Corrigé du devoir surveillé n°3 A : électromagnétisme

Problème n°1

A.1/1,5 L'ARQS consiste à négliger la propagation du champ électromagnétique. Le temps de propagation sur une distance d est $\frac{d}{c}$. Le temps caractéristique d'évolution du circuit est τ. La condition de l'approximation est donc :

$$\frac{d}{c} \ll \tau \quad \text{soit} \quad d \ll c\tau = 3000 \text{ m}$$

La longueur caractéristique du cylindre est sûrement très petite devant 3 km. L'ARQS est donc légitime. Le reste de la question est vraiment du cours...

A.2/1,5 Tout plan contenant Oz est plan d'antisymétrie donc $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\overrightarrow{u_z}$. L'invariance par translation selon z et par rotation selon θ implique que $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathrm{B}(r,t)\overrightarrow{u_z}$.

On applique le théorème d'Ampère sur un contour fermé "à cheval" sur le solénoïde et on obtient

$$\mathbb{C}(\overrightarrow{\mathrm{B}}) = \mathrm{B}(r)\ell = \mu_0 n\ell i(t)$$

Car le champ est nul à l'extérieur. On constate que $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est uniforme dans le solénoïde et :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mu_0 n i(t)\overrightarrow{u_z} = \mu_0 n \mathrm{I}_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\overrightarrow{u_z}}$$

B/1,5 L'équation de Maxwell-Faraday donne

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial r\mathrm{E}}{\partial r} = \frac{\mathrm{B}(t)}{\tau}$$

En intégrant

$$r\mathrm{E} = \frac{\mathrm{B}(t)r^2}{2\tau} + \mathrm{C}$$

Bien sûr E ne peut diverger en 0 et C=0.

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{r}{2\tau}\mathrm{B}(t)\overrightarrow{u_\theta}}$$

C.1/1

$$u_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{B}^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\mathrm{B}^2(t)\left(\frac{1}{\mu_0} + \varepsilon_0\left(\frac{r}{2\tau}\right)^2\right)$$

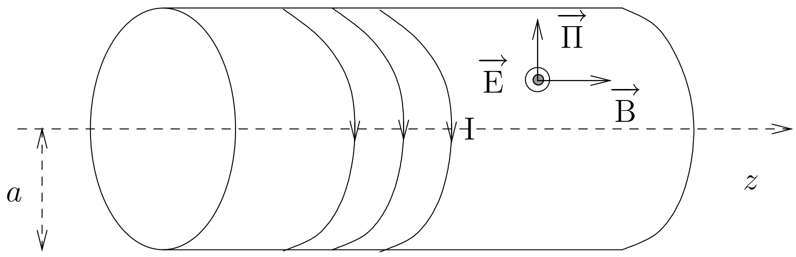
d'où

$$\frac{u_e}{u_m} = \left(\frac{r}{2c\tau}\right)^2$$

Dans l'ARQS ce terme est très petit devant 1 et l'énergie électrique est négligeable devant l'énergie magnétique.

C.2/1,5 Le vecteur de Poynting est nul en dehors du solénoïde alors qu'à l'intérieur,

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{E}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\mu_0} = \frac{r\mathrm{B}^2(t)}{2\tau\mu_0}\overrightarrow{u_r}}$$



C.3/2 En cylindriques div $r\overrightarrow{u_r} = 2$ donc

$$\boxed{\text{div }\overrightarrow{\Pi} = \frac{B^2(t)}{\mu_0 \tau}}$$

Or
$$\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \frac{\partial u_m}{\partial t} = -\frac{B^2(t)}{\mu_0 \tau}}$$

On retrouve bien l'équation de conservation locale de l'énergie électromagnétiquepuisque $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$ dans le solénoïde.

