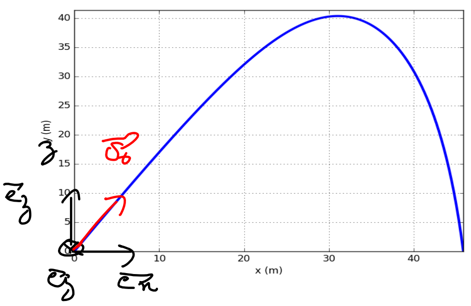
TD M2 - Dynamique. Corrigé

M1- Tir de projectile



$\downarrow \vec{g}$

$\vec{F} = -\lambda v \vec{v}$, $\lambda > 0$

$\Rightarrow \|\vec{F}\| = \lambda v^2$

1/ $[F] = [\lambda][v^2] \Leftrightarrow [\lambda] = \frac{[F]}{[v^2]}$

$[\lambda] = \frac{MLT^{-2}}{L^2T^{-2}} = ML^{-1}$

2/ Syst : M(m)

Ref : terrestre, galiléen

Inventaire des forces : base de travail $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{g})$

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

- frottement : $\vec{F} = -\lambda v \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

avec $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

- RFD appliquée à M(m) ds $\mathcal{R}$ galiléen :

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \lambda v \vec{v}}$$

3/ On cherche une solution cste $\vec{v} = \vec{v_\ell}$

$\frac{d\vec{v_\ell}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} = m\vec{g} - \lambda v_\ell \vec{v_\ell}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v_\ell} \parallel \vec{g}}$ de = sens

$\lambda v_\ell^2 = mg \Rightarrow \boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}}$

Soit $\boxed{\vec{v_\ell} = -\sqrt{\frac{mg}{\lambda}}\,\vec{e_z}}$

A.N : $v_\ell = 16 \text{ m.s}^{-1}$

4/

$$\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{L.T^{-2}} = \underbrace{\vec{g}}_{L.T^{-2}} - \underbrace{\underbrace{\frac{\lambda v}{m}}_{T^{-1}} \overbrace{\vec{v}}^{L.T^{-1}}}_{L.T^{-2}}$$

$$\left[\frac{m}{\lambda v}\right] = T$$

$\tau = \frac{m}{\lambda v}$ satisfaisant ? $\vec{v}$ inconnue et dépend de t

Choisissons $v = v_\ell \Rightarrow \tau = \frac{m}{\lambda v_\ell}$

soit $\tau = \frac{m}{\lambda} \times \sqrt{\frac{\lambda}{mg}}$

soit $\boxed{\tau = \sqrt{\frac{m}{\lambda g}}}$

Temps caractéristique du régime transitoire.

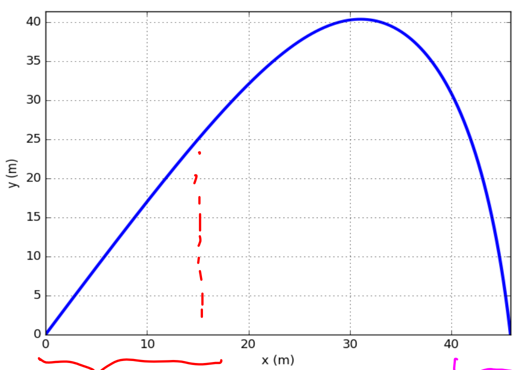
A.N. $\tau = 1,2\ s$.

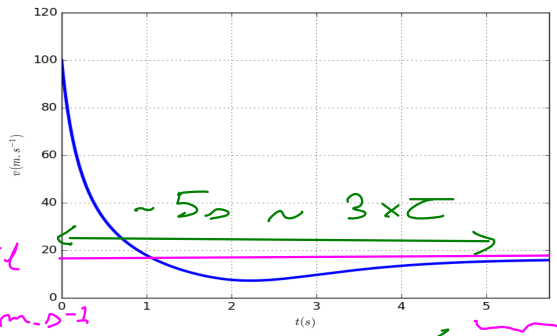
5. Projetons la RFD sur $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$:

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x} = -\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,\dot{x} \\ m\ddot{y} = -\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,\dot{y} \\ m\ddot{z} = -mg - \lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,\dot{z} \end{cases}}$$

Syst d'équat° diff non linéaires couplés

6/ Solution.





