

## CORRECTION DU DEVOIR MAISON N°2

## I. DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE D'UNE INDUCTANCE

**1** Tension aux bornes de la bobine B :

$$u(t) = ri(t) + L \frac{di}{dt}$$

**2** En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. On a donc  $U_R = \frac{R}{R+r+r_0} E_0$  (diviseur de tension), d'où

$$r = \left( \frac{E_0}{U_R} - 1 \right) R - r_0$$

AN :  $r = 29 \Omega$

**3** Par lecture de l'oscillogramme :

$$U_e = 5,0 \text{ V et } U_R = 2,5 \text{ V}$$

**4**  $I = \frac{U_R}{R}$ , donc  $I = 0,063 \text{ A}$

**5** Si  $U$  est l'amplitude de la tension aux bornes d'un dipôle quelconque et  $I$  l'amplitude de l'intensité qui le traverse, alors

$$Z = \frac{U}{I}$$

Pour le dipôle AM, on a

$$Z_{AM} = \frac{U_e}{I}$$

AN :  $Z_{AM} = 80 \Omega$

**6** La tension  $u_e(t)$  est en avance sur  $u_R(t)$ , car elle passe par son maximum 0,33 ms avant.

**7** Si on note  $\tau = 0,33 \text{ ms}$  l'avance de  $u_e(t)$  sur  $u_R(t)$ , alors l'avance de phase de  $u_e(t)$  sur  $i(t)$  est

$$\varphi_{u_e/i} = 2\pi\tau f$$

*Application numérique :*

$$\varphi_{u_e/i} = 0,52 \text{ rad } (= 30^\circ)$$

**8**  $\underline{Z}_{AM} = r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R$ , donc

$$\underline{Z}_{AM} = R + r + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

**9**  $\underline{Z}_{AM} = \frac{u_e}{i} = \frac{U_e e^{j\varphi_{u_e/i}}}{I}$ . Donc

$$\underline{Z}_{AM} = Z_{AM} e^{j\varphi_{u_e/i}}$$

**10** D'après 8),  $R + r = \text{Re}(\underline{Z}_{AM}) = Z_{AM} \cos \varphi_{u_e/i}$ . Donc

$$r = Z_{AM} \cos \varphi_{u_e/i} - R = 29 \Omega$$

**11** D'après 8),  $L\omega - \frac{1}{C\omega} = \text{Im}(\underline{Z}_{AM})$ . Donc

$$L = \frac{1}{\omega} \left( Z_{AM} \sin \varphi_{u_e/i} + \frac{1}{C\omega} \right) = 0,066 \text{ H}$$

**12** Fonction de transfert du filtre :

$$\underline{H} = \frac{u_R}{u_e}$$

**13** À basse fréquence, l'inductance L est équivalente à un fil, le condensateur C est équivalent à un interrupteur ouvert. À haute fréquence, l'inductance L est équivalente à un interrupteur ouvert, le condensateur C est équivalent à un fil.

Le signal ne passant ni à basse fréquence ni à haute fréquence, le filtre est probablement un passe-bande.

**14**  $\underline{H} = \frac{u_R}{u_e} = \frac{R}{Z_{AM}}$ . Donc

$$\underline{H} = \frac{R}{R+r+j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

**15**

$$\underline{H} = \frac{\frac{R}{R+r}}{1 + \frac{j}{R+r} (L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{\frac{R}{R+r}}{1 + j \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}} \left( \sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega} \right)}$$

En posant

$$H_{\max} = \frac{R}{R+r} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

on obtient bien

$$\underline{H} = \frac{H_{\max}}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

**16** Le diagramme de Bode est constitué de la représentation du gain logarithmique  $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}|$  en fonction de  $\log \omega$  et de la représentation de la phase  $\varphi = \text{Arg} \underline{H}$  en fonction de  $\log \omega$ .

**17**

$$|\underline{H}| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

Donc  $|\underline{H}|$  est maximal si  $1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$  est minimal, i.e. si  $\omega = \omega_0$ . Alors  $G_{dB, \max} = 20 \log H_{\max} = 20 \log \frac{R}{R+r}$ . D'autre part, par lecture du diagramme de Bode, on obtient  $G_{dB, \max} = G_{dB}(\omega_0 = 2\pi f_0) = -4,8 \text{ dB}$ , avec  $f_0 = 196 \text{ Hz}$ .

