Devoir surveillé n°2 B : corrigé

I. Emetteur de puissance pour téléphone portable

1/2 A est la valeur moyenne du signal (ou composante continue).

$$\langle i(t)\rangle = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}_0/2}^{\mathrm{T}_0/2} i(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \mathrm{I}_0\mathrm{d}t$$

soit

$$\boxed{\langle i(t)\rangle = \frac{\mathrm{I}_0\tau}{\mathrm{T}}}$$

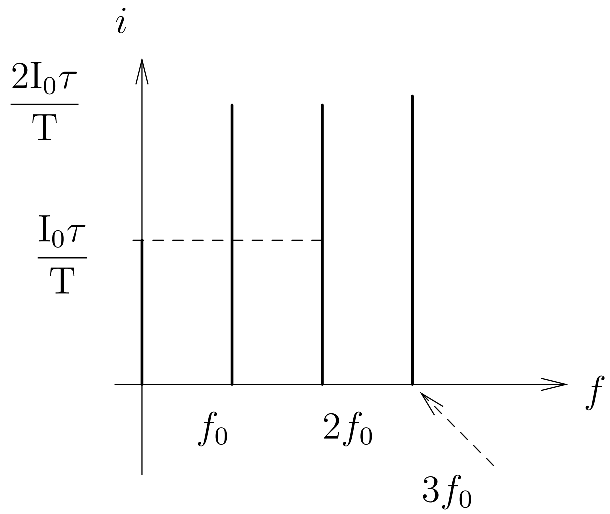
2/2 Le fondamental est :

$$\boxed{a_1 = \frac{2\mathrm{I}_0\sin(\pi f_0\tau)}{\pi}}$$

Dans la limite des impulsions brèves, $f_0\tau \ll 1$ et

$$\boxed{a_1 \approx 2\mathrm{I}_0 f_0\tau = 2\,\langle i(t)\rangle}$$

3/2 On a le spectre :



4/2 Il suffit de calculer l'impédance du RLC parallèle :

$$\frac{\underline{v_a}}{\underline{i}} = \frac{1}{j\mathrm{C}\omega + \frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{j\mathrm{L}\omega}}$$

d'où

$$\boxed{\frac{\underline{v_a}}{\underline{i}} = \frac{\mathrm{R}}{1 + j(\mathrm{RC}\omega - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}\omega})} = \frac{\mathrm{R}}{1 + j\mathrm{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

avec

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = \mathrm{R}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}}}$$

ce qui est bien l'expression d'un filtre passe-bande du second ordre.

5/2 Le facteur de qualité est très important et le filtre très sélectif. La bande passante est de $\dfrac{f_0}{\mathrm{Q}} = 9\mathrm{MH}z$ de sorte que seule la fréquence f_0 est transmise. Seul le fondamental de fréquence f_0 est donc transmis. Il s'agit d'une fonction sinusoïdale :

$$\boxed{v_a(t) = \mathrm{R}a_1 \cos(2\pi f_0 t) = \mathrm{V}_1 \cos(2\pi f_0 t)}$$

6/1 La loi des mailles done $v(t) = \mathrm{E} - v_a(t)$. Il faut donc avoir

$$\boxed{2\mathrm{RI}_0 f_0 \tau \leqslant \mathrm{E}}$$

7/2 La puissance moyenne reçue par l'antenne est :

$$\langle p(t) \rangle = \langle v_a(t) i(t) \rangle = \left\langle \mathrm{V}_1 \cos(2\pi f_0 t) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \cos(2\pi n f_0 t) \right) \right\rangle$$

Or, $$\langle \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi n f_0 t) \rangle = 0 \quad \text{si} \quad n \neq 1 \quad \text{et} \quad \langle \cos^2(2\pi f_0 t) \rangle = \frac{1}{2}$$

d'où $$\boxed{\mathcal{P}_u = \frac{\mathrm{V}_1^2}{2\mathrm{R}}}$$

Elle est donc maximale lorsque $\mathrm{V}_1 = \mathrm{E}$ et vaut alors $\mathcal{P}_u = \dfrac{\mathrm{E}^2}{2\mathrm{R}}$.

