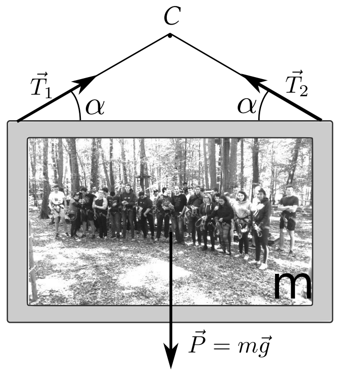
TD12 : Dynamique du point – corrigé

Exercice 1 : Accrocher un cadre

1. Les forces qui s'appliquent au cadre sont :
   - Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
   - La tension du fil aux deux points d'accroche $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$. On a $||\vec{T_1}|| = ||\vec{T_2}|| = T$.



2. Le cadre étant immobile, la somme des forces appliquées doit être nulle. En projetant sur l'axe vertical, on obtient :

$$mg = 2T\sin(\alpha) \Leftrightarrow T = \frac{mg}{2\sin(\alpha)}$$

3. Le fabriquant indique que le fil peut supporter une charge de 5 kg, ce qui signifie que la tension T maximale vaut $T = 5g$ (la tension exercée par une masse de 5 kg). On obtient donc

$$\alpha_{\text{min}} = \arcsin\left(\frac{mg}{2 \times 5g}\right) \simeq 11{,}5°$$

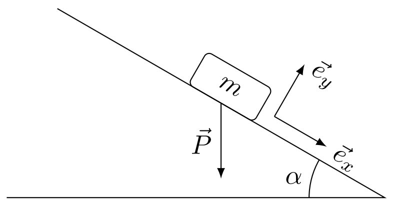
Exercice 2 : Glissement sur un plan incliné

1. Lorsqu'on néglige les frottements, la seule force qui s'applique au mobile est son poids $\vec{P}$

2. On considère un repère $(O\,, \vec{e}_x\,, \vec{e}_y)$ avec l'origine O au point de départ du mobile, l'axe x dirigé suivant la pente et l'axe y perpendiculaire à la pente. En projetant le PFD sur l'axe x on obtient :

$$ma_x = m\ddot{x} = P\sin\alpha \Leftrightarrow \ddot{x} = g\sin(\alpha)$$

En intégrant l'équation deux fois et en prenant en compte les conditions initiales on trouve $x(t) = \frac{1}{2}g\sin(\alpha)t^2$



On considère maintenant qu'il existe des frottements solides entre le mobile et le plan incliné caractérisés par un coefficient de frottement statique μ_s et un coefficient de frottement dynamique μ_d

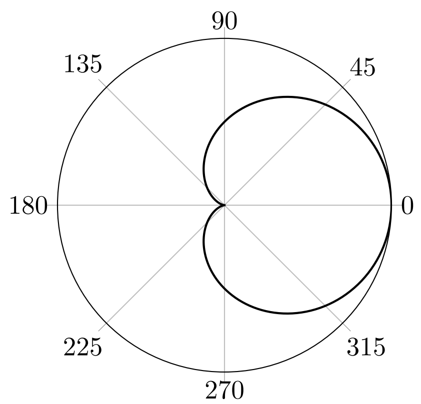
3. Pour que le mobile initialement immobile se mette en mouvement, il faut que $T > \mu_s N \Leftrightarrow \frac{T}{N} > \mu_s$. Comme le mobile est immobile (!) la somme des forces appliquées est nulle ce qui donne $T = mg\sin\alpha$ et $N = mg\cos\alpha$. Donc le mobile se met à glisser lorsque l'angle α est tel que $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha > \mu_s$ soit $\alpha_m = \arctan\mu_s$

4. Pour un angle $\alpha > \alpha_m$, on détermine l'équation du mouvement comme à la question 2), en prenant en compte la force $T = -\mu_d N = -\mu_d mg\cos\alpha$ suivant l'axe x. On trouve alors $x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)t^2$.

Exercice 3 : forces en coordonnées polaires

Un point matériel de masse m suit un mouvement dont l'équation horaire en coordonnées polaires est :

$$\begin{cases} r(t) = A\,(1 + \cos(\omega\,t)) \\ \theta(t) = \omega\,t \end{cases}$$



1. Voir graphique ci-contre.

2. On commence par calculer l'accélération du point matériel :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta = -A\omega^2(1 + 2\cos\omega t)\vec{e}_r - 2A\omega^2\sin\omega t\vec{e}_\theta$$

D'après le PFD, la résultante des force subie par le point matériel est

$$\vec{F} = m\vec{a} = -mA\omega^2(1 + 2\cos\omega t)\vec{e}_r - 2mA\omega^2\sin\omega t\vec{e}_\theta$$