On en déduit

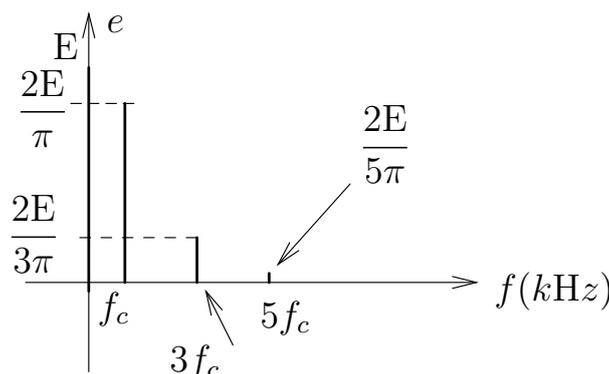
$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} \quad \text{et} \quad r = R \left( 10^{\frac{-G_{dB, \max}}{20}} - 1 \right)$$

Application numérique :

$$L = 0,066 \text{ H} \quad \text{et} \quad r = 29,5 \Omega$$

**18**

a) Le spectre d'entrée a l'allure :



b) La composante continue est nulle en sortie. Il faut calculer  $|\underline{H}(f_c)|$ . En utilisant le diagramme de Bode, on trouve  $|\underline{H}(f_c)| = 10^{-15/20}$  et l'amplitude du fondamental est donc

$$\frac{2 |\underline{H}(f_c)|}{\pi} = 0,11\text{V}$$

On a  $|\underline{H}(3f_c)| = H_{max}$ , l'amplitude de la troisième harmonique est donc

$$\frac{2 |\underline{H}(3f_c)|}{3\pi} = 0,13\text{V}$$

On mesure (ou on calcule)  $|\underline{H}(5f_c)| = 10^{-9/20}$ , l'amplitude de la cinquième harmonique est donc

$$\frac{2 |\underline{H}(5f_c)|}{5\pi} = 0,05\text{V}$$

c) Le signal de sortie est essentiellement la superposition de trois sinusoïdes d'amplitudes différentes.

**19** En haute fréquence le passe-bande se comporte comme un intégrateur. Le signal de sortie est donc un triangle de fréquence 10 kHz (et d'amplitude très faible).

## II. ETUDE D'UN ACCÉLÉROMÈTRE

**1** Considérons le mouvement d'un bras de longueur  $\ell = 60$  cm qui effectue un demi-tour en une durée  $\tau = 0.5s$  (mouvement rapide). Il lui correspond une vitesse moyenne  $v_{moy} = \frac{v_{moy}}{\tau} = 4m.s^{-1}$ . Si l'on considère qu'en fin de parcours, le bras est freiné de  $v_{moy}$  à 0 en  $\tau' = 0.1s$ , l'accélération finale est de l'ordre de  $a_{rapide} \simeq 40m.s^{-2} = 4g$ . Si l'on double les durées pour décrire un mouvement lent, on obtient le quart de la valeur précédente, soit  $a_{lent} \simeq 10m.s^{-2} = g$ . On se situe donc dans les intervalles précisés par la fiche constructeur. Les mesures effectuées sur des volleyeurs montrent que leur bras peuvent atteindre une accélération de l'ordre de  $20g$  lors de la frappe du ballon!

**2** Le boîtier peut être considéré comme formant un référentiel non galiléen en translation par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , d'accélération  $\vec{a}(t)$ . Ainsi, l'équation du mouvement de la masse  $m$  dans ce référentiel est donnée par :

$$m\ddot{\vec{e}}_x = -kX\vec{e}_x - 2m\gamma\dot{X}\vec{e}_x - m\vec{a}(t).$$

Après projection et simplification, on obtient :

$$\ddot{X} + 2\gamma\dot{X} + \omega_r^2 X = -a(t).$$

**3** Dans tous les cas, la solution particulière est  $X_p = -\frac{a}{\omega_r^2}$ . Le discriminant réduit de l'équation caractéristique associée à l'équation est  $\delta = \gamma^2 - \omega_r^2$ .