8/2 La puissance moyenne fournie par l'alimentation est

$$\mathcal{P}_a = \langle \mathrm{E}i(t) \rangle = \frac{\mathrm{EI}_0 \tau}{\mathrm{T}}$$

Dans le cas le plus favorable, on a alors un rendement :

$$r = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_a} = \frac{\dfrac{\mathrm{E}^2}{2\mathrm{R}}}{\dfrac{\mathrm{EI}_0 \tau}{\mathrm{T}}} = \frac{\mathrm{ET}}{2\mathrm{RI}_0 \tau}$$

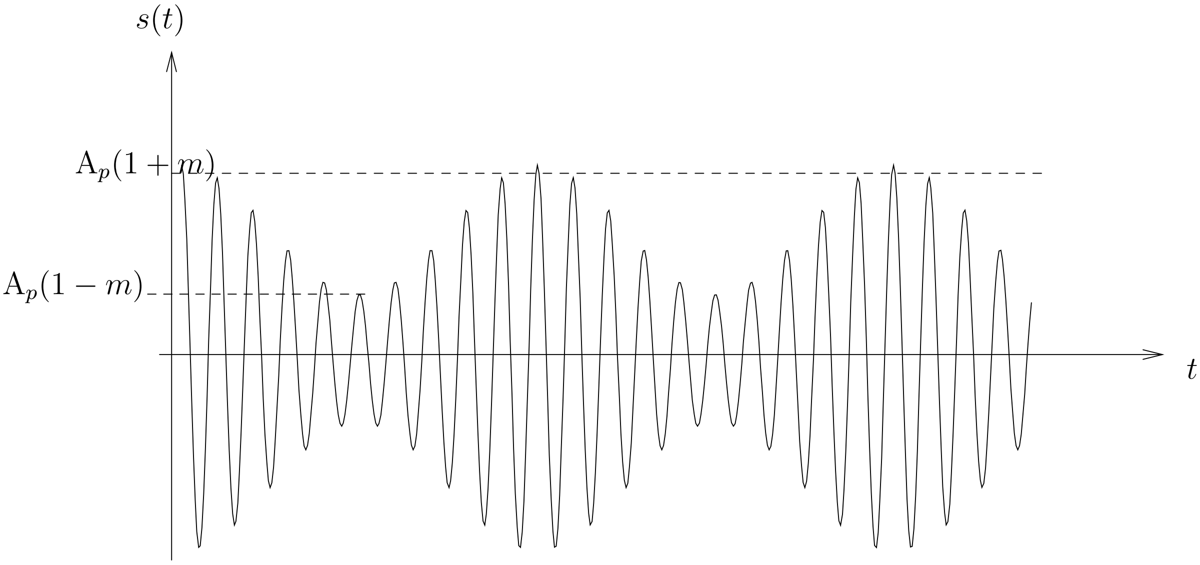
En tenant compte de la limitation $2\mathrm{RI}_0 f_0 \tau \leqslant \mathrm{E}$, on constate que le rendement tend vers 1. En effet, la puissance n'est dissipée dans le composant T que pendant la durée très brève des impulsions, on a alors $v(t) = \mathrm{E} - v_a(t) = 0$ puisque $v_a = \mathrm{E}$. Ainsi à chaque instant, soit l'intensité, soit la tension aux bornes de T est nulle ce qui correspond à une puissance dissipée nulle.

II. Spectre d'un signal modulé en amplitude

1.1/0,5 Le signal modulé obtenu est

$$\boxed{s(t) = s_p(t) + k s_p(t) s_m(t) = \mathrm{A}_p(1 + k\mathrm{A}_m \cos(2\pi f_m t)) \cos(2\pi f_p t) \quad \text{et} \quad m = k\mathrm{A}_m}$$

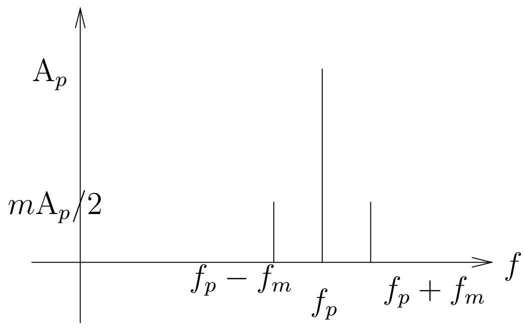
1.2/1 On choisit $m < 1$ et on obtient l'allure :



1.3/1,5 On linéarise le produit des cosinus et

$$s(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) + \frac{mA_p}{2} \left(\cos(2\pi(f_p - f_m)t) + \cos(2\pi(f_p + f_m)t)\right)$$

