottement statique :

Matériaux en contact	μ_s
acier-acier	0,2
acier-glace	0,02
acier-garniture de frein ($T < 200^\circ C, P = 2.10^7 Pa$)	0,4
pneu - route sèche	1
pneu - route mouillée	0,6

REMARQUE - (II.2) - 5:

Dans le cas du non glissement des solides en contact, la résultante \vec{R} est contenue dans un cône de révolution d'axe $[I; \vec{n}]$ appelé «cône de frottement statique». En effet, pour une composante normale donnée, la composante tangentielle possède une valeur maximale (cf schéma ci-contre), ce qui impose l'inscription de la résultante $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ dans un cône de sommet le point de contact considéré I entre les deux solides.

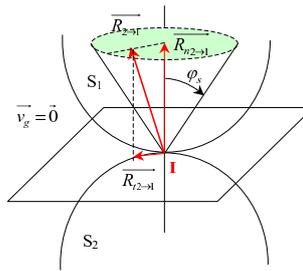


FIGURE II.13 – Visualisation du cône de frottement statique

Exercice de cours: (II.2) - n° 2 Exprimer l'angle au sommet φ_s du cône de frottement en fonction du coefficient de frottement statique μ_s .

- ▶ SI LA VITESSE DE GLISSEMENT EST NON NULLE $\vec{v}_{1/2} \neq \vec{0}$.
Dans ce cas de figure, on retiendra les lois suivantes :

PROPRIÉTÉ - (II.2) - 5:

- 1 La composante \vec{R}_t ou force de frottement (toujours exercée par S_2 sur S_1) est colinéaire à la vitesse de glissement $\vec{v}_{1/2} \neq \vec{0}$, ce qui entraîne : $\vec{R}_t \wedge \vec{v}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$
- 2 La force de frottement \vec{R}_t possède un sens opposé à la vitesse de glissement, que l'on traduit par : $\vec{R}_t \cdot \vec{v}_{1/2} = -\|\vec{R}_t\| \times \|\vec{v}_{1/2}\| \leq 0$
- 3 Dans le cas du glissement, la force de frottement \vec{R}_t a atteint sa valeur maximale, et est donc proportionnelle à la réaction normale du support :

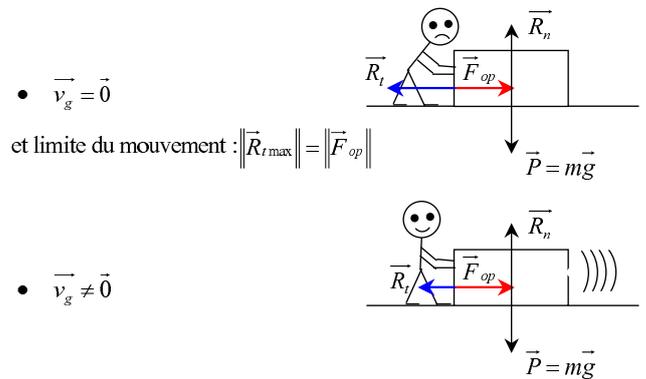
$$\|\vec{R}_t\| = \mu_d \|\vec{R}_n\| \quad \text{avec } \mu_d \text{ coefficient de frottement dynamique} \quad (\text{II.17})$$

Exercice de cours: (II.2) - n° 3 Expliquer, en vous appuyant sur des expériences simples "du quotidien", comment on peut montrer que $\mu_d < \mu_s$.

RÉPONSE :

Supposons par exemple qu'un opérateur décide de mettre en mouvement une armoire en fournissant une force constante \vec{F}_{op} . On constate par expérience qu'une fois le mouvement amorcé, l'opérateur doit fournir un effort nettement moins conséquent.