$v_\ell \approx 16\ m.s^{-1}$

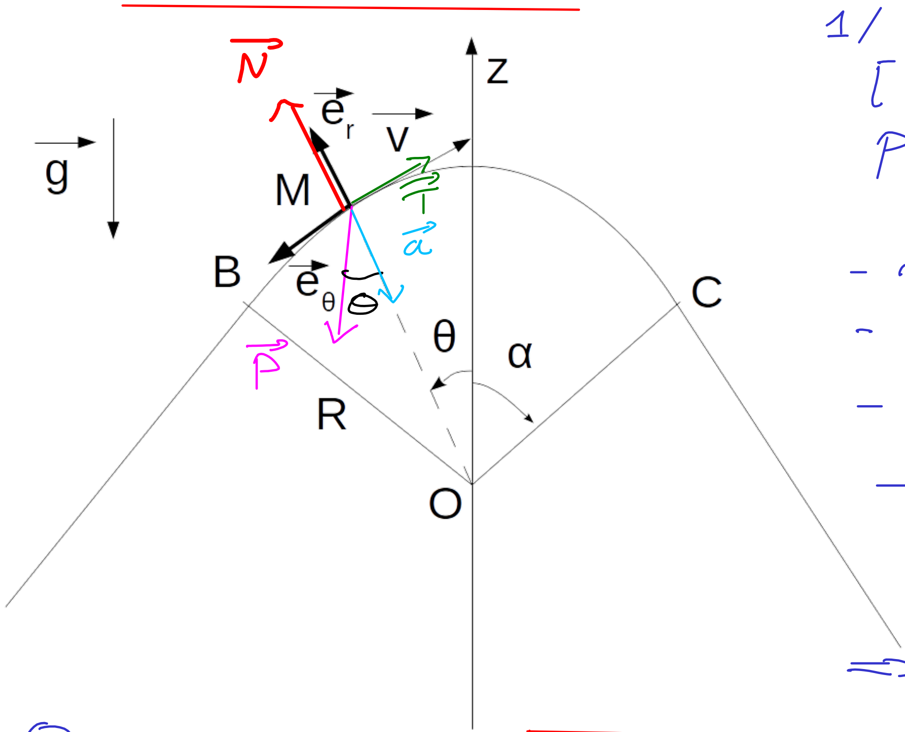
$\vec{v} \approx v(t)\frac{\vec{v_0}}{v_0}$ Mvt balistique.

$\vec{v} = \vec{v_\ell}$ régime permanent

régime transitoire

$v \approx v_\ell$ régime permanent.

M2- Sault d'une voiture



1/ Analyse dimensionnelle

$[v_c] = L.T^{-1}$.

Paramètres dont v_c dépend :

- m : $[m] = M$
- g : $[g] = L.T^{-2}$
- α : $[\alpha] = \emptyset$
- R : $[R] = L$

$[gR] = L^2 T^{-2}$

$\Rightarrow [\sqrt{gR}] = L.T^{-1}$

On propose $\boxed{v_c = \sqrt{gR}}$

+ cohérent car $v_c \nearrow$ qd $g \nearrow$:)

$R = 0 \Rightarrow v_c = 0$

$R \to +\infty$

$v_c \to +\infty$

2. Condition de décollage de la voiture :

$\|\vec{N}\| = 0$.

2.1/ $\vec{T} = T\vec{e_\theta}$ avec $T < 0$ car doit compenser la composante tangentielle du poids.

2.2/ Syst : M (m)

Réf : terrestre, galiléen

Inventaire des forces : base de travail $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$

- poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} -mg\cos\theta \\ +mg\sin\theta \end{pmatrix}$

- réact° normale : $\vec{N} = \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}$

- réact° tangentielle : $\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$

RFD appliqué à $M(m)$ dans $\mathcal{R}$ galiléen :

$m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$ avec $\vec{a}\begin{pmatrix} \cancel{\ddot{r}} - \underset{R}{r}\dot{\theta}^2 \\ \underset{R}{r}\ddot{\theta} + \cancel{2\dot{r}\dot{\theta}} \end{pmatrix}$

$r = R = cste.$

Projection sur $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$

$$\boxed{\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N \quad (1) \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta + T \quad (2) \end{cases}}$$

2.3. Mq $\vec{a}\cdot\vec{e_r} = -\dfrac{v^2}{R}$

$\vec{a}\cdot\vec{e_r} = -R\dot{\theta}^2$. Il faut $\dot{\theta} = f(v)$

$\vec{v} = \underset{0}{\cancel{\dot{r}}}\,\vec{e_r} + \underset{R}{r}\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$r = R$

D'où $v = \|\vec{v}\| = R|\dot{\theta}|$

$\Longrightarrow \dot{\theta}^2 = \dfrac{v^2}{R^2}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boxed{\vec{a}\cdot\vec{e_r} = -\dfrac{v^2}{R}.} \\ \dot{\theta} = cste \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

2.4. D'où les équations du mvt :

$$\begin{cases} -m\dfrac{v^2}{R} = -mg\cos\theta + N & (1) \\ 0 = mg\sin\theta + T & (2) \end{cases}$$