Le spectre est alors

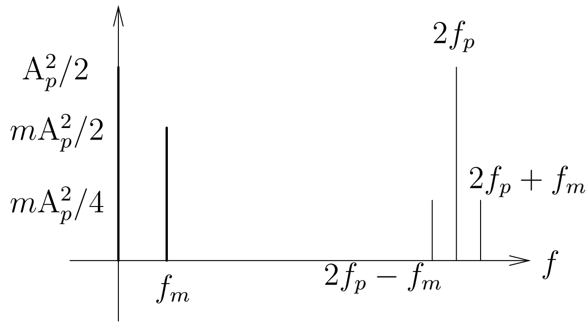


2.1/2 Le signal est

$$s'(t) = s(t)s_p(t) = A_p^2(1 + m\cos(2\pi f_m t))\cos^2(2\pi f_p t) = A_p^2(1 + m\cos(2\pi f_m t))(\frac{1 + \cos(4\pi f_p t)}{2}$$

$$s'(t) = \frac{A_p^2}{2}(1 + \cos(4\pi f_p t) + m\cos(2\pi f_m t) + m/2(\cos(2\pi(2f_p - f_m)t) + \cos(2\pi(2f_p + f_m)t))$$

Le spectre est alors

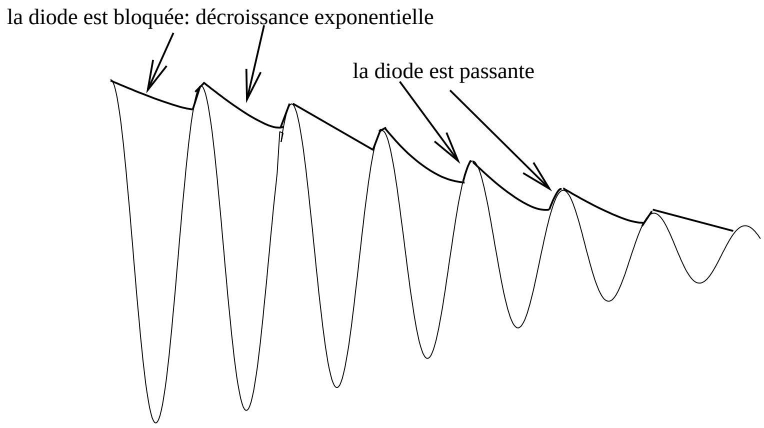


2.2/1 Il suffit d'utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c telle que

$$\boxed{f_m \ll f_c \ll 2f_p - f_m}$$

2.3/2,5 Le détecteur de crêtes transforme le signal $u_s(t)$ en un signal $u_d(t)$ qui est l'enveloppe de u_s. La diode réalise donc l'opération suivante :

- si $i > 0$, la diode est passante et se comporte comme un fil. On a alors $v_s = v_d$. Cela se produit si v_s (et donc v_d) croît et est positive.
- Si v_s décroît, on ne peut plus avoir $i > 0$ et la diode se bloque. Dans ce cas, C se décharge dans R et u_d décroît exponentiellement.
- cette décroissance se poursuit jusqu'à ce que $u_s = u_d$ et u_s croissante.
- Dans le cas où la constante de temps $\tau = \mathrm{RC}$ est très grande devant la période de la porteuse et est très petite devant la période du signal modulant, on a la situation suivante :



Troisième problème (Centrale PC 2006)

II.A.1/1 A l'équilibre, $\overrightarrow{\mathrm{T}} + \overrightarrow{\mathrm{N}} + \overrightarrow{\mathrm{P}} = \overrightarrow{0}$

En projetant, on trouve $\mathrm{T} = mg\sin\alpha$ et $\mathrm{N} = mg\cos\alpha$ de sorte que la condition de non glissement $\mathrm{T} \leqslant f\mathrm{N}$ revient à

$$\boxed{\alpha \leqslant \alpha_c = \mathrm{Arctan}\ \mu_s}$$

II.A.2/1 On projette de même le théorème de la résultante dynamique appliqué au bloc de neige :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg\sin\alpha_c - \mathrm{T} \quad \text{et} \quad \mathrm{N} = mg\cos\alpha_c$$

Comme le bloc glisse, $\mathrm{T} = \mu_d\mathrm{N} = \mu_d mg\cos\alpha_c$ d'où

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg\sin\alpha_c - \mu_d mg\cos\alpha_c$$

soit

$$\boxed{v(t) = v_0 + g(\sin\alpha_c - \mu_d\cos\alpha_c)t}$$

et

$$\boxed{\mathrm{E}_c(t) = \frac{1}{2}m\left(v_0 + g(\sin\alpha_c - \mu_d\cos\alpha_c)t\right)^2}$$

