Le logiciel de calcul formel utilisé est ici Maple

Cette partie de calcul a été testée mais ne figure pas dans ce corrigé car il ne peut figurer dans une copie de concours !

*Ceci dit, je ne vois pas comment au **II.C.2.c)**, par exemple, les candidats ont pu tester un algorithme en Maple !*

I Fonctions homographiques

I.A -

I.A.1) On a $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ sur $]-R, R[$

a) Une série entière est dérivable terme à terme sur son ouvert de convergence. La série dérivée conserve le même rayon, on reste donc sur $]-R, R[$. On regroupe ensuite les termes qui se regroupent naturellement et on réindexe les autres, ce qui donne le calcul suivant :

$y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}$

$$(x-a)\,y''(x) + 2y'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a\, a_n\, x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a\, a_n\, x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\, a_n\, x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a\, a_n\, x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\, a_n\, x^{n-1} - \sum_{n'=1}^{\infty} (n'+1)\, n'\, a\, a_{n'+1}\, x^{n'-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\, a_n\, x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, n\, a\, a_{n+1}\, x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\, (a_n - a\, a_{n+1})\, x^{n-1}$$

b) Si y est solution de (E_a), alors, par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n - a\, a_{n+1} = 0$

On a bien ici $a \neq 0$, et par une récurrence très facile : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \dfrac{a_1}{a^{n-1}}$

Remarquons que, si $a_1 \neq 0$, alors le rayon de convergence est $|a| = a$. Il est infini si $a_1 = 0$.

Pour trouver les solutions sous forme de fonction usuelle, le plus simple est d'intégrer directement l'équation différentielle sur un intervalle ne contenant pas a.

On peut choisir ici $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$.

On a une équation différentielle linéaire du premier ordre en y' dont les solutions sont :

$y'(x) = K\, \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{x-a}\,\mathrm{d}x} = \dfrac{K}{(x-a)^2}$

On primitive ensuite pour trouver : $y(x) = L - \dfrac{K}{x-a} = L + \dfrac{K}{a-x}$

L'autre possibilité est de reprendre le calcul précédent avec les valeurs de a_n trouvées, on est ici sur $]-a, a[$:

$y(x) = a_0 + a_1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{a^{n-1}} = a_0 + a_1 a \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{a^n} = a_0 + a_1 a \dfrac{x/a}{1-x/a} = a_0 + a_1 a \dfrac{x}{a-x}$

Finalement, on retrouve bien : $y(x) = (a_0 - a_1 a) + a_1 a^2 \dfrac{1}{a-x} = L + \dfrac{K}{a-x}$

c) Les fonctions développables en série entière et solution de (E_a) sont donc $x \mapsto L + \dfrac{K}{a-x}$

En effet, $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \dfrac{1}{a-x}$ forment clairement une famille libre, elles engendrent donc un espace vectoriel de dimension 2 dont elles forment une base !

I.A.2) On a déjà fait ce travail sur $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$. les solutions sont à chaque fois de la forme : $y(x) = L + \dfrac{K}{a-x}$ sur $]-\infty, a[$, et, $y(x) = L' + \dfrac{K'}{a-x}$ sur $]a, +\infty[$.

Pour avoir une solution sur $\mathbb{R}$, il est nécessaire d'avoir une limite finie en a, ce qui entraîne $K = K' = 0$, mais la limite à gauche et à droite doivent alors être les mêmes, ce qui donne $L = L'$.

Comme les fonctions constantes sont clairement solution de (E_a) sur $\mathbb{R}$, ce sont les seules.

I.B -

I.B.1) Pour avoir une simplification, il nous faut d'abord $\alpha \neq 0$ ou $\alpha = \beta = 0$, cette dernière condition étant bien sûr suffisante.

De plus, quand $\alpha \neq 0$, $g(x) = \dfrac{\alpha(x + \beta/\alpha)}{\gamma(x + \delta/\gamma)}$

La fonction est donc constante si et seulement si $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\delta}{\gamma}$.

Comme $\gamma \neq 0$ et $\alpha \neq 0$, ceci équivaut à $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$.

Finalement, g est constante si et seulement si $\alpha = \beta = 0$ ou $\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 0 \end{cases}$

I.B.2)

a) La fonction g n'est pas la fonction nulle et n'est pas constante, donc $\alpha \neq 0$.

$$g(x) = \frac{\alpha}{\gamma} \times \frac{x + \beta/\alpha}{x + \delta/\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} \times \frac{(x + \delta/\gamma) + (\beta/\alpha - \delta/\gamma)}{x + \delta/\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}}{x + \dfrac{\delta}{\gamma}}$$

On a donc $\quad u = \dfrac{\alpha}{\gamma}, \quad v = \dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}, \quad w = \dfrac{\delta}{\gamma}$.

b) On a facilement $g'(x) = \dfrac{-v}{(x+w)^2}$, qui est donc du signe de $-v$, c'est à dire du signe de $\alpha\delta - \beta\gamma$.

g est croissante sur chaque intervalle de définition si et seulement si $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, décroissante sinon, car cette quantité n'est jamais nulle, puisque g n'est pas constante.