D.1/2 L'énergie magnétique est

$$U_m = \iiint u_m \, dV = \frac{B^2(t)\pi a^2 h}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2(t) \pi a^2 h$$

On en déduit par identification à l'expression $U_m = \frac{1}{2}Li^2$,

$$\boxed{L = \mu_0 n^2 \pi a^2 h}$$

On peut négliger l'énergie électrique de sorte que :

$$\boxed{U_{em} \approx U_m = \frac{B^2(t)\pi a^2 h}{2\mu_0}}$$

D.2/1,5 Le flux du vecteur de Poynting à travers une portion de longueur h du solénoïde est [1] à l'instant t

$$\varphi(\overrightarrow{\Pi}) = \oiint \overrightarrow{\Pi}(r = a, t).\,d\overrightarrow{S} = \frac{a}{\tau}\frac{B^2(t)}{2\mu_0}2\pi a h = \pi a^2 h \frac{B^2}{\tau \mu_0}$$

D.3/2

$$\frac{dU_{em}}{dt} = -\frac{2}{\tau}\frac{B^2(t)\pi a^2 h}{2\mu_0}$$

On retrouve le bilan global dans le solénoïde dans lequel il y a du vide et donc $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$:

$$\boxed{\varphi(\overrightarrow{\Pi}) + \frac{dU_{em}}{dt} = 0}$$

$\varphi(\overrightarrow{\Pi})$ représente la puissance électromagnétique sortant algébriquement du solénoïde. Ce terme est opposé à la variation temporelle d'énergie électromagnétique. Si la puissance électromagnétique sort, l'énergie électromagnétique diminue.

Problème n°2 : condensateur en régime variable

1. Ne pas oublier d'écrire $\overrightarrow{\Pi}$ en $r = a$!

1/1 Les lois de l'électocinétique donnent $\mathrm{RC}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + q = 0$

d'où
$$\boxed{q(t) = \mathrm{Q}_0 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \mathrm{RC}}$$

2/1 On applique le théorème de Gauss en considérant une surface entourant l'armature inférieure chargée $q(t)$. Il vient alors

$$\boxed{\mathrm{E}(t) = \frac{q(t)}{\varepsilon_0 \mathrm{S}} = \frac{\mathrm{Q}_0 e^{-t/\mathrm{RC}}}{\varepsilon_0 \mathrm{S}}}$$

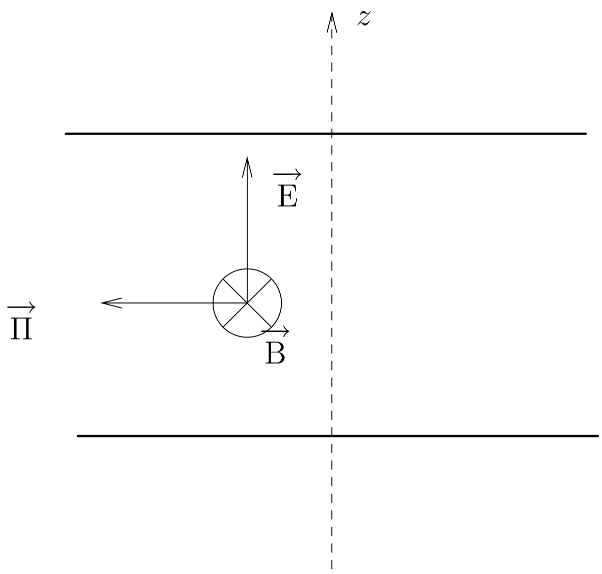
3/2 On applique le théorème d'Ampère généralisé en considérant un contour circulaire de rayon $r < a$ centré sur Oz :

$$\oint \overrightarrow{\mathrm{B}}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mu_0 \mathrm{I} + \varepsilon_0\mu_0 \iint \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = -\frac{\mu_0 \mathrm{Q}_0 e^{-t/\mathrm{RC}}}{\mathrm{RCS}}\pi r^2$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{B}(r,t) = -\frac{\mu_0 \mathrm{Q}_0 e^{-t/\mathrm{RC}}}{2\mathrm{RCS}} r}$$

1,5

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{E}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\mu_0} = \frac{\mathrm{Q}_0^2 e^{-2t/\mathrm{RC}} r}{\varepsilon_0 2\mathrm{RCS}^2}\overrightarrow{u_r}$$



Bien noter que $\overrightarrow{\Pi}$ est sortant : le condensateur perd de l'energie au cours de sa décharge.