► si $\vec{v}_g = \vec{0}$ et limite du mouvement



• $\vec{v}_g = \vec{0}$

et limite du mouvement : $\|\vec{R}_{tmax}\| = \|\vec{F}_{op}\|$

• $\vec{v}_g \neq \vec{0}$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{op} + \vec{R}_n + \vec{R}_t + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_n = mg \\ R_t = F_{op} = R_{tmax} = \mu_s R_n = \mu_s mg \end{cases}$$

► si $\vec{v}_g \neq \vec{0}$ (mouvement) $\Rightarrow \|\vec{R}_t\|_{max} = \mu_d \|\vec{R}_n\| = \mu_d mg < \mu_s mg \Rightarrow \boxed{\mu_d < \mu_s}$

NB : souvent on considère $\mu_d \simeq \mu_s$

REMARQUE - (II.2) - 6:

CÔNE DE FROTTEMENT DYNAMIQUE :

Dans le cas du glissement des solides en contact, la résultante \vec{R} est sur un cône de révolution d'axe $[I; \vec{n}]$ appelé «cône dynamique de frottement». En effet, pour une composante normale donnée, la norme de la composante tangentielle possède une valeur fixée (cf schéma ci-contre), ce qui impose l'inscription de la résultante $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ sur un cône de sommet le point de contact considéré I entre les deux solides.

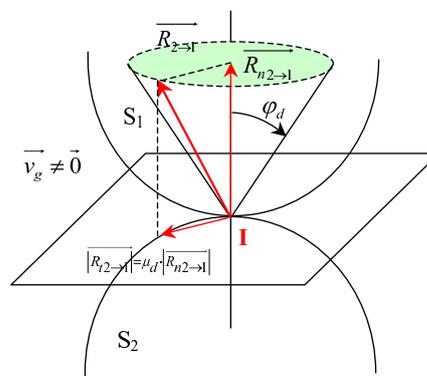


FIGURE II.15 – Visualisation du cône de frottement dynamique

L'angle au sommet du cône dynamique vérifie naturellement : $\tan \varphi_d = \mu_d$ et le cône de frottement dynamique est contenu dans le cône de frottement statique puisque $\mu_d = \tan \varphi_d < \mu_s = \tan \varphi_s$.

III Mise en oeuvre des lois de frottement solide : effets sur les solides en translation

III.1 Première approche simple : le pavet sur un plan incliné

a - Première possibilité : l'équilibre - phénomène d'arc-boutement

Posons un pavet de masse m sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale faible. On pose R_t et R_n algébriques avec $\vec{R} = R_t \cdot \vec{e}_x + R_n \cdot \vec{e}_z$. L'application du TRC au pavet permet de traduire l'équilibre statique :

$$\begin{cases} R_t + mg \sin \alpha = 0 \Rightarrow R_t = -mg \sin \alpha \\ R_n - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow R_n = mg \cos \alpha \end{cases}$$

La condition de non glissement s'écrit : $\frac{|R_t|}{|R_n|} = \tan \alpha < \mu_s = \tan \varphi_s$

CONCLUSION : il y a absence de glissement tant que $\alpha < \varphi_s$ et ce

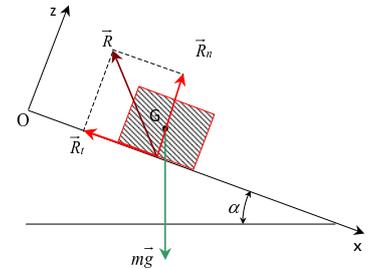


FIGURE II.16 – Pavet sur un plan incliné

$\forall m$!!!

EXEMPLE D'APPLICATION : LA VIS

La réaction statique du support sur le filet de la vis reste contenue dans le cône de frottement statique $\forall \vec{F}$ force de poussée appliquée sur la tête de vis. C'est le même raisonnement pour une force de traction (la surface de frottement statique est alors au dessus du filet et non au dessous comme ci-contre).

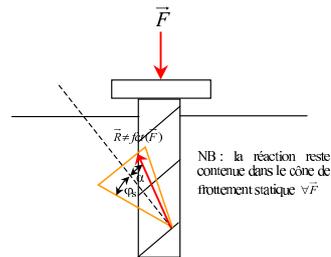


FIGURE II.17 – Effet d'arc-boutement sur une vis

b - Seconde possibilité : le glissement avec frottement

On envisage maintenant de déposer le pavet sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle supérieur à l'angle limite de frottement statique $\alpha > \varphi_s \Rightarrow \vec{R}$ sort du cône de frottement statique et on est en condition de glissement :

$$|\vec{R}_t| = \mu_d \cdot |\vec{R}_n|$$

Le TRC donne :

$$\begin{cases} m\ddot{z} = R_n - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow R_n = mg \cos \alpha \\ m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \mu_d R_n \Rightarrow \ddot{x} = g \sin \alpha (1 - \mu_d \cotan(\alpha)) \end{cases}$$