II.A.3/1 Comme $\mu_s = \tan\alpha_c$,

$$\mathrm{E}_c(t) = \frac{1}{2}m\left(v_0 + g\cos\alpha_c(\mu_s - \mu_d)t\right)^2$$

Or,

$$\cos\alpha_c = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha_c}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$$

$$\frac{\mu_s - \mu_d}{\sqrt{1+\mu_s^2}} = 0,97 \text{ pour la neige fraîche}$$

$$\frac{\mu_s - \mu_d}{\sqrt{1+\mu_s^2}} = 0,32 \text{ pour la neige en gobelets}$$

$$\frac{\mu_s - \mu_d}{\sqrt{1+\mu_s^2}} = 0,51 \text{ pour la neige à grains ronds}$$

C'est la neige fraîche qui provoque une énergie cinétique la plus grande et donc des avalanches les plus importantes.

II.A.4/1 La vitesse obéit à l'équation

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\sin\alpha - \mu_d g\cos\alpha$$

Le mouvement est ralenti si $\sin\alpha < \mu_d \cos\alpha$ soit $\alpha < \text{Arctan}\,\mu_d$.
(Cet angle est inférieur à α_c puisque $\mu_d < \mu_s$).

II.A.5/0,5 L'observation des pentes sur lesquelles ont lieu des avalanches permet de déterminer l'angle μ_s L'observation des pentes sur lesquelles les avalanches stoppent permet de déterminer μ_d.

II.B.1/1 Les aspérités sont espacées de Δr et la fréquence des chocs avec les blocs de vitesse v est :

$$\boxed{f = \frac{v}{\Delta r}}$$

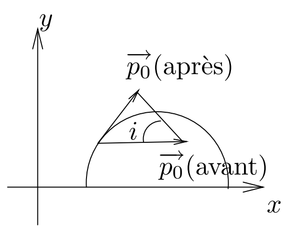
II.B.2/1 Il y a un bloc par carré de côté a sur une surface $\mathrm{L}\ell$ donc

$$\boxed{\mathrm{N}_1 = \frac{\mathrm{L}\ell}{a^2}}$$

II.B.3/1 Pendant $\mathrm{d}t$, l'avalanche subit $d\mathrm{N} = \mathrm{N}_1 f \mathrm{d}t$ chocs soit

$$\boxed{d\mathrm{N} = \frac{\mathrm{L}\ell v}{a^2 \Delta r}\mathrm{d}t}$$

II.B.4/2 Représentons la situation sur un schéma :



$$p_0(avant) = m_0 v \quad \text{et} \quad p_0(\text{après}) = m_0 v \sin i$$

En projection selon $\overrightarrow{u_x}$, $p_{0x}(\text{après}) = m_0 v \sin^2 i$ donc

$$\boxed{\Delta p_{0x} = m_0 v \sin^2 i - m_0 v = -\cos^2 i m_0 v}$$

II.B.5/2

$$d\mathrm{P}_{\text{chocs}} = d\mathrm{N}\Delta p_{0x}$$

d'où $$\boxed{dP_{\text{chocs}} = -\frac{m_0 S v^2 \cos^2 i}{a^2 \Delta r} \mathrm{d}t}$$

II.B.6/1

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{rug}} = \frac{d\overrightarrow{P}_{\text{chocs}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{m_0 S v^2 \cos^2 i}{a^2 \Delta r} \overrightarrow{u_x}}$$

II.B.7/1 Il y a Sd/a^2b blocs dans l'avalanche et $m = \dfrac{Sd}{a^2b} m_0$ d'où

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{rug}} = -\frac{mgv^2}{\xi d} \overrightarrow{u_x} \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{g \Delta r}{b \cos^2 i}}$$

II.B.8/1 ξ dépend de Δr et de i et donc de la nature du sol sur lequel s'écoule l'avalanche.

II.B.9/1 Plus v augmente moins l'empilement est compact du fait des chocs sur les aspérités et les paramètres a et b évoluent avec v.

II.C.1/1 Le TRD donne

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g \sin \alpha - \mu_d g \cos \alpha - \frac{gv^2}{\xi d}$$

II.C.2/2 En régime permanent $dv/dt = 0$ et donc

$$0 = g \sin \alpha - \mu_d g \cos \alpha - \frac{g v_\ell^2}{\xi d}$$

soit $$\boxed{v_\ell = \sqrt{\xi d (\sin \alpha - \mu_d g \cos \alpha)} = 25,6 \text{ m.s}^{-1}}$$

II.C.3/1 Comme v_ℓ^2 proportionnel à d, l'énergie cinétique augmente linéairement avec d.

