

I Préliminaires

Q 1. $\{F_0, F_1, \dots, F_{15}\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610\}$

Q 2. Tout d'abord montrons par une récurrence à deux termes que $(F_n)_{n \geq 2}$ est suite d'entiers naturels non nuls :

◇ *initialisation* : $F_2 = 1 \in \mathbb{N}^*$; $F_3 = 2 \in \mathbb{N}^*$; la propriété est initialisée ;

◇ *hérédité* : supposons que $F_n \in \mathbb{N}^*$ et $F_{n+1} \in \mathbb{N}^*$; on sait que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, donc, par hypothèse de récurrence, on a $F_{n+2} \in \mathbb{N}^*$;

◇ *conclusion* : on a montré par récurrence que $\forall n \geq 2, F_n \in \mathbb{N}^*$

Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+2} - F_{n+1} = F_n > 0$, ce qui montre que la suite $(F_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante

Q 3. La suite $(F_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante donc, soit elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, soit elle diverge vers $+\infty$.

Supposons, par l'absurde que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = \ell \in \mathbb{R}$; alors, par passage à la limite dans l'égalité

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, il vient : $\ell = 2\ell \Leftrightarrow \ell = 0$; or $\forall n \geq 1, F_n > 0$; donc cette hypothèse est absurde.

On en conclut que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

Q 4. L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet comme discriminant $\Delta = 5$ et comme solutions : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$;

Or, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = x_1$ et $\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -x_2$; donc :

l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet bien comme solutions φ et $-\frac{1}{\varphi}$

Q 5. D'après ce qui précède, on a $\varphi^2 - 1 = \varphi$ et $\varphi \neq 0$; donc $\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1$; $\varphi + \frac{1}{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

et $\psi = \frac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}$; de plus, $\varphi^2 = \varphi + 1$; donc $\psi = \frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi + 1}$

Q 6. Montrons par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n})$

◇ *initialisation* : $F_0 = 0$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^0 - (-1)^0 \varphi^0) = 0$; $F_1 = 1$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - (-1)^1 \varphi^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi + \frac{1}{\varphi}) = 1$; la propriété est initialisée;

◇ *hérédité* : supposons la propriété vérifiée pour F_n et F_{n+1} ;

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

donc, par hypothèse de récurrence,

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - (-1)^{n+1} \varphi^{-n-1} + \varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} + \varphi^n - (-1)^n(\varphi^{-n} - \varphi^{-n-1}))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n(\varphi + 1) - (-1)^{n+2} \varphi^{-n-2}(\varphi^2 - \varphi))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n \times \varphi^2 - (-1)^{n+2} \varphi^{-n-2} \times 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - (-1)^{n+2} \varphi^{-n-2})$$

◇ *conclusion* : on a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n})$$

II Séries génératrices de Fibonacci

Q 7. $\varphi > 1$, donc φ^{-n} est négligeable devant φ^n et ainsi $F_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n$

Q 8. Tout d'abord, on pose $u_n = F_n x^n$; ainsi $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{F_{n+1}}{F_n} |x| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} |x| \underset{+\infty}{\longrightarrow} \varphi |x|$;

d'après le théorème de d'Alembert : si $\varphi |x| < 1$, alors la série converge absolument ;
si $\varphi |x| > 1$, alors la série diverge grossièrement ;

d'après le lemme d'Abel, on en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} F_n x^n$ est $\frac{1}{\varphi}$

Ensuite, on pose $v_n = \frac{F_n}{n!} x^n$; ainsi $\left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = \frac{F_{n+1}}{(n+1)F_n} |x| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\varphi^{n+1}}{(n+1)\varphi^n} |x| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\varphi}{n+1} |x| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$;

d'après le théorème de d'Alembert, la série converge pour tout x réel;

par définition, on en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{F_n}{n!} x^n$ est $+\infty$

