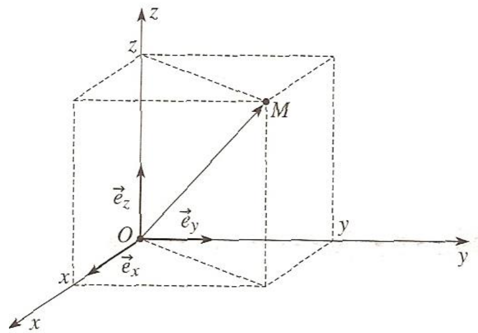
Systèmes de coordonnées

On note R le référentiel d'étude, lié le trièdre orthonormé direct (Oxyz), auquel est associé l'échelle de temps dont la date est t.

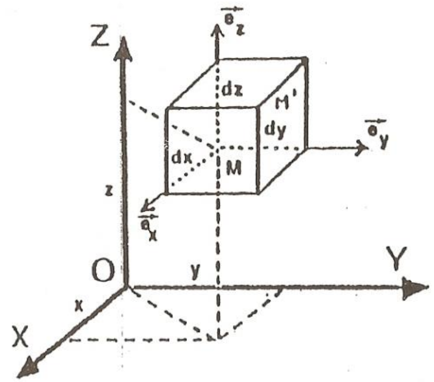


I. Coordonnées cartésiennes

Les vecteurs de base sont les vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ dirigeant les 3 axes du trièdre (Oxyz).
La base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est fixe dans R

Les coordonnées cartésiennes (x,y,z) d'un point M sont les valeurs algébriques mesurées par rapport au point O des projections orthogonales de M respectivement sur les axes (Ox), (Oy) et (Oz).

Ce sont donc des réels : $-\infty < x < +\infty$ $-\infty < y < +\infty$ $-\infty < z < +\infty$.



Le **vecteur position** à l'instant t est : $\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z}$

Soit un point M' tel que x' = x + dx, y' = y + dy et z' = z + dz.

Le **vecteur déplacement élémentaire** est : $\boxed{\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z}$

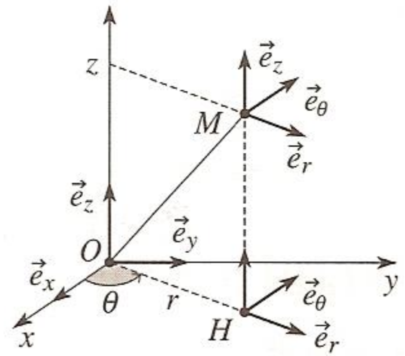
Le **vecteur vitesse** de M par rapport à R est : $\boxed{\overrightarrow{v_{M/R}} = \dot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{e_z}}$

Le **vecteur accélération** de M par rapport à R est : $\boxed{\overrightarrow{a_{M/R}} = \ddot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}}$

Les **surfaces élémentaires** sont (en indice les coordonnées qui varient sur la surface) : $dS_{y,z} = dy.dz$ $dS_{x,z} = dx.dz$ $dS_{x,y} = dx.dy$

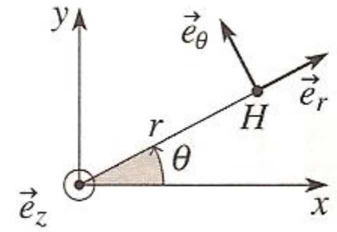
Le **volume élémentaire** est $\boxed{dV = dx.dy.dz}$

II. Coordonnées cylindriques



H est le projeté orthogonal de M dans le plan (Oxy). Les **coordonnées cylindriques** (r,θ,z) d'un point M sont telles que :

- $r = OH$; $0 \leq r < +\infty$
- θ = angle orienté entre l'axe Ox et $\overrightarrow{OH}$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$,
- $-\infty < z < +\infty$.



Les **vecteurs de base** sont les vecteurs unitaires $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$:

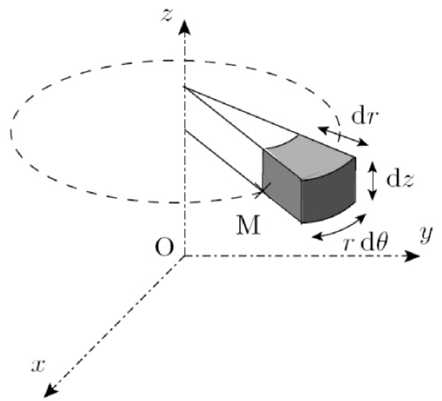
- $\overrightarrow{e_r}$ est le vecteur unitaire qui dirige $\overrightarrow{OH}$,
- $\overrightarrow{e_\theta}$ est le vecteur unitaire appartenant au plan (Oxy), perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$, dans le sens des θ croissants.
- $\overrightarrow{e_z}$ est le vecteur unitaire qui dirige l'axe Oz

Le **vecteur position** à l'instant t est : $\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r + z(t)\vec{e}_z$

La base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est mobile dans R, elle dépend de la position du point M à la date t.