Exercice 4 : Tir balistique

1. La seule force qui s'exerce sur l'obus une fois qu'il a quitté le canon est son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

2. On choisit un repère $(0\,, \vec{e}_x\,, \vec{e}_y)$ tel que O est sur la sortie du canon, $\vec{e}_x$ est horizontal vers la droite et $\vec{e}_y$ vertical vers le haut.
   On applique le principe fondamental de la dynamique et on trouve finalement :

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos\alpha t \\ y(t) = v_0\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

3. D'après la première équation on a $t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$ que l'on injecte dans la seconde équation pour obtenir :

$$y = \tan\alpha x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 = x\left(\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x\right)$$

4. L'obus touche le sol lorsque $y(x) = 0$ ce qui en dehors de la solution évidente $x = 0$ (à la sortie du canon) on trouve

$$\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$$

5. La distance maximale est atteinte lorsque $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et vaut $x_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{g}$

6. Le calcul donne une portée maximale d'environ 11 315 m.

7. La portée réelle du canon est inférieure à la portée théorique que nous venons de calculer à cause des frottements de l'air qui freinent l'obus lors de son parcours.

Exercice 5 : Freinage et distance d'arrêt

1. Le PFD projeté sur l'axe Ox donne $ma_x = -F_0$ En l'intégrant une fois, on trouve la vitesse de la voiture en fonction du temps : $v_x = v_1 - \frac{F_0}{m}t$. Le temps nécessaire à l'arrêt complet du véhicule est de T=7 s, donc $v_x(T) = 0 = v_1 - \frac{F_0}{m}T$ ce qui donne $F_0 = \frac{mv_1}{T} \simeq 5160\,\text{N}$

2. La force de freinage est la composante tangentielle T de la réaction de la route sur la voiture. La composante normale N compense le poids mg de la voiture. Comme il n'y a pas glissement entre les roues et la route on en conclut que $\frac{T}{N} \leq \mu_s$ et donc $\mu_s \geq \frac{F_0}{mg} \simeq 0{,}4$

3. On intègre la vitesse trouvée à la question 1) pour trouver la position en fonction du temps : $x(t) = v_1 t - \frac{F_0}{2m}t^2$ en considérant que à $x(t) = 0$. On trouve alors $x(T) \simeq 97$ m.

4. Le temps au bout duquel la voiture s'arrête est (en reprenant la question 1) : $T = \frac{mv_1}{F_0}$ et en reprenant la question précédente, on trouve que la distance d'arrêt est :

$$d = v_1 T - \frac{F_0}{2m}T^2 = \frac{mv_1^2}{F_0} - \frac{1}{2}\frac{mv_1^2}{F_0} = \frac{1}{2}\frac{mv_1^2}{F_0}$$

   d est proportionnelle à v_1^2 donc si la vitesse est multipliée par 2, la distance d'arrêt est multipliée par 4.

5. La vitesse V, exprimée en km/h, est reliée à v_1 en m/s par la formule : $V = \frac{v_1}{3.6}$. l'expression de d devient :

$$d = \frac{1}{2}\frac{mV^2}{3{,}6^2 F_0} = \frac{mV^2}{2 \times 3{,}6^2 \times F_0} \simeq \frac{V^2}{103} \simeq \left(\frac{V}{10}\right)^2$$

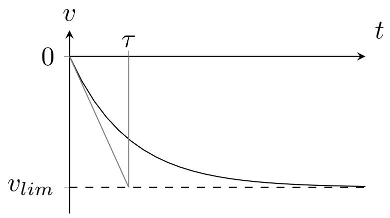
   C'est la formule que l'on enseigne dans les auto-écoles.

Exercice 6 : Chute d'une goutte d'eau

1. La goutte d'eau est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la la force $\vec{f} = -6\pi r\eta\vec{v}$. Le PFD donne donc $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f}$, projeté sur l'axe z orienté par le vecteur $\vec{e}_z$ dirigé vers le bas donne, il devient $m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg - 6\pi r\eta\frac{dz}{dt}$.