Soit finalement avec les CI imposées :

$$x = \frac{1}{2}g \sin \alpha (1 - \mu_d \cotan(\alpha)) \cdot t^2$$

c - Troisième possibilité : le basculement

On envisage enfin la situation où le pavé bascule sans glissement, et effectue une rotation sur son arête aval (point I si l'on considère la situation dans le plan de la figure).

QUESTION : Angle minimal assurant le basculement ?

RÉPONSE : **Rotation** \Rightarrow application du théorème du moment cinétique.

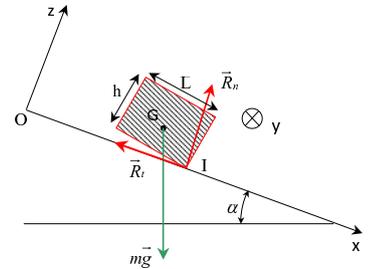


FIGURE II.18 – Pavé en basculement sur un plan incliné

► Approche formelle :

Lorsque la rotation s'amorce, le pavé est en contact ponctuel en I . Le théorème du moment cinétique appliqué au pavé en I donne :

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} = \overbrace{\vec{M}_I(\vec{R}_N)}^{=\vec{0}} + \overbrace{\vec{M}_I(\vec{R}_T)}^{=\vec{0}} + \vec{M}_I(\vec{P}) = \vec{IG} \wedge (m\vec{g})$$

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} = (\vec{IH} + \vec{HG}) \wedge (m\vec{g}) = \left(-\frac{L}{2} \cdot \vec{e}_x + \frac{h}{2} \cdot \vec{e}_z\right) \wedge (mg \sin \alpha \cdot \vec{e}_x - mg \cos \alpha \cdot \vec{e}_z)$$

soit :

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} = \left(-\frac{L}{2}mg \cos \alpha + \frac{h}{2}mg \sin \alpha\right) \cdot \vec{e}_y$$

Soit en projection sur \vec{e}_y : $J_{(Iy)} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \left(-\frac{L}{2}mg \cos \alpha + \frac{h}{2}mg \sin \alpha\right)$

Si le basculement s'opère, on a : $\frac{d\omega}{dt} > 0$

soit :

$$\tan \alpha > \frac{L}{h} = \tan \alpha_l$$

Ainsi, l'angle limite pour avoir basculement sans glissement vérifie :

$$\tan \alpha_l = \frac{L}{h} < \tan \varphi_S$$

► Approche intuitive : en live !

III.2 Autres applications simples

a - La marche à pied

On considère une personne de masse m marchant sur un sol horizontal dans le champ de pesanteur terrestre. On appelle C son centre de masse.

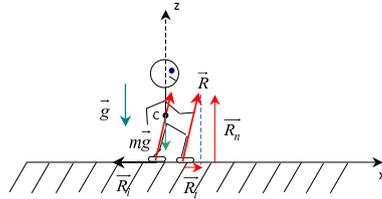


FIGURE II.19 – Principe dynamique de la marche à pied

QUESTION : quel est le rôle des actions de frottement dans le mécanisme de la marche ?

Appliquons le théorème de résultante cinétique à la personne dans le référentiel du sol galiléen :

$$m \vec{a}(C)_{/R} = \vec{R} + m \vec{g} \implies \begin{cases} m\ddot{z} = R_n - mg \simeq 0 \quad \forall t & \implies R_n = mg \\ m\ddot{x} = R_t \end{cases}$$

Pour obtenir \vec{R}_t , chaque jambe (les muscles) du personnage applique sur le pied concerné une force (intérieure au personnage global) vers l'arrière \vec{R}_i et la troisième loi de Newton des actions réciproques permet de conclure à l'existence d'une réaction du sol sur le pied \vec{R}_t , ou force de frottement, opposée à \vec{R}_i (et vérifiant les lois de Coulomb!) :

$$\vec{R}_t = -\vec{R}_i \quad \text{telle que : } |\vec{R}_t| < \mu_s |\vec{R}_n| = \mu_s mg$$

b - Le monte charge

On considère un monte charge de déménagement, dispositif utilisé pour faire entrer des colis directement par la fenêtre d'un appartement en hauteur en évitant escalier et ascenseur. Les colis de masse m sont lâchés sur le tapis roulant du monte charge sans vitesse initiale en $x = 0$ à $t = 0$ par le déménageur. On appelle $\vec{v}_t = v_t \cdot \vec{e}_x$ la vitesse du tapis.