Les dérivées dans R de ces vecteurs sont : $\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_R = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}}$ $\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right)_R = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r}}$ $\left(\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right)_R = \vec{0}$

Le vecteur **déplacement élémentaire** est : $\boxed{\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z}$



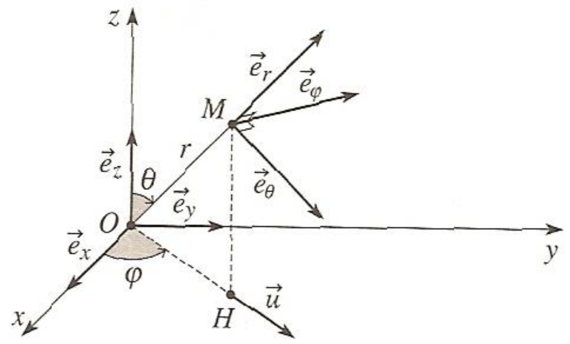
Le **vecteur vitesse** de M par rapport à R est : $\boxed{\overrightarrow{v_{M/R}} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{e_z}}$

Le **vecteur accélération** de M par rapport à R est : $\boxed{\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}}$

Les **surfaces élémentaires** sont : $dS_{\theta,z} = rd\theta.dz$ $dS_{r,z} = dr.dz$ $dS_{r,\theta} = dr.rd\theta$

Le **volume élémentaire** est $\boxed{dV = r.dr.d\theta.dz}$

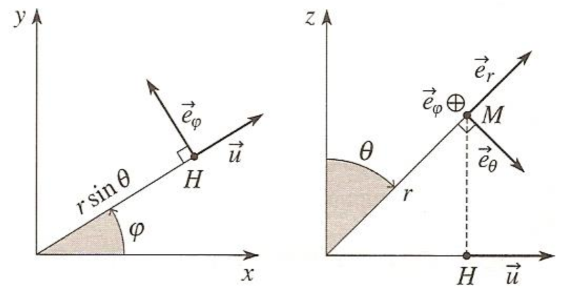
III. Coordonnées sphériques



H est le projeté orthogonal de M dans le plan (Oxy).

Les **coordonnées sphérique** (r,θ,φ) d'un point M sont telles que :

- $r = OM$; $0 < r < +\infty$
- θ = angle orienté entre l'axe Oz et $\overrightarrow{OM}$; $0 \leq \theta \leq \pi$,
- φ = angle orienté entre l'axe Ox et $\overrightarrow{OH}$ *(c'est le θ des coordonnées cylindriques)* : $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

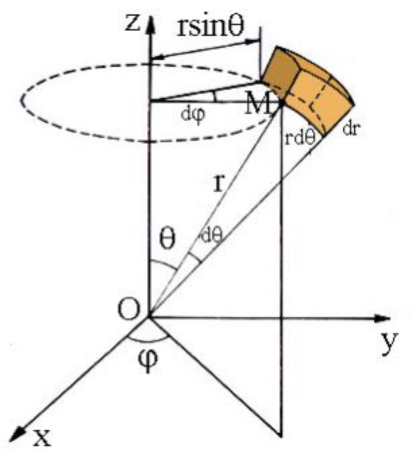


Les **vecteurs de base** sont les vecteurs unitaires $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$:

- $\overrightarrow{e_r}$ est le vecteur unitaire qui dirige $\overrightarrow{OM}$,
- $\overrightarrow{e_\theta}$ est le vecteur unitaire appartenant au plan formé par l'axe Oz et $\overrightarrow{OM}$, perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$, dans le sens des θ croissants.
- $\overrightarrow{e_\varphi}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$, dans le sens des φ croissants.

Le **vecteur position** à l'instant t est : $\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r$

Le vecteur **déplacement élémentaire** est : $\boxed{\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\,\vec{e}_\varphi}$



Les **surfaces élémentaires** sont :

- $dS_{\theta,,\varphi} = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$
- $dS_{r,z} = r\sin\theta drd\varphi$
- $dS_{r,\theta} = rdr\, d\theta$

Le **volume élémentaire** est $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$