Mécanique - Chapitre 5 : Solide en rotation autour d'un axe fixe

Ce qu'il faut retenir…

LE SOLIDE INDEFORMABLE

Un solide indéformable est un ensemble de points dont les distances mutuelles ne varient pas au cours du temps.

Moment d'inertie par rapport à un axe Δ : J_Δ

- Unité : kg.m^2
- Il traduit l'inertie du corps vis-à-vis d'un mouvement de rotation autour de l'axe
- Il est d'autant plus grand que la masse est éloignée de l'axe

Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Δ :

Si ω est la vitesse angulaire autour de l'axe Δ orienté : $\boxed{L_\Delta(M)_{/R} = J_\Delta \omega}$
Unité : kg.m^2.s^{-1} ou J.s,

MOMENT D'UNE FORCE

Par rapport à un point : Le moment d'une force $\vec{F}$ s'exerçant au point M, par rapport à un point O, est le vecteur : $\boxed{\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}}$

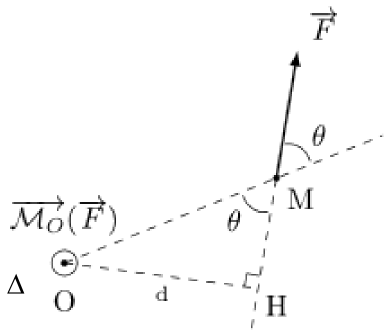
Par rapport à un axe : Le moment d'une force $\vec{F}$ s'exerçant au point M, par rapport à un axe Δ passant par O et de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$ est la projection de $\overrightarrow{M_O}(\vec{F})$ sur Δ : $\boxed{M_\Delta(\vec{F})_{/R} = \overrightarrow{M_O}(\vec{F}).\overrightarrow{u_\Delta}}$

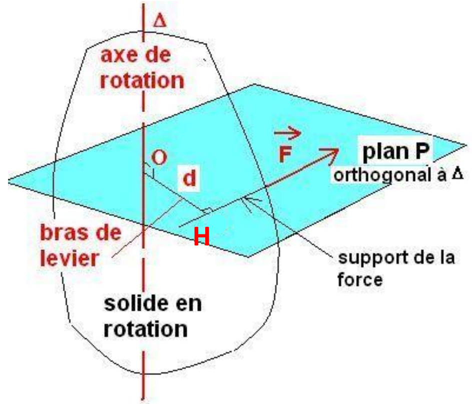
- Unité : N.m
- M_Δ traduit la capacité de la force à faire tourner le point M autour de l'axe Δ

- Pour une force dans un plan perpendiculaire à Δ :

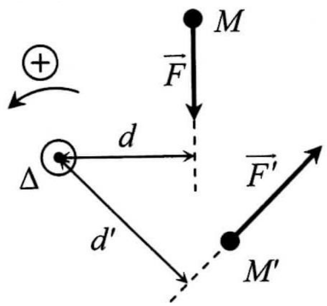
$\boxed{M_\Delta(\vec{F})_{/R} = \pm\|\vec{F}\|.d}$, d est le bras de levier, distance entre la droite d'action et l'axe Oz.

On oriente arbitrairement l'axe, le signe est positif si cette force tend à faire tourner M dans le sens positif, négatif sinon.





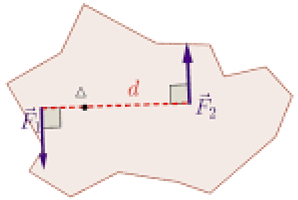
Exemple :



$$M_\Delta(\vec{F}) = -\|\vec{F}\|d < 0 \quad et \quad M_\Delta(\vec{F'}) = +\|\vec{F'}\|d' > 0$$

Equilibre : $\sum M_\Delta = 0$

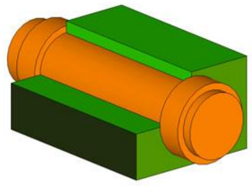
Un **couple** est un ensemble de forces de résultante nulle mais dont la somme de moments est non nulle. Le moment d'1 couple est souvent noté *C*. *C* = Fd



$F = F_1 = F_2$

LIAISON PIVOT

La liaison pivot correspond à tout mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un axe.



Le solide subit de la part du mécanisme une réaction $\overrightarrow{R_{axe}}$.

En l'absence de frottements, la liaison pivot est dite parfaite : $M_\Delta(\overrightarrow{R_{axe}})=0$.

Les frottements sont généralement modélisés par un couple résistant.

THEOREME DU MOMENT CINETIQUE SCALAIRE

La dérivée par rapport au temps dans R galiléen du moment cinétique par rapport à un axe fixe de R est la somme des moments par rapport à cet axe des forces extérieures qui s'exercent sur lui.

$$\left(\frac{dL_\Delta(M)_{/R}}{dt}\right) = \sum M_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}})$$

Dans les mouvements de rotation, il est préférable d'utiliser le théorème du moment cinétique.

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe : $J_\Delta\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = \sum M_\Delta(\vec{F})$

GRANDEURS ENERGETIQUES

Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Δ: $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$

Puissance des forces intérieures d'un solide : $P_{int} = 0$

Puissance d'un couple : P = *C* ω

<u>Théorème de la puissance cinétique</u> : La dérivée par rapport au temps dans R galiléen de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe de R est la somme des puissances des forces qui s'exercent sur lui.

$$\left(\frac{dE_c}{dt}\right)_R = \sum P(\overrightarrow{F_{ext}})$$

Ce théorème donne la même équation que le TMC scalaire !

ANALOGIES

Mouvement	Translation	Rotation autour d'un axe
Inertie	Masse	Moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation
Vitesse	Vecteur vitesse	Vitesse angulaire
Grandeur cinématique	Quantité de mouvement : $\vec{p} = m\vec{v}$	Moment cinétique : $L_\Delta(M)_{/R} = J_\Delta\omega$
Grandeur dynamique	Résultante des forces	Somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation
Relation à appliquer	**La dérivée de la grandeur cinématique = grandeur dynamique**	
	PFD	TMC scalaire
Energie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$