Q 9. Soit $x \in]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}[$;

$$\begin{aligned} (1-x-x^2)A(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2} \\ &= \sum_{n=-2}^{+\infty} F_{n+2} x^{n+2} - \sum_{n=-1}^{+\infty} F_{n+1} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2} \\ &= F_0 x^0 + F_1 x^1 - F_0 x^1 + \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+2} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2} \\ &= x + \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(F_{n+2} - F_{n+1} - F_n)}_{=0} x^{n+2} \quad \text{d'après la définition récurrente de } (F_n) \end{aligned}$$

On a bien montré $\forall x \in]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}[$, que $(1-x-x^2)A(x) = x$

Q 10. $\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1+x/\varphi} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+x/\varphi-1+\varphi x}{(1-\varphi x)(1+x/\varphi)} = \frac{x}{\sqrt{5}} \frac{\varphi + \frac{1}{\varphi}}{1+x/\varphi-\varphi x-x^2} = \frac{x}{\sqrt{5}} \frac{\varphi + \frac{1}{\varphi}}{1-x\left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right)-x^2}$;

or, on a montré que $\varphi + \frac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$ et $\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1$; donc $\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1+x/\varphi} = \frac{x}{1-x-x^2}$

Q 11. On utilise le développement de référence : $\forall t \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ avec $R = +\infty$;

$t = \varphi x$ donne : $\forall x \in]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}[$, $\frac{1}{1-\varphi x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n x^n$, avec $R = \frac{1}{\varphi}$

$t = -\frac{x}{\varphi}$ donne : $\forall x \in]-\varphi, \varphi[$, $\frac{1}{1+x/\varphi} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varphi^{-n} x^n$, avec $R = \varphi$

Q 12. Tout d'abord, $\varphi > 1$, donc $\frac{1}{\varphi} < \varphi$; soit donc $x \in]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}[$.

D'après **Q 9**, $A(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ et, par définition $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$;

or d'après **Q 10**, $\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1+x/\varphi} = \frac{x}{1-x-x^2}$ et, d'après **Q 11**,

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1+x/\varphi} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varphi^{-n} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}) x^n$$

Par unicité du développement en série entière, on retrouve donc : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n})$

Q 13. $\forall x \in \mathbb{R}, B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! \sqrt{5}} (\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}) x^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (\varphi x)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-x/\varphi)^n \right)$; donc

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} (e^{\varphi x} - e^{-x/\varphi}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Q 14. $B(x)e^x = \frac{1}{\sqrt{5}} (e^{(\varphi+1)x} - e^{(1-\frac{1}{\varphi})x})$; or $\varphi + 1 = \varphi^2$ et $1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}$; donc

$$B(x)e^x = \frac{1}{\sqrt{5}} (e^{\varphi^2 x} - e^{\varphi^{-2} x}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \varphi^{2n} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \varphi^{-2n} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^{2n} - \varphi^{-2n}) x^n; \text{ on a bien}$$

$$B(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_{2n}}{n!} x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Q 15. Tout d'abord dérivons le membre de gauche avec la formule de Leibniz :

$$(B(x)e^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (B(x))^{(k)} (e^x)^{(n-k)}; \text{ donc } (B(x)e^x)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (B(x))^{(k)}(0) (e^x)^{(n-k)}(0)$$

or, comme le développement en série entière coïncide en tout point avec le développement de Taylor, on

$$\text{a : } (B(x))^{(k)}(0) = F_k; \text{ de plus } (e^x)^{(n-k)}(0) = 1; \text{ on obtient donc : } (B(x)e^x)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k.$$

Maintenant, d'après la formule de Taylor, dans le membre de droite la dérivée n -ième en zéro est donné par F_{2n} ; on obtient bien

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

III Représentation intégrale de la suite de Fibonacci

Q 16. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto f(x) \sin(2kx)$ est π -périodique, donc, en intégrant sur une période :

$$\int_0^\pi f(x) \sin(2kx) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \sin(2kx) dx \text{ et donc } b_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \sin(2kx) dx$$

or la fonction $x \mapsto f(x) \sin(2kx)$ est impaire, on en déduit donc que $b_k = 0$

Q 17. Comme précédemment, $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx$

