Corrigé du devoir surveillé n°1

I. Acomètissage du module philae

A.1/1 $C_{com} = \dfrac{m_{com}}{\mu_{com}} = \dfrac{4}{3}\pi r_{com}^3$

d'où
$$\boxed{r_{com} = \left(\frac{3m_{com}}{4\pi\mu_{com}}\right)^{1/3} = 1,8\ \text{km}}$$

A.3/0,5
$$\left[\frac{Gm_{com}}{r^2}\right] = \frac{L^3.M^{-1}.T^{-2}.M}{L^2} = L.T^{-2}$$

ce qui est bien la dimension d'une accélerration (comme $\overrightarrow{g}$).

A.4/1 Lors du largage, $g_{com}(r_{larg}) = \dfrac{Gm_{com}}{r_{larg}^2} = 1,3.10^{-6} m.s^{-2}$

Lors du contact, $g_{com}(r_{com}) = \dfrac{Gm_{com}}{r_{com}^2} = 2,1.10^{-4} m.s^{-2}$

On ne peut pas considérer le champ uniforme lors de la chute.

B.1/1 D'après le PFD dans le réferentiel lié à Rosetta, considéré comme galiléen, $m_{ph}\overrightarrow{a} = m_{ph}\overrightarrow{g}$. En projection selon $\overrightarrow{e_r}$,

d'où
$$\boxed{\ddot{r} + \frac{Gm_{com}}{r^2} = 0}$$

B.2/1,5 Par lecture graphique, on a
$$\boxed{\tau_0 = 145000\ \text{s} = 1j\ 16h}$$

B.3/1 $7h = 25200s$ donc cela correspond à la courbe f soit $v_0 = -0,75\ \text{m.s}^{-1}$

B.4/1 Sur la trajectoire de phase correspondant à $v_0 = -0,75\ \text{m.s}^{-1}$, on lit $\dot{r}(r_{com}) = -1,1\ \text{m.s}^{-1}$.

B.5/1 L'énergie potentielle est telle que $\delta W = F(r).dr = Gmm_{com}d(1/r)$

d'où
$$\boxed{E_p = -\frac{GmMm_{com}}{r} + K \quad \text{avec} \quad K = 0}$$

puisque $E_p \to 0$ si $r \to \infty$.

B.6/0,5 Philae n'étant soumis qu'à des forces conservartives, son énergie mécanique est constante.

B.7/2 Par conservation de l'énergie mécanique entre largage et atterrissage, on a
$$\frac{1}{2}m_{ph}v_0^2 - \frac{Gm_{ph}Mm_{com}}{r_{larg}} = \frac{1}{2}m_{ph}v_f^2 - \frac{Gm_{ph}Mm_{com}}{r_{com}}$$

d'où
$$\boxed{v_f = \sqrt{v_0^2 + 2Gm_{com}\left(\frac{1}{r_{com}} - \frac{1}{r_{larg}}\right)} = 1,1\ \text{m.s}^{-1}}$$

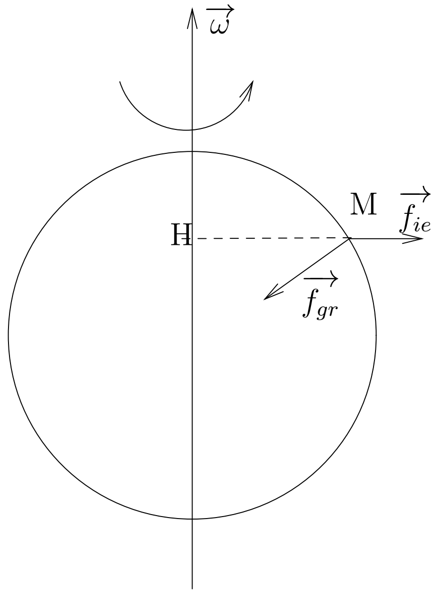
On retrouve bien la valeur de la question B.4

C.1/1 La masse de Philae est identique sur Terre et à la surface de la comète, C'est son poids qui est moins important (puisque g_{com} est bien inférieur à g_{terre}).