(2) : T compense la composante tangentielle du poids. $\Rightarrow v = cste$

Condition d'adhérence de la voiture :
$N > 0$.

or (1) : $N = mg\cos\theta - m\dfrac{v^2}{R}$

d'où :

$N > 0 \Longleftrightarrow \cancel{m}g\cos\theta - \cancel{m}\dfrac{v^2}{R} > 0$

$\Longleftrightarrow \boxed{v < \sqrt{gR\cos\theta}}$ condition d'adhérence en θ

Condition de décollage en θ :

$$\boxed{v > \sqrt{gR\cos\theta}}$$

3. Supposons que $v \geq \sqrt{gR\cos\theta}$.

alors comme $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ et $\alpha > \theta$

alors $\cos\alpha < \cos\theta$

$$\Longrightarrow \sqrt{gR\cos\theta} > \sqrt{gR\cos\alpha}.$$

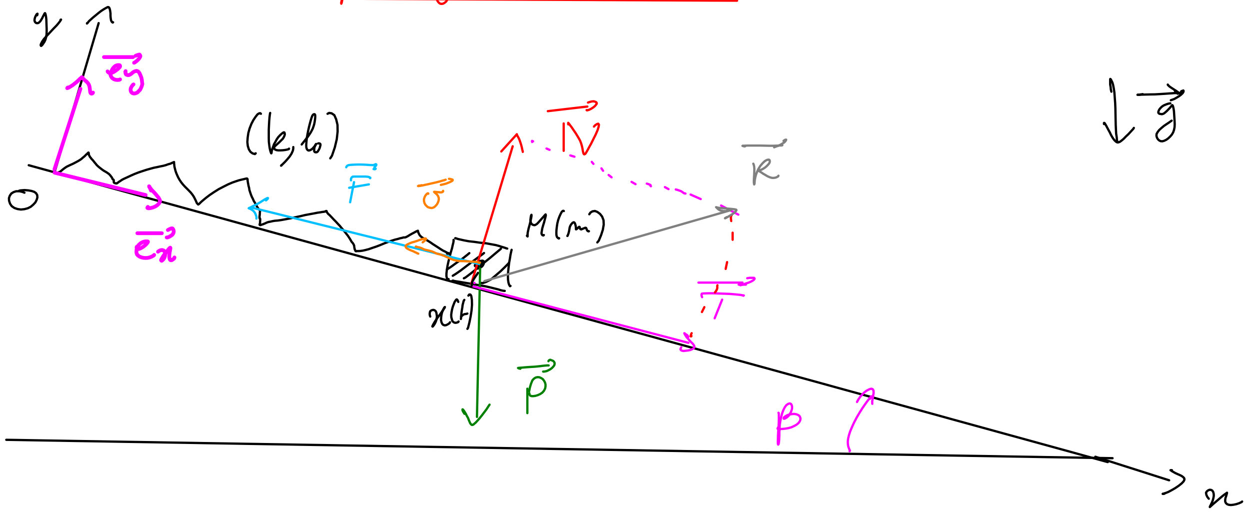
donc la voiture décolle en $\theta = \alpha$ (à B) avant !

Donc la condition de décollage est :

$$\boxed{v > v_c}$$

avec $\boxed{v_c = \sqrt{gR\cos\alpha}}$

M3- oscillateur amorti par frottement solide



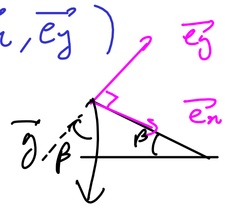
Loi de Coulomb :

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{T}\| < f\,\|\vec{N}\|, & \text{le palet ne glisse pas} \\ \vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{T} = -f\|\vec{N}\|\dfrac{\vec{v}}{v} & \text{le palet glisse.} \end{cases}$$

1/ Syst : palet de masse m

Ref : terrestre $\mathcal{R}$, supposé galiléen

Inventaire des forces : base de travail : $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$



- poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\begin{pmatrix} \sin\beta \\ -\cos\beta \end{pmatrix}$

- réaction normale : $\vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ inconnue du problème car force de contact solide/solide.

- réaction tangentielle : $\vec{T} = \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$ inconnue du problème car force de contact solide/solide.

- tension du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e_x}$ avec $l = x$

$\vec{e_x} // \vec{OM}$ de $\hat{m}$ sens.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -k(x - l_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2/ Equation différentielle du mouvement du centre de masse M.

Théorème de la résultante dynamique appliqué au palet dans $\mathcal{R}$ galiléen :

$$m\left.\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{T} \qquad \text{avec} \qquad \left.\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

car contact permanent avec le support.