Q 18. On pose $t = \tan(x)$; ce changement est bijectif et de classe \mathcal{C}^1 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $dt = \frac{dx}{\cos^2(x)}$; on obtient donc :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{1+4\sin^2(x)} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)} + 4 \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+4t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+5t^2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Arctan}(t\sqrt{5}) \right]_{-\infty}^{+\infty}; \text{ or } \lim_{t \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctan}(t\sqrt{5}) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(t\sqrt{5}) = \frac{\pi}{2}; \text{ on obtient} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Q 19. La fonction f est π -périodique, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux; de plus $f(0) = f(\pi)$, donc f est continue sur \mathbb{R} ; d'après le théorème de Dirichlet, on peut dire que la série de Fourier de f converge en tout point vers f ; soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{+\infty} \psi^k \cos(2kx)$$

Q 20. Les hypothèses étant vérifiées, l'égalité de Parseval donne $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x))^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2$; soit

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{1+4\sin^2(x)} \right)^2 dx = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} \sum_{k=1}^{+\infty} \psi^{2k}$$

Ensuite, $\sum_{k=1}^{+\infty} \psi^{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (\psi^2)^k = \frac{1}{1-\psi^2} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{(-1+\sqrt{5})^2}{(1+\sqrt{5})^2}} - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} - 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$; on obtient alors :

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{1+4\sin^2(x)} \right)^2 dx = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} \times \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\pi\sqrt{5} + 3\pi - \pi\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}; \text{ soit}$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{1+4\sin^2(x)} \right)^2 dx = \frac{3\pi}{5\sqrt{5}}$$

IV Temps d'attente de (Pile,Pile) dans un jeu de pile ou face infini

Q 21. $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1))$, or les événements sont indépendants donc :

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{4}$$

$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1))$; donc, par indépendance mutuelle, il vient : $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{8}$

$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap (X_3 = 1) \cap (X_4 = 1)) \cup ((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0) \cap (X_3 = 1) \cap (X_4 = 1)))$
 $= \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap (X_3 = 1) \cap (X_4 = 1)) + \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0) \cap (X_3 = 1) \cap (X_4 = 1))$; soit

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap (X_4 = 1) \cap (X_5 = 1))$
 $+ \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap (X_4 = 1) \cap (X_5 = 1))$

$+ \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0) \cap (X_4 = 1) \cap (X_5 = 1))$; soit $\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{3}{32}$

Q 22. D'après la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(Y = n+2) = \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \text{ et } X_{n+2} = X_{n+3} = 1 | C_n)$

or $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \text{ et } X_{n+2} = X_{n+3} = 1 | C_n) = \mathbb{P}((X_{n+1} = 0) \cap (X_{n+2} = 1) \cap (X_{n+3} = 1)) = \frac{1}{8}$; donc

$$\mathbb{P}(Y = n+2) = \frac{1}{8} \mathbb{P}(C_n)$$

Q 23. L'événement $(X_1 = 1) \cap C_n$ signifie que le premier lancer amène Pile et qu'il n'y a pas deux Pile consécutifs dans la séquence (X_1, X_2, \dots, X_n) ; il est donc nécessaire que le deuxième lancer amène Face et ainsi

$$(X_1 = 1) \cap C_n = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 0) \cap C_n$$

Q 24. D'après la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(C_n \cap (X_1 = 0)) + \mathbb{P}(C_n \cap (X_1 = 1))$; et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_n) &= \mathbb{P}(C_n \cap (X_1 = 0)) + \mathbb{P}(C_n \cap (X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0) \times \mathbb{P}(C_n | (X_1 = 0)) + \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) \times \mathbb{P}(C_n | (X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \mathbb{P}(C_{n-1}) + \frac{1}{4} \mathbb{P}(C_{n-2})$$

Q 25. D'après **Q 22.** $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y = n + 2) = \frac{1}{8}\mathbb{P}(C_n)$;

donc $\mathbb{P}(C_n) = 8\mathbb{P}(Y = n + 2)$; $\mathbb{P}(C_{n-1}) = 8\mathbb{P}(Y = n + 1)$ et $\mathbb{P}(C_{n-2}) = 8\mathbb{P}(Y = n)$

d'après la question précédente, on déduit la relation : $\mathbb{P}(Y = n + 2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y = n + 1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(Y = n)$