Le poids sur la comète est $\mathrm{P} = m_p h g_{com} = 2,0.10^{-2}\mathrm{N}$ ce qui correspondrait au poids d'une masse de 2,0 g sur terre (proche de 1,7 g).

C.2/1 Le référentiel cométocentrinque n'est pas galiléen et il faut ajouter la force d'inertie d'entrainement $\overrightarrow{f_{ie}} = m\omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}}$

C.3/1 On voit sur le dessin que le poids réel est diminué du fait de la force d'entraînement (et sa direction n'est plus vers le centre de la comète).



C.4/2 Le poids est dans le plan équatorial où $\overrightarrow{\mathrm{HM}} = r_{com}\overrightarrow{e_r}$,

$$m\overrightarrow{g}_{com} + m\omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}}$$

La variation relative de poids est donc

$$\frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{P}} = \frac{\omega^2 r_{com}}{g_{com}} = 17\%$$

en prenant $\omega = 2\pi/\mathrm{T}$.

D.1/1 On a montré en cours

$$\boxed{\overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a} = r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}}$$

D.2/1 On applique simplement le PFD dans le référentiel cométocentrique supposé galiléen,

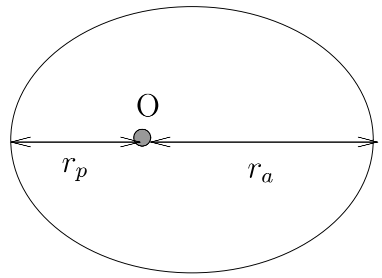
$$m_{ros}\overrightarrow{a} = m_{ros}\overrightarrow{g}_{com}$$

Il vient alors

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{G}m_{com}}{r_1}} = 15\ \mathrm{cm.s^{-1}}}$$

D.3/1 $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi r_1}{v_1} = 14,6j$

D.4/1



D.5/1 L'énergie mécanique est pour un mouvement elliptique $\mathrm{E}_m = -\mathrm{G}\dfrac{m_{ros}m_{com}}{2a}$ avec $r_p + r_a = 2a$, on obtient

$$\boxed{\mathrm{E}_m = -\mathrm{G}\frac{m_{ros}m_{com}}{r_p + r_a}}$$

D.6/2 Au péricentre, $\mathrm{E}_m = \mathrm{E}_c + \mathrm{E}_p$ s'écrit

$$-\mathrm{G}\frac{m_{ros}m_{com}}{r_p + r_a} = \frac{1}{2}m_{ros}v_p^2 - \mathrm{G}\frac{m_{ros}m_{com}}{r_p}$$

d'où
$$\boxed{v_p = \sqrt{2\mathrm{G}m_{com}\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a + r_p}\right)} = 30 \text{ cm.s}^{-1}}$$

D.7/1 Sur l'orbite circulaire de rayon r_p, la vitesse de la sonde est $v_p' = \sqrt{\dfrac{\mathrm{G}m_{com}}{r_p}} = 26 \text{ cm.s}^{-1}$ Il faut donc ralentir la sonde de 4 cm.s^{-1} lorsque celle-ci est au péricentre.

II. Mines MP 2009

1/1 On applique le théorème du moment cinétique à M :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{L}}_\mathrm{O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{F}} = \overrightarrow{0}$$

puisque $\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U}(r) = \mathrm{F}\overrightarrow{u_r}$. On a donc $\overrightarrow{\mathrm{L}}_\mathrm{O} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}$ et donc $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$qui est perpendiculaire à un vecteur constant. On en conclut que le mouvement est plan.

2/1 On remarque tout d'abord que $\mathrm{E}_p = m\mathrm{U}(r)$ et $\mathrm{L}_\mathrm{O} = mr^2\dot{\varphi}$. Donc $\dot{\varphi} = \dfrac{\mathrm{C}}{r^2}$.