5/2

$$\mathcal{P} = \oiint \overrightarrow{\Pi}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = 2\pi a e \Pi(r = a)$$

d'où
$$\boxed{\mathcal{P} = \pi a^2 e \frac{\mathrm{Q}_0^2 e^{-2t/\mathrm{RC}}}{\varepsilon_0 \mathrm{RCS}^2} = \frac{e\mathrm{Q}_0^2 e^{-2t/\mathrm{RC}}}{\varepsilon_0 \mathrm{RCS}}}$$

6/2 Dans ce cas, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$ et $\dfrac{\mathrm{dU_{em}}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P} = -\dfrac{e}{\varepsilon_0 \mathrm{S}} q \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

d'où
$$\boxed{\mathrm{U_{em}} = \frac{q^2}{2\mathrm{C}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} = \frac{\varepsilon_0 \mathrm{S}}{e}}$$

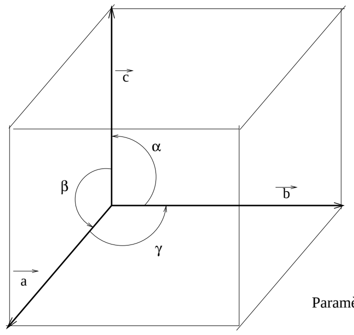
$\boxed{\textbf{7/1}}$ $\dfrac{u_m}{u_e} \ll 1$

$\boxed{\textbf{8/2}}$ $\mathrm{U}_{em} = \iiint \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2 \mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2 = \pi a^2 e \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2 = \dfrac{q^2}{2\mathrm{C}}$

III. Cristallographie

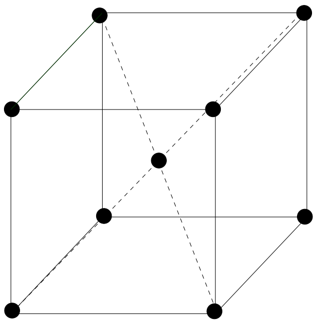
$\boxed{\textbf{A.1.a/0,5}}$ La **maille** est la brique élémentaire définissant la structure d'un cristal. On obtient la structure par la répétition par translation de cette maille. On appelle « maille élémentaire » une maille de la plus petite dimension possible (pour le réseau considéré).

La géométrie de la maille définit le système cristallin. Elle est caractérisée par 6 paramètres $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ α, β, γ :

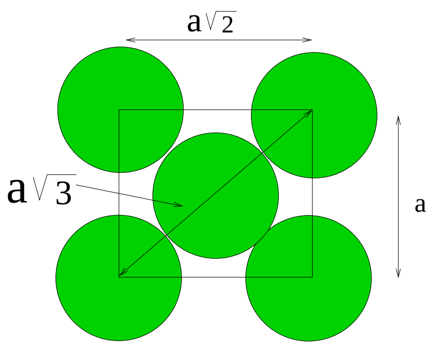


Paramètres de la maille

$\boxed{\textbf{A.1.b/0,5}}$ Dans ce type de structure, une sphère se trouve au centre du cube et est tangente aux sommets.



Structure cubique centrée



tangence le long d'une diagonale

$\boxed{\textbf{A.1.c/0,5}}$ Il y a 1 sphère au centre de chaque maille et 8*1/8 aux sommets soit Z=2 atomes par maille.

$\boxed{\textbf{A.1.d/1,5}}$ La compacité est le rapport du volume occupé par les atomes considérés comme des sphères dures et le volume du cristal.

On a
$$4\mathrm{R} = a\sqrt{3}$$

$$\boxed{\mathcal{C}_{cc} = \frac{2 * \dfrac{4\pi}{3}\mathrm{R}^3}{(4/\sqrt{3}\mathrm{R})^3} = 0,68 < 0,74}$$

On rappelle que 0,74 est la compacité maximale.