1<sup>er</sup> cas :  $\gamma < \omega_r \Rightarrow \delta < 0$ . Les solutions s'écrivent :

$$X(t) = -\frac{a}{\omega_r^2} + \exp(-\gamma t) \left( A \cos \sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2} t + B \sin \sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2} t \right).$$

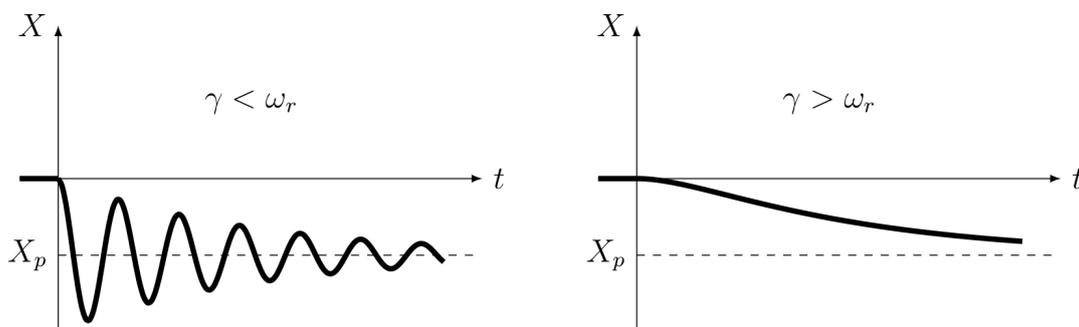
A et B sont les constantes d'intégration.

2<sup>e</sup> cas :  $\gamma > \omega_r \Rightarrow \delta > 0$ .

$$X(t) = -\frac{a}{\omega_r^2} + A \exp \left( \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2} \right) t \right) + B \exp \left( \left( -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2} \right) t \right).$$

4 Dans tous les cas,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = -\frac{a}{\omega_r^2}$ .

5 Les courbes sont tracées ci-dessous ( $X$  et  $\dot{X}$  sont continues) :



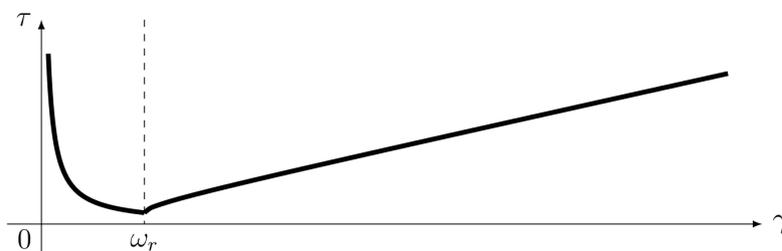
6

1<sup>er</sup> cas : oscillateur faiblement amorti. Le temps de réponse est  $\tau = \frac{1}{\gamma}$ .

2<sup>e</sup> cas : oscillateur fortement amorti. Il y a *a priori* deux constantes, car il y a deux exponentielles décroissantes. Il faut considérer le temps de réponse le plus grand, puisque c'est celui qui décrira l'amortissement le plus lent.

Ainsi,  $\tau = \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2}}$ .

7 Il faut bien sûr séparer les différents cas, qui se rejoignent pour  $\gamma = \omega_r$  :



8 Le temps de réponse minimal est celui correspondant au régime critique  $\gamma = \omega_r$ . Il vaut  $\tau = \frac{1}{\omega_r}$ .

9 On se trouve dans le cas pseudo-périodique, d'où  $\tau = \frac{1}{\gamma} = 100\mu s$ . Le déplacement stationnaire est, en

valeur absolue,  $X_p = \frac{a}{\omega_r^2} = 8nm$ .

10 Le temps de réponse et la sensibilité caractérisée par  $X_p$  sont tous deux des fonctions **décroissantes** de la pulsation  $\omega_r$ . Ainsi, un temps de réponse court est incompatible avec une grande sensibilité.

11 Le dispositif mesure la composante de la différence entre la pesanteur  $\vec{g}$  et l'accélération  $\vec{a}$  du boîtier sur  $\vec{u}$ , soit  $(\vec{g} - \vec{a}) \cdot \vec{u}$ .