Or
$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_c + \mathrm{E}_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) + m\mathrm{U}(r) = m\varepsilon$$

d'où
$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\mathrm{C}^2}{2r^2} + \mathrm{U}(r)}$$

3/0,5

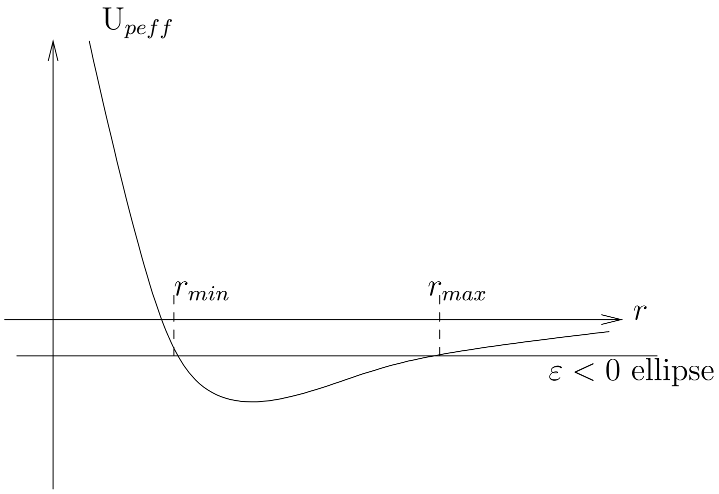
$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = \frac{-\mathcal{G}\mathrm{M}_s m}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -m\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{-\mathcal{G}\mathrm{M}_s}{r}$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{K} = \mathcal{G}\mathrm{M}_s}$$

4/2 Le plus simple est d'introduire l'énergie potentielle effective massique :

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{C^2}{2r^2} = \frac{-K}{r} + \frac{C^2}{2r^2}$$

On représente U_{eff} :



La condition demandée impose d'avoir $U_{effmin} < 0 < \varepsilon$. Or le minimum de $U_{eff}(r)$ correspondant au mouvement circulaire $r_{min} = r_{max}$ est atteint en $r_c = \frac{C^2}{K}$ et vaut $U_{eff}(r_c) = -\frac{K^2}{2C^2}$. La condition est donc

$$\boxed{-\frac{K^2}{2C^2} < \varepsilon < 0}$$

5/2,5 A l'aphélie et au périhélie, $\dot{r} = 0$ donc r_{min} et r_{max} sont solutions de l'équation $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{C^2}{2r^2} - \frac{K}{r}$ qui est une équation du second degré $r^2\varepsilon + Kr - \frac{1}{2}C^2 = 0$.

Les solutions sont

$$r_{min} = \frac{-K + \sqrt{K^2 + 2\varepsilon C^2}}{2\varepsilon} \quad \text{et} \quad r_{max} = \frac{-K - \sqrt{K^2 + 2\varepsilon C^2}}{2\varepsilon}$$

En sommant les deux solutions on obtient

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{K}{r_{min} + r_{max}}}$$

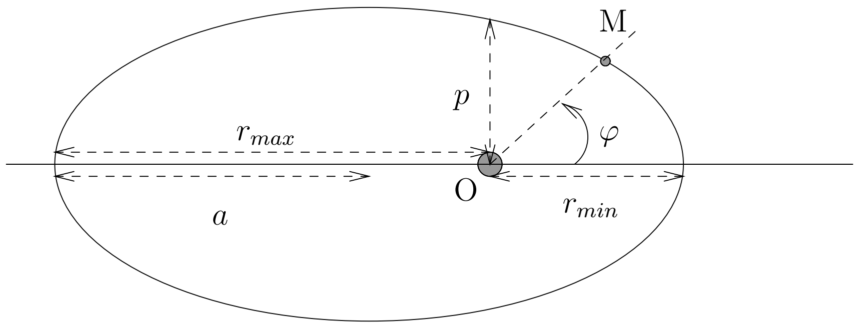
On peut écrire $r^2 + \frac{Kr}{\varepsilon} - \frac{C^2}{2\varepsilon} = 0 = (r - r_{min})[r - r_{max})$ donc

$$\boxed{C^2 = -2\varepsilon r_{min} r_{max} = -\frac{2K r_{min} r_{max}}{r_{min} + r_{max}}}$$

On a alors

$$\boxed{\varepsilon = \frac{-K}{2a} \quad \text{et} \quad C = \sqrt{Kp}}$$

6/1 Pour une interaction gravitationnelle, la trajectoire est une conique de foyer S. Comme le mouvement est lié avec $r_{min} \neq r_{max}$ on en conclut que la trajectoire est une **ellipse** de foyer S. a est le demi-grand axe de l'ellipse, p le paramètre de l'ellipse et e l'excentricité.