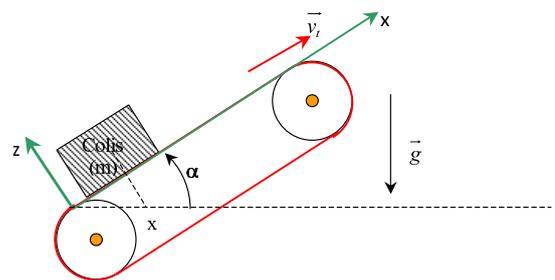


FIGURE II.20 – Colis sur un monte-charge

QUESTION : quelle sont les différentes phases du mouvement du colis sur le monte-charge ?

► A $t = 0$, le colis est à l'arrêt alors que le tapis avance \implies **Phase de glissement.**

• Le TRC appliqué au colis donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + \mu_d R_n \implies \ddot{x} = g (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \\ R_n = mg \cos \alpha \end{cases}$$

donc :

$$\dot{x} = g (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \cdot t \implies \boxed{x = \frac{g}{2} (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \cdot t^2}$$

• La vitesse de glissement est :

$$v_g = v_{col./tapis} = v(col)_{/R} - v(tap)_{/R} = x - v_t = g (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \cdot t - v_t$$

NB : on constate que le glissement peut s'arrêter à condition que $|v_g| \downarrow$ i.e. $\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha > 0$ soit α tel que $\boxed{\tan \alpha < \mu_d}$ **fonctionnement normal du tapis**

Le glissement cesse lorsque $v_g = 0$ soit

$$\begin{cases} t_1 = \frac{v_t}{g (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)} \\ x_1 = \frac{1}{2} \frac{v_t^2}{g (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)} \end{cases}$$

► Pour $t > t_1$ le colis est « accroché » !

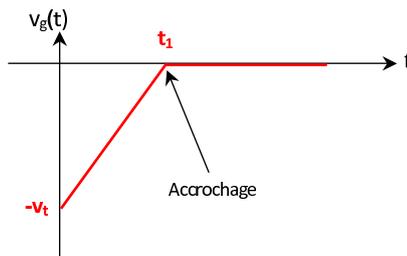


FIGURE II.21 – Evolution de la vitesse de glissement sur le monte charge

IV Aspects énergétiques du frottement solide

IV.1 Puissance des actions appliquées à un solide

a - Définition - forme "générique"

Pour un point matériel M soumis à une force \vec{F} , le travail élémentaire dépensé par la force pour un mouvement \vec{dr} de M est :

$$\delta W_{\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{dr}(M) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M) dt$$

soit une puissance :

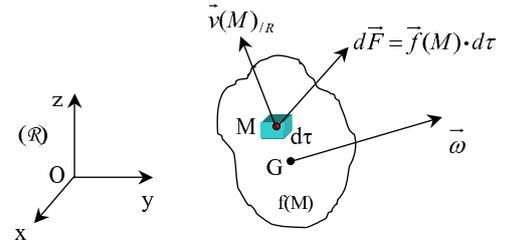
$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)$$

Pour un système de points, la puissance totale des actions est obtenue par sommation :

$$\mathcal{P}(\Sigma)_{\mathcal{R}} = \sum_i^N \mathcal{P}(\vec{F}_i)_{\mathcal{R}} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$$

La transposition aux cas d'un solide \mathcal{S} soumis au champ volumique local de force $\vec{f}(M) = \frac{d\vec{F}(M)}{d\tau}$ est immédiate avec :

$$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \iiint_{\Sigma} d\vec{F}(M) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \iiint_V \vec{f}(M) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot d\tau$$