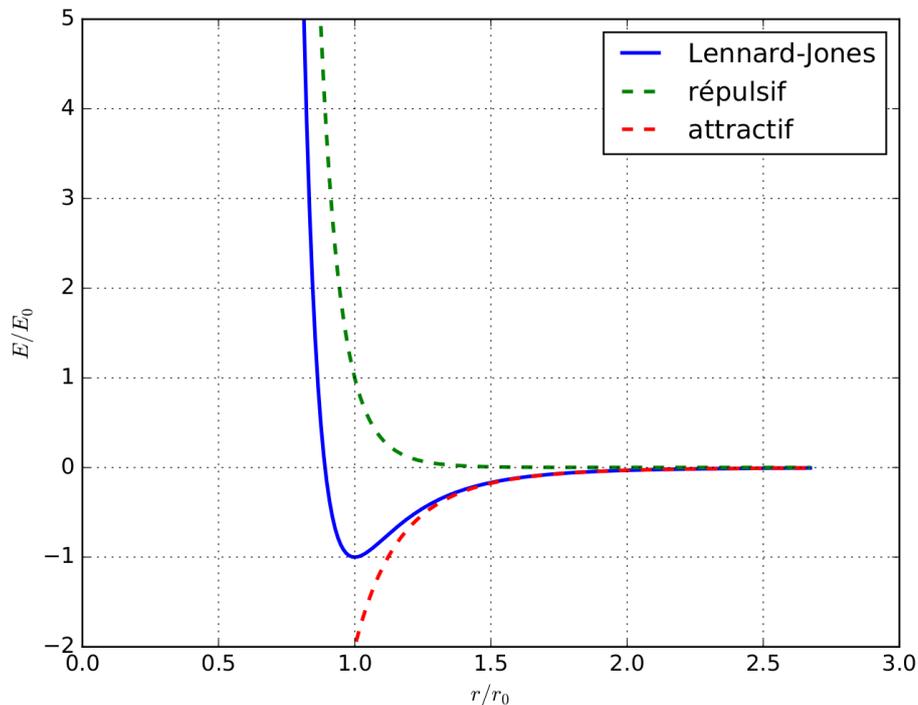
### III. CENTRALE MP 2017

1. Au niveau macroscopique, on peut également citer la liaison covalente ou la liaison hydrogène, dont les énergies se classent de la manière suivante :

liaison covalente  $\gg$  liaison hydrogène  $\gg$  liaison Van der Waals

2.a. Le premier terme étant un terme décroissant par rapport à  $r$ , il correspond à une interaction de type répulsif, et inversement pour le second terme.

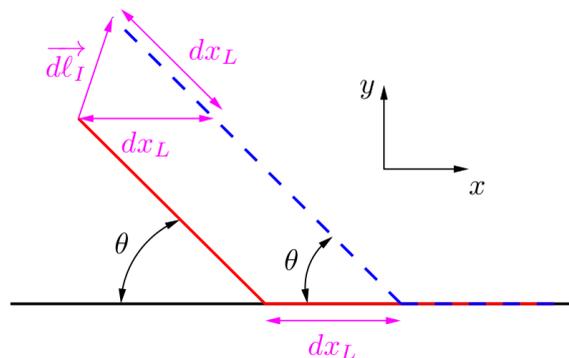
2.b. On montre sans peine que le potentiel de Lennard-Jones est minimal en  $r = r_0 = (2\alpha/\beta)^{1/6}$  d'énergie minimale  $E = -E_0 = -\beta^2/(4\alpha)$ , voir graphique ci-dessous.



On interprète alors  $r_0$  comme la longueur d'équilibre de la liaison et  $E_0$  comme l'énergie de cette liaison.

2.c. En supposant une répartition uniforme des atomes à la surface du Scotch et du substrat, il y a donc un nombre de liaison proportionnelle à l'aire de contact. Le travail que doit fournir l'opérateur pour décoller le Scotch est donc proportionnel à l'aire de contact.

3.a. À l'aide d'un bon schéma :



on déduit directement que

$$d\vec{\ell}_I = dx_L \vec{u}_x + dx_L (-\cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y) = dx_L ((1 - \cos\theta) \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y)$$

Le travail élémentaire lors de cette opération a donc pour expression :

$$\delta W_p = \vec{F}_p \cdot d\vec{\ell}_I = F_p (1 - \cos\theta) dx_L$$

3.b. D'après l'énoncé,  $\delta W_p = \gamma dA$ , avec  $dA = \tilde{\theta} dx_L$ , on en déduit :

$$F_p = \frac{\gamma b}{1 - \cos \theta}$$

Remarquons que l'angle qui minimise la force de pelage est  $\theta = \pi$  et qu'il est impossible de décoller le scotch pour  $\theta = 0$  (ce qui paraît somme toute logique).