7/3 On constate que r augmente pour $0 < \varphi < \pi$ donc $\dot{r} > 0$. L'expression de ε implique

$$\dot{r}^2 = 2\varepsilon - \frac{\mathrm{C}^2}{r^2} + \frac{2\mathrm{K}}{r} \quad \text{d'où} \quad \dot{r} = \sqrt{2\varepsilon - \frac{\mathrm{C}^2}{r^2} + \frac{2\mathrm{K}}{r}}$$

d'où
$$\mathrm{d}t = \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{2\varepsilon r^2 - \mathrm{C}^2 + 2\mathrm{K}r}} = \sqrt{\frac{a}{\mathrm{K}}}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{-r^2 + \frac{\mathrm{C}^2}{2\varepsilon} + 2ar}}$$

Or,
$$a^2e^2 - a^2 = \frac{(r_{max} - r_{min})^2}{4} - \frac{(r_{max} + r_{min})^2}{4} = -r_{max}r_{min}$$

Or d'après la question 5, $-r_{max}r_{min} = \dfrac{\mathrm{C}^2}{2\varepsilon}$, on peut donc intégrer entre $t = 0$ et τ

$$\boxed{\tau = \int_{r_{min}}^{r(\varphi)} \sqrt{\frac{a}{\mathrm{K}}}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}}$$

8/3 On effectue le changement de variable proposé $\mathrm{d}r = ea\sin\xi\mathrm{d}\xi$ et

$$\tau = \sqrt{\frac{a}{\mathrm{K}}}\int_0^{\xi} \frac{ea\sin\xi\mathrm{d}\xi a(1 - e\cos\xi)}{\sqrt{a^2e^2 - a^2e^2\cos^2\xi}} = \sqrt{\frac{a}{\mathrm{K}}}\int_0^{\xi} a(1 - e\cos\xi)\mathrm{d}\xi$$

d'où
$$\boxed{\tau = a\sqrt{\frac{a}{\mathrm{K}}}(\xi - e\sin\xi)}$$

En $\varphi = \pi$, $r = r_{max} = a(1+e)$ et $\xi = \pi$ donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{T}}{2} = a\sqrt{\frac{a}{\mathrm{K}}}\pi}$$

Le nom de cette relation est la loi de Kepler.

9/2 La loi de Kepler exprimée en années et unités astronomiques s'écrit $\dfrac{a^{3/2}}{\mathrm{T}} = \dfrac{1^{3/2}}{1} = 1$. Or $a = \dfrac{r_{min}}{1-e} =$ $16,86 u.a$ donc

$$\boxed{\mathrm{T} = a^{3/2} = 69,2 \text{ ans}}$$

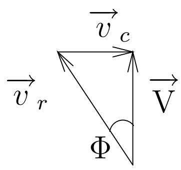
Pour $r = 26,06$UA, $\xi = \mathrm{Arccos}\,\dfrac{a-r}{ea} = 0,94$ donc $\tau = 2,1$ ans.

10/1 Le vent solaire entraîne les poussières constituant la queue de la comète ; le soleil et la queue sont situés de part et d'autre de la tête et le Soleil est disposé du côté de S_1.

$\boxed{\textbf{11/2}}$ Soit $\overrightarrow{v}_c$ la vitesse de la comète, $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ celle des paticules émises par le soleil et $\overrightarrow{v}_r$ la vitesse des particules dans le référentiel lié à la comète. l composition des vitesses implique

$$\overrightarrow{v}_c = \overrightarrow{\mathrm{V}} - \overrightarrow{v}_r$$

On constate qu'on a la situation :



et donc que la comète se déplace dans le sens $\mathrm{C}_1 \rightarrow \mathrm{C}_2 \rightarrow \mathrm{C}_3$
De plus

$$\boxed{\tan\Phi = \frac{v_\mathrm{C}}{\mathrm{V}} \quad \text{d'où} \quad \Phi = \mathrm{Arctan}\,\frac{v_\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = 4,3^\circ}$$