Q 26. Montrons par une récurrence à deux termes que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{2^{n+1}}F_n$

◇ *initialisation* : $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2^2}F_1 = \frac{1}{4}$; $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{8}$ et $\frac{1}{2^3}F_2 = \frac{1}{8}$; la propriété est initialisée;

◇ *hérédité* : supposons la propriété vérifiée pour $\mathbb{P}(Y = n)$ et $\mathbb{P}(Y = n + 1)$;

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = n + 2) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y = n + 1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(Y = n) && \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+2}}F_{n+1} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^{n+1}}F_n && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{2^{n+3}}(F_{n+1} + F_n) = \frac{1}{2^{n+3}}F_{n+2} && \text{par définition de } F_n \end{aligned}$$

◇ *conclusion* : on a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{2^{n+1}}F_n$$

Q 27.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 0) &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}F_n \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} F_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} \left(A\left(\frac{1}{2}\right) - F_0\right) && \text{avec } F_0 = 0 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \boxed{0} && \text{d'après la Q9. } A(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \end{aligned}$$

Q 28. $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ signifie que :

on obtiendra presque sûrement au moins une fois (Pile,Pile) dans un jeu de pile ou face infini

Q 29. Par définition, $E(Y) = \sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n \geq 0} \frac{nF_n}{2^{n+1}}$; étudions la convergence de cette série :

$$\text{posons } u_n = \frac{nF_n}{2^{n+1}}; \text{ alors } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{F_{n+1}}{F_n} \times \frac{1}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n} \times \varphi \times \frac{1}{2} \underset{+\infty}{\rightarrow} \frac{\varphi}{2}$$

or $\frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} < 1$; donc, d'après le théorème de d'Alembert, la série converge et donc

Y est d'espérance finie

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} nF_n \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} nF_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} A'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$A(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}; \text{ donc } A'(x) = \frac{(1 - x - x^2) - x(-1 - 2x)}{(1 - x - x^2)^2} = \frac{1 + x^2}{(1 - x - x^2)^2},$$

$$\text{on a donc } A'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 + \frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2} = 20 \text{ et finalement } \boxed{E(Y) = 5}$$

V Décomposition d'un entier

Q 30. $100 = 3 + 8 + 89 = F_4 + F_6 + F_{11}$ est une F-décomposition convenable

$100 = 1 + 2 + 8 + 89 = F_1$ (ou F_2) + $F_3 + F_6 + F_{11}$ n'est pas une décomposition acceptable, car F_1 ne peut convenir (dans l'écriture F_k , k doit être supérieur ou égal à 2) et F_2 ne convient pas non plus (la condition $k_{i+1} - k_i > 1$ ne serait pas vérifiée).

$100 = 3 + 8 + 34 + 55 = F_4 + F_6 + F_9 + F_{10}$ n'est pas une décomposition acceptable car la condition $k_{i+1} - k_i > 1$ n'est pas vérifiée.

Q 31. $32 = 3 + 8 + 21 = F_4 + F_6 + F_8$; $272 = 5 + 34 + 233 = F_5 + F_9 + F_{13}$

Q 32. Soit $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_r}$; démontrons par récurrence sur r que $F_{k_r} \leq n < F_{k_{r+1}}$:

- ◇ *initialisation* : si $n = F_{k_1}$, on a bien $F_{k_1} \leq n < F_{k_1+1}$ car la suite (F_k) est strictement croissante (**Q2.**); la propriété est initialisée;
- ◇ *hérédité* : supposons la propriété vraie au rang r et écrivons $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_r} + F_{k_{r+1}}$; les nombres (F_k) étant des entiers naturels non nuls, il vient aisément $F_{k_{r+1}} \leq n$; en notant $m = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_r}$, par hypothèse de récurrence, on a $F_{k_r} \leq m < F_{k_r+1}$; en particulier : $m < F_{k_r+1}$; et donc : $n < F_{k_r+1} + F_{k_{r+1}}$; or $F_{k_r+1} \leq F_{k_{r+1}-1}$ car F_{k_r} et $F_{k_{r+1}}$ ne sont pas consécutifs; on obtient : $n < F_{k_{r+1}-1} + F_{k_{r+1}} = F_{k_{r+1}+1}$ et la propriété est héréditaire;
- ◇ *conclusion* : on a montré par récurrence que $F_{k_r} \leq n < F_{k_{r+1}}$