**4.a.** Directement,  $x_L(t) = \|\vec{V}_0\|t$ .

**4.b.** Pour que l'angle reste constant, il faut que la longueur de scotch qui s'enroule pendant  $dt$ , à savoir  $r_0\Omega dt$ , soit égale à la longueur de scotch qui s'est décollé du support, à savoir  $\|\vec{V}_0\|dt$ , on en déduit donc

$$r_0\Omega = \|\vec{V}_0\|$$

**4.c.** A priori, pour des raisons essentiellement pratiques d'encombrement du dispositif expérimental.

**5.**  $\ell(t) = x_I(t) - x_L(t) = \ell_0 + V_p t - x_L(t)$

**6.** La vitesse initiale étant nulle, on commence *a priori* par une phase de collage qui perdure tant que  $\|\vec{f}\| > F_p$ . Étant donné que l'on commence par une phase de collage, le mobile est pendant cette phase immobile et donc soumis à une résultante des forces nulles (car on se place dans un référentiel galiléen), ainsi,

$$\vec{f} + k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_x = \vec{0}$$

On en déduit durant cette phase  $\|\vec{f}(t)\| = kV_p t$ , car  $x_L(t) = 0$ . Ainsi, cette phase initiale de non-glissement perdure tant que  $t < t_0 = \frac{F_p}{kV_p}$ . En cette date, la longueur du ressort a pour expression :

$$\ell(t_0) = \ell_0 + \frac{F_p}{k}$$

**7.** Durant la phase suivante, la masse n'est plus immobile et soumise à une force de frottement d'expression  $\vec{f} = -(1 - \varepsilon)F_p\vec{u}_x$  et à la force de rappel du ressort. Ainsi, dans le référentiel galiléen d'étude, l'application de la deuxième loi de Newton au système, conduit à

$$m\ddot{x}_L = k(\ell(t) - \ell_0) - (1 - \varepsilon)F_p$$

soit

$$\ddot{x}_L + \omega_0^2 x_L = \omega_0^2 V_p t - (1 - \varepsilon) \frac{F_p}{m} \quad \text{avec } \omega_0 \stackrel{\text{dét.}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**8.** L'application des conditions initiales ( $x_L(0) = 0$  et  $\dot{x}_L(0) = 0$ ) impose

$$C_1 + C_3 = 0 \quad \text{et} \quad C_2\omega_0 + V_p = 0$$

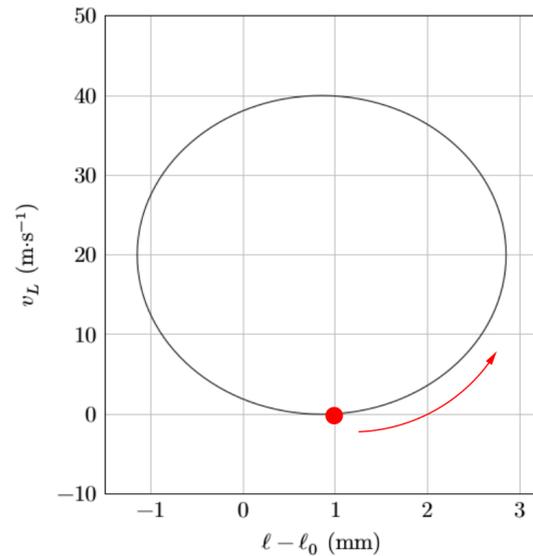
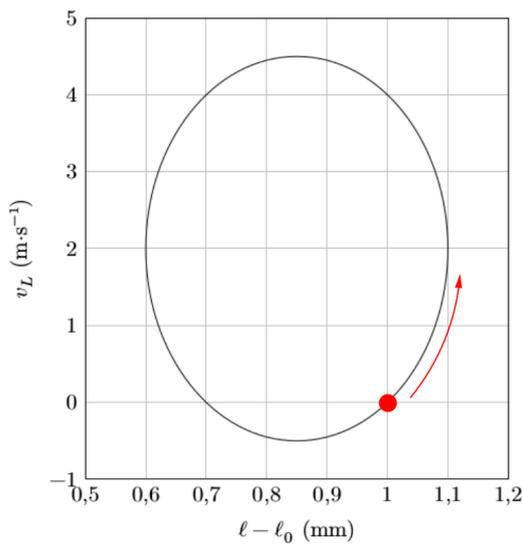
Il convient ensuite de réinjecter la solution proposée dans l'équation différentielle du mouvement :

$$-C_1\omega_0^2 \cos(\omega_0 t') - C_2\omega_0^2 \sin(\omega_0 t') + C_1\omega_0^2 \cos(\omega_0 t') + C_2\omega_0^2 \sin(\omega_0 t') + \omega_0^2 V_p t' + \omega_0^2 C_3 = \omega_0^2 V_p t - (1 - \varepsilon) \frac{F_p}{m}$$