$\boxed{\textbf{A.1.e/2}}$ La masse volumique est la masse des atomes présents dans une masse divisée par le volume V de la maille : on rappelle qu'il y a $\mathcal{N}_\mathrm{A} = 6,02.10^{23}$ atome par mole donc la masse d'un atome est $\mathrm{M}/\mathcal{N}_\mathrm{A}$.

$$\rho_\alpha = \frac{\mathrm{Z} * \mathrm{M}}{\mathcal{N}_\mathrm{A}\mathrm{V}} = \frac{2\mathrm{M}}{\mathcal{N}_\mathrm{A} a^3}$$

où Z est le nombre d'atomes présents dans la maille. On a donc :

$$\boxed{a = \left(\frac{2\text{M}}{\rho_\alpha \mathcal{N}_\text{A}}\right)^{1/3} = 2,9.10^{-10}\ \text{m}}$$

A.1.f/1

$$\boxed{\text{R}_\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4} = 1,2.10^{-10}\ \text{m}}$$

A.2.a/2 Le coefficient qui traduit la variation du volume en fonction de la température à pression constante est le coefficient de dilatation isobare

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\text{V}}\left(\frac{\partial \text{V}}{\partial \text{T}}\right)_p}$$

On rappelle que χ_T est le coefficient de compressibilité isotherme et vaut $\chi_\text{T} = -\frac{1}{\text{V}}\left(\frac{\partial \text{V}}{\partial p}\right)_\text{T}$. Le coefficient β est hors programme ($\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial \text{V}}\right)_\text{T}$).

L'évolution V(T) étant linéaire,

$$\left(\frac{\partial \text{V}}{\partial \text{T}}\right)_p = \frac{\text{V}_{910} - \text{V}_{20}}{910 - 20}$$

On prend la valeur moyenne de $\text{V} = \frac{\text{V}_{910} + \text{V}_{20}}{2}$ pour avoir la valeur moyenne de α.

d'où
$$\boxed{\alpha = \frac{2}{\text{V}_{910} + \text{V}_{20}} \frac{\text{V}_{910} - \text{V}_{20}}{910 - 20} = 4,33.10^{-5}.\text{K}^{-1}}$$

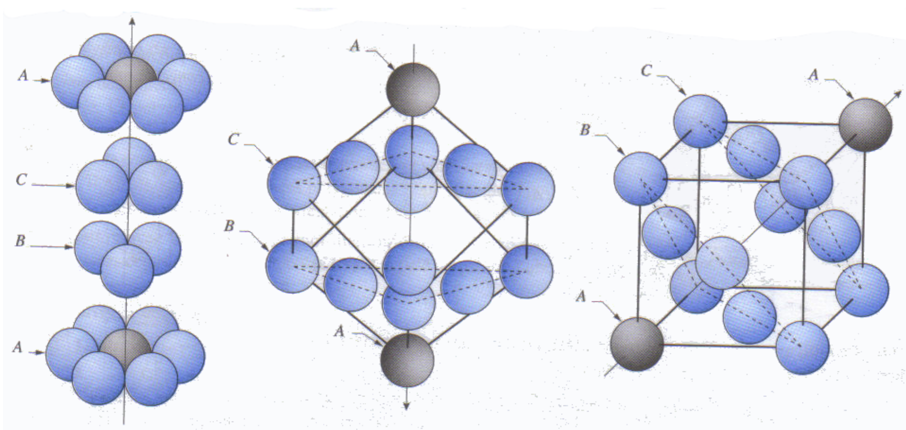
A.2.b/1 Le paramètre de maille varie entre

$$\boxed{a_{20} = \left(\frac{2\text{MV}_{20}}{\mathcal{N}_\text{A}}\right)^{1/3} = 2,868.10^{-10}\ \text{m} \quad \text{et} \quad a_{910} = \left(\frac{2\text{MV}_{910}}{\mathcal{N}_\text{A}}\right)^{1/3} = 2,904.10^{-10}\ \text{m}}$$

A.2.c/1 A 910°, le rayon du fer est

$$\boxed{\text{R}_{910} = \frac{a_{910}\sqrt{3}}{4} = 1,258.10^{-10}\ \text{m}}$$

A.3.a/0,5 l s'agit d'un cube. Les sphères se trouvent aux sommets et aux centres des faces.