EXEMPLE DE CHAMP DE FORCE VOLUMIQUE : **FIGURE II.22 – Puissance des actions sur un solide indéformable**

champ de pesanteur volumique

$$\vec{f}(M) = \frac{d\vec{F}(M)}{d\tau} = \frac{dm}{d\tau} \vec{g} = \rho(M) \cdot \vec{g}$$

b - Forme "utile" - cas du solide en translation (à retenir)

Considérons un point P du solide; la RCVS permet d'exprimer la vitesse de tout point M du solide en fonction de celle de P avec :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PM}$$

En injectant cette relation dans l'expression de la puissance totale des actions exercée sur un solide, on tire :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_V \vec{f}(M) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot d\tau \\ &= \vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} \cdot \iiint_V \vec{f}(M) \cdot d\tau + \iiint_V \vec{f}(M) \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PM}) d\tau \end{aligned}$$

soit en utilisant la propriété de permutation du produit mixte :

$$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} \cdot \underbrace{\iiint_V \vec{f}(M) \cdot d\tau}_{\vec{R}} + \vec{\omega} \cdot \underbrace{\iiint_V \overrightarrow{PM} \wedge d\vec{f}(M)}_{\vec{M}_P}$$

Donc, pour un solide \mathcal{S} soumis aux actions $\{\vec{R}; \vec{M}_P\}_P$ (ensemble dit "réduit" des actions, appelé "torseur") (NB : calculé au point P), la puissance dépensée par ces actions est donnée par :

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}} = \frac{\delta W_{dt}}{dt} = \left(\vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{R} + \vec{\omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \cdot \vec{M}_P \right) \quad (\text{II.18})$$

INTÉRÊT : cette relation est valable $\forall P \in \mathcal{S}$, on choisira donc en général un point P qui facilite le calcul de la puissance.

CADRE DU PROGRAMME (A RETENIR) : solides en translation uniquement, donc :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(P \in \mathcal{S}) = \vec{v}(\forall M \in \mathcal{S})$$

$$\text{donc : } \mathcal{P}_{/\mathcal{R}} = \frac{\delta W_{dt}}{dt} = \vec{v}(\forall M \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{R} \quad (\text{II.19})$$

REMARQUE - (IV.1) - 7:

Les résultantes des actions intérieures sur un solide (résultante de forces et moment résultant) étant nulles, soit $\vec{R}_{int} = \vec{0}$ et $\vec{M}_{P_{int}} = \vec{0}$, on a naturellement : $\mathcal{P}_{int} = 0$

c - Puissance des actions de contact entre deux solides

Considérons deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en "pseudo" contact ponctuel en I . On suppose ici que le moment des actions de contact de \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 est non nul :

$$\vec{M}_I(2/1) \neq \vec{0}$$

Le travail élémentaire des actions de \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 s'écrit :

$$\delta W_{2/1/\mathcal{R}} = \left[\vec{R}_{2/1} \cdot \vec{v}(I_1 \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} + \vec{M}_I(2/1) \cdot \vec{\omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}} \right] \times dt$$

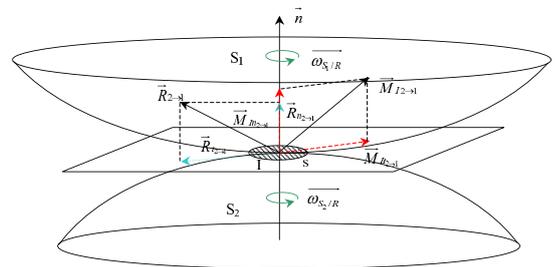


FIGURE II.23 – Puissance du torseur des actions de contact

et avec la loi des actions réciproques, le travail élémentaire des actions de \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 est :

$$\delta W_{1/2/\mathcal{R}} = - \left[\vec{R}_{2/1} \cdot \vec{v}(I_2 \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}} + \vec{M}_I(2/1) \cdot \vec{\omega}_{\mathcal{S}_2/\mathcal{R}} \right] \times dt$$

soit pour le **travail élémentaire total** des actions entre les deux solides :