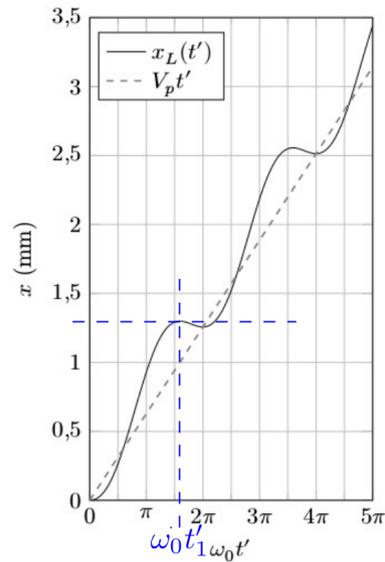
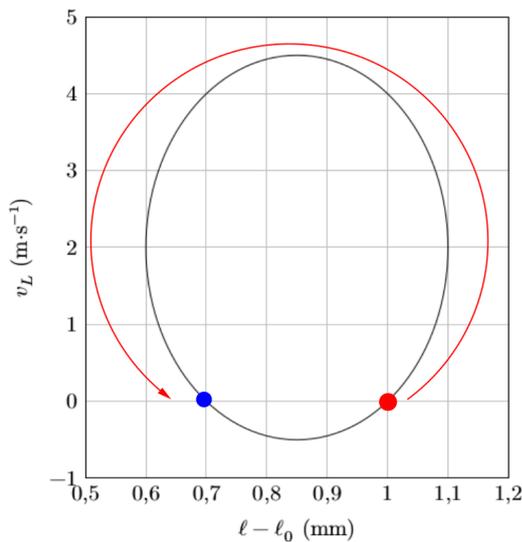
Sachant que  $t' = t - t_0$  et que  $t_0 = \frac{F_p}{kV_p}$ , on en déduit  $C_3 = \varepsilon F_p/k$ . Finalement, on obtient les trois constantes d'intégration :

$$C_1 = -\varepsilon F_p/k; \quad C_2 = -V_p/\omega_0; \quad C_3 = \varepsilon F_p/k$$

**9.a.** D'après la question 6, à la date  $t' = 0$ , on a  $\ell(t') - \ell_0 = F_p/k = 1,0 \text{ mm}$  et  $v_L(0) = 0$ . Pour  $v_1 > V_p$ ,  $\ell(t')$  décroît et inversement, le sens de parcours du portrait de phase est donc le sens trigonométrique. Sur les figures suivantes, un point rouge représente l'état initial et la flèche indique le sens de parcours du portrait de phase.



**9.b.** La phase « slip » perdure tant que  $v_L > 0$ . On remarque que dans le premier cas la solution *mathématique* présente une vitesse qui s'annule contrairement **apparemment** au second cas. Cela se remarque à la fois sur le portrait de phase et sur l'allure de  $x_L(t')$  (premier point de dérivée nulle).



En fait, mathématiquement, on montre que  $v_L(t')$  s'annule nécessairement entre  $\omega t' = 0$  et  $\omega t' = 2\pi$ . En effet, en factorisant la vitesse, on a

$$v_L(t') = \sqrt{V_p^2 + (\omega_0 \varepsilon F_p / k)^2 \sin(\omega_0 t' - \varphi)} + V_p$$

où  $\cos(\varphi) = \frac{\varepsilon F_p / k}{(\varepsilon F_p / k)^2 + (V_p / \omega_0)^2} > 0$  et  $\sin(\varphi) = \frac{V_p / \omega_0}{(\varepsilon F_p / k)^2 + (V_p / \omega_0)^2} > 0$ . On note directement que l'amplitude du sinus est supérieur à  $V_p$ ,  $v_L$  change donc de signe, ce qui signifie la fin de la phase de slip, car l'hypothèse faite initialement était une vitesse  $v_L > 0$ . En pratique dans le cas où  $V_p = 20 \text{ m.s}^{-1}$ , on remarque mal cette annulation de la vitesse car plus  $V_p$  est grand et plus l'amplitude devant la partie sinusoïdale tend vers  $V_p$ .

**9.c.** Dans le cas *A*, où la phase de « slip » s'arrête de manière manifeste, elle est nécessairement suivi d'une phase de « stick » qui se déroule donc à vitesse nulle jusqu'à ce que  $\ell(t') - \ell_0 > F_p / k$  (cf question 6). On en déduit le nouveau portrait de phase.