A.3.b/0,5 Dans une maille, il y a 6 sphères aux centres des faces appartenant à 2 mailles et 8 sphères aux sommets appartenant à 8 mailles. Soit :

$$\boxed{6*1/2+8*1/8=4 \text{ sphères par maille}}$$

A.3.c/1 Pour calculer la compacité, il faut calculer le volume d'une maille ; c'est

$$\mathrm{V} = a^3$$

Mais les sphères du sommet sont tangentes aux sphères des centres des faces et donc $2\mathrm{R} = a\sqrt{2}/2$ (tangence le long d'une diagonale).

$$\mathrm{V} = 16\sqrt{2}\mathrm{R}^3$$

$$\boxed{\mathcal{C}_{cfc} = \frac{4 * 4/3\pi \mathrm{R}^3}{16\sqrt{2}\mathrm{R}^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,74}$$

A.3.d/1 Le paramètre de maille est

$$\boxed{a_\gamma = \frac{4\mathrm{R}_\gamma}{\sqrt{2}} = 365 \text{ pm}}$$

A.3.e/1 Le volume massique est l'inverse de la masse volumique :

$$\boxed{v_{(\gamma)910} = \frac{\mathcal{N}_\mathrm{A}\mathrm{V}}{\mathrm{Z} * \mathrm{M}} = \frac{\mathcal{N}_\mathrm{A} a^3}{4\mathrm{M}} = 0,1309 \text{ g.cm}^{-3}}$$

A.4.a/0,5 Il s'agit d'un site octaédrique non régulier puisque certains côtés valent a et d'autres $a\sqrt{3}/2$.

A.4.b/1 On aurait au minimum tangence avec un atome du centre d'un cube $\mathrm{R}_{\mathrm{M}\alpha} + \mathrm{R}_\alpha = a_\alpha/2$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R}_{\mathrm{M}\alpha} = a_\alpha/2 - \mathrm{R}_\alpha = 20 \text{ pm}}$$

A.4.c/0,5 Les sites octaédriques d'un CFC sont situés au centre des cubes et des arrêtes. Ces octaèdres sont réguliers.

A.4.d/1 On aurait

$$2(\mathrm{R}_{\mathrm{M}\gamma} + \mathrm{R}_\gamma) = a_\gamma$$

$$\boxed{\mathrm{R}_{\mathrm{M}\gamma} = a_\gamma/2 - \mathrm{R}_\gamma = 53 \text{ pm}}$$

A.4.e/0,5 A priori les sites octaédriques du fer α et du fer γ sont trop petites pour qu'un atome de carbone s'y insère sans déformer le cristal.

A.5.a/1 Dans ce cas, on a

$$2(\mathrm{R}_\mathrm{C} + \mathrm{R}_\alpha) = a'_\alpha = 404 \text{ pm}$$

Cela conduit à une variation de volume de

$$\left(\frac{a'^3_\alpha - a^3_\alpha}{a^3_\alpha}\right) = 63\%$$

A.5.b/1 Dans ce cas, on a

$$2(\mathrm{R}_\mathrm{C} + \mathrm{R}_\gamma) = a'_\gamma = 412 \text{ pm}$$

Cela conduit à une variation de volume de

$$\left(\frac{a_\gamma'^3 - a_\gamma^3}{a_\alpha^3}\right) = 43\%$$

$\boxed{\textbf{A.5.c/0,5}}$ La formation d'austénite semble plus favorable.

$\boxed{\textbf{A.5.d/0,5}}$ L'acier contient 4 atomes de fer par maille et ceux-ci sont 12/56 fois moins lourds que les atomes de carbone. Il y a donc

$$\boxed{4 \times \frac{1,33}{100}\frac{56}{12} = 25\%}$$

atomes de carbone par maille.

$\boxed{\textbf{A.5.e/1}}$ La masse d'une maille n'a pratiquement pas changé (d'environ 1%) mais son volume a changé donc la nouvelle masse volumique est

$$\rho' = \rho_\gamma \left(\frac{a_\gamma}{a_\gamma'}\right)^3 = 5633 \text{ kg.m}^{-3}$$

Cette variation semble très importante et il est probable que l'hypothèse selon laquelle toutes les mailles sont expansées alors qu'il y à 1,33% de carbone est surement fausse.