II.C.4/2 L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{\xi d}(v_\ell^2 - v^2)$$

$$\frac{dv}{v_\ell^2 - v^2} = \frac{g}{\xi d} dt$$

En intégrant $$\frac{1}{v_\ell} \operatorname{Argth}\left(\frac{v}{v_\ell}\right) = \frac{g}{\xi d} t$$

puisque $v(0) = 0$.

d'où $$\boxed{v(t) = v_\ell \operatorname{th}\left(\frac{g v_\ell t}{\xi d}\right)}$$

II.C.5/2 On intégre

$$x(t) = \int_0^t v(t) \mathrm{d}t = v_\ell \frac{\xi d}{g v_\ell} \ln\left(\frac{g v_\ell t}{\xi d}\right)$$

d'où $$\boxed{x(t) = \frac{\xi d}{g} \ln\left(\frac{g v_\ell t}{\xi d}\right)}$$

II.C.6/1 Lorsque la vitesse limite est atteinte à 10% près,

$$\text{th}\left(\frac{g v_\ell t}{\xi d}\right) = 0,9$$

soit $$t = \frac{\xi d}{g v_\ell} \text{Argth } 0,9 \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{\xi d}{g} \ln \text{Argth } 0,9 = 170 \text{ m}$$

II.C.7/1 La conservation du débit donne

$$v_\ell d = v'_\ell d'$$

Comme $v_\ell = \sqrt{\xi d(\sin\alpha - \mu_d g \cos\alpha)}$ et $v'_\ell = \sqrt{\xi d'(\sin\alpha' - \mu_d g \cos\alpha')}$, on en déduit en éliminant d et d',

$$\boxed{\frac{v_\ell^3}{\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha} = \frac{{v'_\ell}^3}{\sin\alpha' - \mu_d \cos\alpha'}}$$

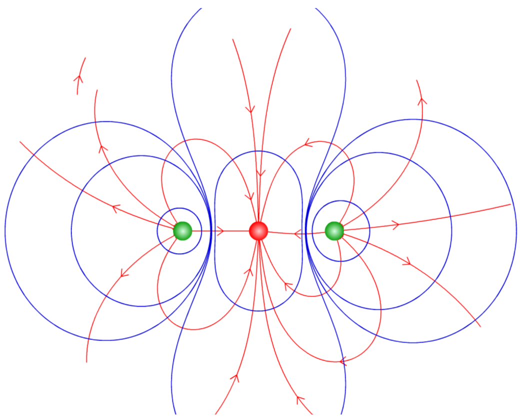
II.C.8/1 On obtient

$$\frac{v'_\ell}{v_\ell} = \left(\frac{\sin\alpha' - \mu_d \cos\alpha'}{\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha}\right)^{1/3} = 0,9$$

La vitesse est réduite de 10%.

IV. Electrostatique

1/1



2/1 Le plan de la feuille est plan de symétrie, de même que le plan contenant les trois charges. Le plan passant par la charge centrale et médiateur des deux autres est aussi plan de symétrie.

3/1 La charge centrale est négative et vaut -2q. Les deux autres valent q.

4/3 Il faut être distinguer les différents cas :

Pour $x > a$, $\mathrm{E}(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{2}{x^2}\right)$

Pour $x < -a$, $\mathrm{E}(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{2}{x^2}\right)$

Pour $0 < x < a$, $\mathrm{E}(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{2}{x^2}\right)$

Pour $-a < x < 0$, $\mathrm{E}(x) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{(x+a)^2} - \dfrac{1}{(x-a)^2} + \dfrac{2}{x^2}\right)$

Pour $y > 0$, $\mathrm{E}(y) = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}} - \dfrac{1}{y^2}\right)$

Pour $y < 0$, $\mathrm{E}(y) = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}} + \dfrac{1}{y^2}\right)$

$\boxed{\mathbf{5/1}}$ Il n'y a pas de point d'arrêt. C'est évident sur l'axe des x.Sur l'axe des y, l'influence de la charge centrale l'emporte toujours sur les deux autres.

$\boxed{\mathbf{6/1}}$ Le théorème de Gauss donne $\displaystyle\oiint \overrightarrow{\mathrm{E}}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = -\frac{2q}{\varepsilon_0}$

$\boxed{\mathbf{7/1}}$ Le théorème de Gauss donne $\displaystyle\oiint \overrightarrow{\mathrm{E}}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = 0$ puisque les 3 charges sont dans la sphère.