En projection sur $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$.

$$\boxed{\begin{array}{llr} \cdot\ \vec{e_x} : & m\ddot{x} = mg\sin\beta - k(x-l_0) + T & (1) \\ \cdot\ \vec{e_y} : & 0 = -mg\cos\beta + N & (2) \end{array}}$$

Oscillateur harmonique amorti par frottements solides

3/ A l'équilibre $x = x_{eq}$ et :

$\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$ (*) et $\dot{x} = 0$ (donc $\ddot{x} = 0$)

or :

$(2) \Rightarrow \boxed{N = mg\cos\beta}$ La réaction normale du support compense la composante orthogonale du poids.

$(1) \Rightarrow \vec{T} = k(x_{eq} - l_0) - mg\sin\beta$

$\Rightarrow \|\vec{T}\| = |k(x_{eq} - l_0) - mg\sin\beta|$

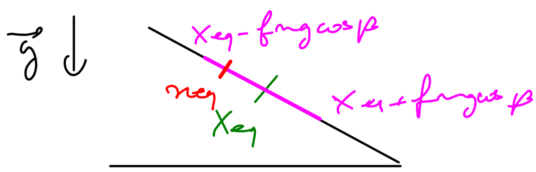
L'équation (*) devient :

$$|k(x_{eq} - l_0) - mg\sin\beta| < f\,mg\cos\beta$$

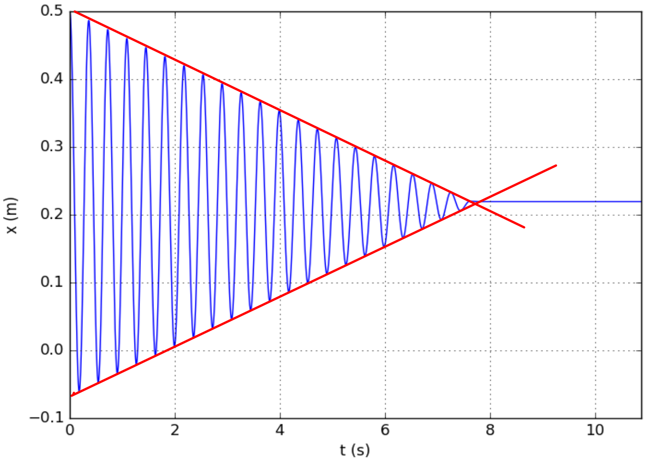
$$\Leftrightarrow -f\,mg\cos\beta < k(x_{eq} - l_0) - mg\sin\beta < f\,mg\cos\beta$$

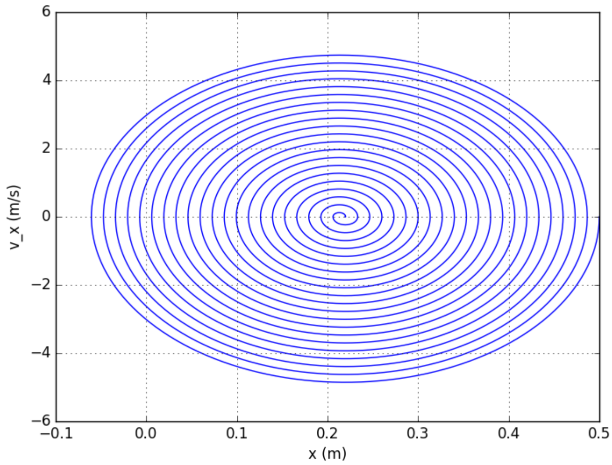
$$\Leftrightarrow \boxed{\underbrace{l_0 + \frac{mg\sin\beta}{k}}_{\substack{\text{position d'équilibre en l'absence de frottement solide} \\ = \text{longueur à vide + allongement dû au poids.} \\ X_{eq}}} - \underbrace{f\frac{mg}{k}\cos\beta}_{\text{effet des frottements solides.}} < x_{eq} < \underbrace{l_0 + \frac{mg}{k}\sin\beta}_{\substack{\text{position d'équilibre en l'absence de frottement solide} \\ = \text{longueur à vide + allongement dû au poids.} \\ X_{eq}}} + \underbrace{f\frac{mg}{k}\cos\beta}_{\text{effet des frottements solides.}}}$$

A l'équilibre : $x_{eq} = [X_{eq} - f\,mg\cos\beta, X_{eq} + f\,mg\cos\beta]$



4/





Amortissement par frottements solides	Amortissement par frottement fluide.
l'amplitude des oscillations décroît linéairement	l'amplitude des oscillations décroît exponentiellement.
La position d'équilibre est atteinte au bout d'un temps fini	La position d'équilibre est atteinte au bout d'un temps infini