$$\delta W_{/\mathcal{R}} = \delta W_{2/1/\mathcal{R}} + \delta W_{1/2/\mathcal{R}} = \left[\vec{R}_{2/1} \cdot \underbrace{\left[\vec{v}(I_1 \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I_2 \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}} \right]}_{=\vec{v}_{1/2}} + \vec{M}_I(2/1) \cdot \underbrace{\left[\vec{\omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}} - \vec{\omega}_{\mathcal{S}_2/\mathcal{R}} \right]}_{=\vec{\omega}_{1/2}} \right] \cdot dt$$

en introduisant les vitesses de glissement et de rotation relative au point de contact I $\vec{v}_{1/2}, \vec{\omega}_{1/2} = \vec{\omega}_{S_1/\mathcal{R}} - \vec{\omega}_{S_2/\mathcal{R}}$.

La puissance totale des actions de contact de deux solides S_1 et S_2 est finalement :

$$\mathcal{P}_{contact} = \frac{\delta W_{contact}}{dt} = \vec{R}_{2/1} \cdot \vec{v}_{1/2} + \vec{M}_I(2/1) \cdot \vec{\omega}_{1/2} \quad (\text{II.20})$$

CADRE DU PROGRAMME : frottement de glissement uniquement (solides en translation) soit $\vec{\omega}_{1/2} = \vec{0}$ donc :

A RETENIR :

$$\mathcal{P}_{cont} = \vec{R}_{2/1} \cdot \vec{v}_{1/2} = \vec{R}_{t_{2/1}} \cdot \vec{v}_{1/2} < 0$$

($\vec{R}_{t_{2/1}}$ et $\vec{v}_{1/2}$ étant de sens opposé, la puissance des actions de contact est toujours négative.)

REMARQUE - (IV.1) - 8:

Si le glissement est parfait, i.e. $\mu_d = 0$, $\vec{R}_{t_{2/1}} = \vec{0}$ et $\vec{M}_I(I)_{2/1} = \vec{0}$ on a :

$$\mathcal{P}_{cont \text{ gliss parf}} = 0$$

IV.2 Quelques théorèmes utiles d'énergétique : TPC et TEC

On considère un système mécanique quelconque ; découpons le en N points discrets (démarche non restrictive et plus simple). L'énergie cinétique d'un tel système dans le référentiel galiléen \mathcal{R} s'écrit :

$$E_{C/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i v^2(M_i)_{/\mathcal{R}}$$

La puissance cinétique ou taux de variation de l'énergie cinétique dans le référentiel \mathcal{R} d'étude est donc :

$$\left. \frac{dE_C}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_i^N \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_i v^2(M_i)_{/\mathcal{R}} \right] = \sum_i^N m_i \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} \cdot \left(\frac{d\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

or d'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M_i :

$$m_i \left(\frac{d\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{F}_{ext \rightarrow i} + \vec{F}_{int \rightarrow i} \quad \text{avec} \quad \vec{F}_{int \rightarrow i} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

ce qui finalement permet d'écrire :

$$\left. \frac{dE_C}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \underbrace{\sum_i^N \vec{F}_{ext \rightarrow i} \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}}_{=\mathcal{P}_{ext/\mathcal{R}}} + \underbrace{\sum_i^N \vec{F}_{int \rightarrow i} \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}}_{=\mathcal{P}_{int}}$$

A RETENIR : Théorème de la puissance cinétique (TPC)

- pour un système quelconque : $\left(\frac{dE_C}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{ext/\mathcal{R}} + \mathcal{P}_{int}$
- pour un solide : $\left(\frac{dE_C}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{ext/\mathcal{R}}$

REMARQUE - (IV.2) - 9:

On montre que \mathcal{P}_{int} est indépendant du référentiel choisi pour l'étude.

En outre, intégrons le théorème de la puissance cinétique entre deux instants t_1 et t_2 :

$$dE_{C/\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{ext/\mathcal{R}} \cdot dt + \mathcal{P}_{int} \cdot dt$$

soit :

A RETENIR : Théorème de l'énergie cinétique (TEC) pour un système quelconque

$$\Delta E_{C/\mathcal{R}}(t_1 \rightarrow t_2) = W_{ext/\mathcal{R}}(t_1 \rightarrow t_2) + W_{int}(t_1 \rightarrow t_2)$$

IV.3 Exemple de bilan énergétique : le monte charge de déménagement

On reprend ici le cas du monte charge.