2. Lorsque la goutte atteint sa vitesse limite, la résultante des forces qu'elle subit est nulle et $f = mg$. Ce qui donnc $v_{lim} = \frac{mg}{6\pi r\eta}$. A.N : $v_{lim} \simeq 0{,}29\,\mathrm{m/s}$

3. L'équation différentielle devient : $\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{g}{v_{lim}}\frac{dz}{dt}$ soit $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g}{v_{lim}}\frac{dz}{dt} = -g$. On note $v = \frac{dz}{dt}$ et on résout l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{g}{v_{lim}}v = g$. Par la méthode classique (equation homogène, solution particulière, conditions initiales) on trouve :



$$v(t) = -v_{lim}\left(1 - \exp(-\frac{g}{v_{lim}}t)\right) = -v_{lim}\left(1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right)$$

   τ est le temps caractéristique au bout duquel la goutte atteint sa vitesse limite. Numériquement, on trouve $\tau = 0{,}03\,\mathrm{s}$

4. La vitesse limite est atteinte à 1% près lorsque $(1-\exp(-t/\tau)) = 0{,}99$ soit $\exp(-t/\tau) = 1/100$. Ce qui donne $t = \ln(100)\tau \simeq 0{,}14\,\mathrm{s}$.

   Pour trouver la distance parcourue, on intègre l'expression de la vitesse : $d = \int_0^{5\tau} v(t)dt = 5\tau v_{lim} + v_{lim}\tau\exp(-5) \simeq 35\,\mathrm{cm}$

Exercice 7 : Jeu de construction

Pour empiler les cubes, on en laisse un au sol, le suivant doit monter de a, le suivant de $2a$, etc... Au final, l'énergie totale à fournir est :

$$E = \sum_{i=0}^{9} mga \times i = mga\sum_{i=0}^{9} = mga\frac{9\times 10}{2} = 45mga$$

Exercice 8 : Circuit de voitures

1. $\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh$ donc $v_B = \sqrt{2gh}$. Comme il n'y a pas de frottements, $v_C = v_B$.
2. Encore une fois on néglige les frottements, donc la piste n'exerce pas de réaction tangentielle, la force est uniquement normale.
3. L'accélération au sommet de la piste est $a = \frac{v_S^2}{R}$ et elle est reliée à la somme des forces appliquées à la voiture. Donc $mg + R_N = m\frac{v_S^2}{R}$ d'où $R_N = m\frac{v_S^2}{R} - mg$
4. L'énergie mécanique de la voiture est conservée, donc $mg(h - 2R) = \frac{1}{2}mv_S^2$. La hauteur h_{min} est donnée par $\frac{v_S^2}{R} = g \Leftrightarrow 2g(h_{\text{min}} - 2R) = Rg \Leftrightarrow h_{\text{min}} = \frac{5}{2}R$

Exercice 9 : Luge sur un igloo

1. L'accélération normale de la luge est $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{R}$. Le PFD donne $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$ où $\vec{R}$ est la force exercée par l'igloo sur la luge. En projetant sur $\vec{e}_r$ on obtient :

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta + R \Leftrightarrow R = m\left(\frac{v^2}{R} - g\cos\theta\right) \quad (1)$$

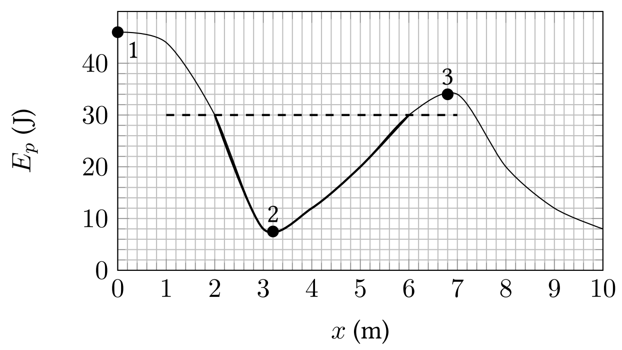
2. La conservation de l'énergie mécanique de la luge donne : $mgR = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$, ce qui donne $v^2 = 2gR(1-\cos\theta)$
3. La luge décolle de l'igloo lorsque $R = 0$, soit $v^2 = Rg\cos\theta = 2Rg(1-\cos\theta)$. Ce qui donne finalement :

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \theta \simeq 48{,}2°$$

4. Cette question ne pose pas de problème conceptuel, il faut calculer la trajectoire dans le champ de pesenteur terrestre en tenant compte des conditions initiales. Les calculs sont assez fastidieux. On trouve finalement une distance d entre le bord de l'igloo et le point d'impact d'impact de $d \simeq 0{,}12R$

Exercice 10 : Étude énergétique

Le graphique ci-contre représente l'énergie potentielle d'un point matériel M astreint à se déplacer suivant l'axe x.



1. Les positions 1 et 3 sont des positions d'équilibre instables, la position 2 est une position d'équilibre stable.
2. Les valeurs de x accessibles sont $x \in [2\,\mathrm{m}\,, 6\,\mathrm{m}]$
3. L'énergie mécanique de M est de 30 J.
4. Pour que la trajectoire de M ne soit pas bornée en $x > 0$, il faudrait que son énergie mécanique soit supérieure à 34 J. Donc son énegie cinétique doit être plus grande que 14 J.