Q 33. Supposons à nouveau l'existence d'une F-décomposition pour n ; on note F_{k_r} le terme le plus grand de cette décomposition.

Démontrons par récurrence sur r que cette décomposition est unique;

- ◇ *initialisation* : $1 = F_2 = F_{r_1}$ donc la propriété est initialisée;
- ◇ *hérédité* : on suppose la propriété vraie au rang r ; considérons donc un entier admettant une F-décomposition comportant $r+1$ termes; notons $F_{k_{r+1}}$ et $F_{i_{r+1}}$ deux $(r+1)$ ième termes éventuellement différents; d'après la question précédente, on a $F_{k_{r+1}} \leq n < F_{k_{r+1}+1}$ et $F_{i_{r+1}} \leq n < F_{i_{r+1}+1}$, ce qui implique nécessairement que $F_{k_{r+1}} = F_{i_{r+1}}$; ensuite $n - F_{k_{r+1}}$ admet une F-décomposition comportant r termes, et, par hypothèse de récurrence, celle-ci est unique;
- ◇ *conclusion* : on a montré par récurrence que

si n admet une F-décomposition, alors celle-ci est unique

Q 34. Tout d'abord, nous avons montré en **Q3.** que la suite (F_n) diverge vers $+\infty$ et donc n'est pas majorée; en particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \geq 2, n \leq F_k$.

Démontrons par récurrence sur $k \geq 2$, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $n \leq F_k$, alors n admet une F-décomposition :

- ◇ *initialisation* : $1 = F_2$ donc la propriété est initialisée;
- ◇ *hérédité* : on suppose la propriété vraie au rang k ; considérons donc $F_k < n < F_{k+1}$; on a donc : $0 < n - F_k < F_{k+1} - F_k$; or $F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$ et comme la suite (F_k) est croissante, on a $F_{k-1} < F_k$; on en déduit que $0 < n - F_k < F_k$; par hypothèse de récurrence, $n - F_k$ admet une F-décomposition; et donc n admet une F-décomposition;
- ◇ *conclusion* : on a montré par récurrence que

tout entier naturel non nul admet une F-décomposition

Q 35.

```
def fibonacci(k):
    L=[0,1]
    for i in range(2,k+1):
        L.append(L[i-2]+L[i-1])
    return L
```

Q 36.

```
def recherche(n):
    p=0
    while fibonacci(p)[-1]<=n:
        p+=1
    return p-1
```

Q 37.

```
def Fdecomposition(n):
    L=[]
    while n>0:
        p=recherche(n)
        f=fibonacci(p)[-1]
        L.append(f)
        n=n-f
    L.reverse()
    return L
```

Q 38. Liste des termes de Fibonacci inférieurs à 100 en commençant à F_2 : [1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89];donc la liste [0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1] code le nombre $3 + 8 + 89 = 100$

Q 39.

```
def codage(n):
    p=recherche(n)
    L1=fibonacci(p)[2:]           #liste des termes de Fibonacci en commençant à F2
    L2=[0]*len(L1)               #initialisation de la liste renvoyée
    F=Fdecomposition(n)
    for i in range(len(L1)):
        if L1[i] in F:
            L2[i]=1
    L2.append(1)                 #normalisation de la liste
    return L2
```

Q 40.

```
def decodage(L):
    n=0                           #initialisation de l'entier renvoyé
    L2=fibonacci(len(L))          #liste des termes de Fibonacci
    L2=L2[2:]                     #on retire F0 et F1
    for i in range(len(L)-1):     #on évite le dernier terme de L
        n+=L[i]*L2[i]
    return n
```