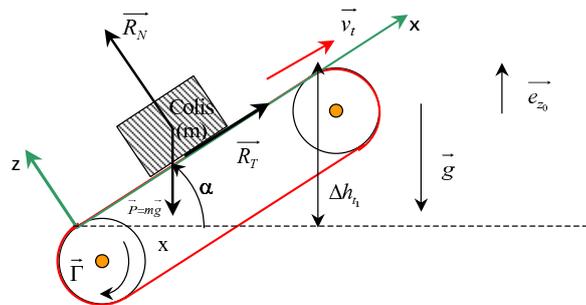


FIGURE II.24 – Bilan énergétique sur le monte-charge

RAPPELS :

$$\begin{cases} v_g = g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)t - v_t \\ t_1 = \frac{v_t}{g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)} \\ x_1 = \frac{v_t^2}{2g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)} \end{cases}$$

QUESTION : travail fourni par le moteur du tapis durant la phase de glissement $W_{t_1}(\text{moteur})$?

Système : tapis + colis (hors moteur)

Le TEC appliqué au système s'écrit entre t_0 et t_1 :

$$\Delta E_c = \underbrace{\Delta E_c(\text{colis})}_{=\frac{1}{2}mv_t^2} + \underbrace{\Delta E_c(\text{tapis})}_{=0} = W_{ext} + W_{int} \quad (\text{II.21})$$

Bilan des actions :

$\left[\begin{array}{l} \text{intérieures : } \vec{R}_n(\text{tapis/colis}), \vec{R}_t(\text{tapis/colis}), \vec{R}_n(\text{colis/tapis}), \vec{R}_t(\text{colis/tapis}) \\ \text{extérieures : } \vec{P}(\text{colis}) = m\vec{g}, \vec{P}(\text{tapis}) = M\vec{g}, \vec{\Gamma}(\text{moment moteur}) \end{array} \right.$
--

Bilan des travaux :

► TRAVAIL DU POIDS :

$$W_{t_1}(\vec{P}) = \int_0^{\vec{r}_{t_1}} \vec{P} \cdot d\vec{r} = -mg \int_0^{\vec{r}_{t_1}} \underbrace{\vec{e}_{z_0} \cdot d\vec{r}}_{dh} = -mg \int_0^{h_{t_1}} dh = -mg\Delta h_{t_1}$$

soit :

$$W_{t_1}(\vec{P}) = -mg \sin \alpha \cdot x_1 = -mg \sin \alpha \frac{v_t^2}{2g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)} = -\frac{1}{2}mv_t^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha}$$

► TRAVAIL TOTAL DES RÉACTIONS NORMALES :

$$W_{t_1}(\vec{R}_n(\text{tot})) = \int_0^{t_1} \vec{R}_n(\text{tapis/colis}) \cdot \vec{v}_g \cdot dt = 0$$

► TRAVAIL TOTAL DES RÉACTIONS TANGENTIELLES :

$$\begin{aligned} W_{t_1}(\vec{R}_t(\text{tot})) &= \int_0^{t_1} \vec{R}_t(\text{tapis/colis}) \cdot \vec{v}_g \cdot dt = \int_0^{t_1} \mu_d mg \cos \alpha [g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)t - v_t] \cdot dt \\ &= \mu_d mg \cos \alpha \left[g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \frac{t_1^2}{2} - v_t t_1 \right] \\ &= \mu_d mg \cos \alpha \left[\frac{g}{2}(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \frac{v_t^2}{g^2(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)^2} - \frac{v_t^2}{g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)} \right] \end{aligned}$$

soit :

$$W_{t_1}(\vec{R}_t(tot)) = -\frac{1}{2}mv_t^2 \frac{\mu_d \cos \alpha}{\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha}$$

On peut finalement préciser le bilan énergétique de la phase de glissement en reprenant l'équation II.21 qui s'écrit finalement :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_t^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_n) + W(\vec{R}_t) + W(moteur)$$

qui donne :

$$W(moteur) = \frac{1}{2}mv_t^2 \left[1 + \frac{\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha}{\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha} \right] > \frac{1}{2}mv_t^2 > 0$$