I.B.3)

a) Une homothétie de rapport $\sqrt{v}$ transforme C en D.

b) Γ est d'équation $(y-u)(x+w) = v$. C'est une translation de vecteur $(-w, u)$ qui transforme D en Γ.

c) $t \circ h$ est une homothétie ou une translation. Dans le cas ou c'est une homothétie, son rapport est $\sqrt{v}$.

C'est donc une homothétie différente de l'identité si et seulement si $v \neq 1$. Son rapport est alors $\sqrt{v}$.

L'image de $M(x, y)$ par $t \circ h$ est $M'\left(x\sqrt{v} - w, y\sqrt{v} + u\right)$.

Le centre de l'homothétie est les point fixe, dont les coordonnées vérifient le système : $\begin{cases} x = x\sqrt{v} - w \\ y = y\sqrt{v} + u \end{cases}$, c'est donc le point $M_0\left(\dfrac{w}{\sqrt{v}-1}, \dfrac{-u}{\sqrt{v}-1}\right)$.

I.B.4) On a bien sûr $g'(x) = \dfrac{-v}{(x+w)^2}$ et $g''(x) = \dfrac{2v}{(x+w)^3}$,

ce qui donne $(x-a)g''(x) + 2g(x) = v\dfrac{2(x-a) - 2(x+w)}{(x+w)^3} = -2v\dfrac{a+w}{(x+w)^3}$, qui est la fonction nulle si et seulement si $a = -w$.

II Fractions continues

II.A -

II.A.1) f n'est pas définie quand le dénominateur s'annule, c'est à dire quand $x = E(x)$, c'est à dire aussi quand $x \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble de définition de f est donc bien $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

On a facilement $\quad E(x+1) = E(x) + 1 \quad$ pour tout x réel, f est donc périodique de période 1.

II.A.2) Pour $x \in]k, k+1[$, $E(x) = k$, et donc $f(x) = \dfrac{1}{x-k}$.

Par ailleurs, $g(x) = u + \dfrac{v}{x+w}$ vaut $f(x)$ sur $]k, k+1[$, si et seulement si $u = 0$, $v = 1$ et $w = -k$.

Ce qui équivaut à $\alpha = 0$, $\beta = \gamma$, compte tenu de $\alpha = 0$, et enfin $\dfrac{\delta}{\gamma} = -k$.

f et g coïncident sur sur $]k, k+1[$ si et seulement si $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \gamma \\ k\gamma + \delta = 0 \end{cases}$

II.A.3) On étudie f sur $]0,1[$, par périodicité. Sur cet intervalle, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

La fonction est donc décroissante.

Les limites à droite en 0 et à gauche en 1 sont respectivement $+\infty$ et 1.

Par continuité et monotonie, $f(]0,1[) = f\left(D_f\right) =]1, +\infty[$.

Le tableau de variation est :

x	0		1
$f'(x)$		$-$	-1
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

Le graphe de ces parties de branche d'hyperbole, reproduites par translation, est laissé au lecteur.

II.A.4) $E(x)$ est un entier, donc un rationnel.

On a donc « x irrationnel » si et seulement si « $x - E(x)$ irrationnel ».

Comme de plus, pour u non nul, « u est irrationnel » si et seulement si « $\dfrac{1}{u}$ est irrationnel », on a donc enfin « x est irrationnel » si et seulement si « $f(x)$ est irrationnel ».

II.B -

II.B.1) Pour tout x irrationnel, $f(x)$ est bien défini et irrationnel.

Par récurrence immédiate, compte tenu que x_0 est irrationnel, la suite (x_n) est bien définie, ne contenant que des nombres irrationnels.

II.B.2) On a ici x_0 rationnel, $x_0 = \dfrac{u_0}{v_0}$, quotient d'entiers naturels.

a) Pour $n \geqslant 1$, $x_n \in f\left(D_f\right) =]1, +\infty[$, donc $x_n > 1$.

D'autre part, $x_n \in \mathbb{Q}$, compte tenu des équivalences du **II.A.4**.

b) La division euclidienne de u_n par v_n donne : $\quad u_n = q_n v_n + r_n = q_n v_n + v_{n+1}$.

On a donc : $\quad \dfrac{u_n}{v_n} = q_n + \dfrac{v_{n+1}}{v_n}, \quad$ avec $\quad \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \in [0, 1[$.

Ceci prouve que $\quad q_n = E\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) \quad$ et $\quad v_{n+1} = u_n - v_n E\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

On montre l'hérédité proprement dite, la vérification initiale est donnée par l'énoncé. Pour cela, calculons :

$$f\left(x_n\right)=f\left(\frac{u_n}{v_n}\right)=\frac{1}{\dfrac{u_n}{v_n}-E\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)}=\frac{v_n}{u_n-v_nE\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)}=\frac{v_n}{v_{n+1}}=\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}=x_{n+1}.$$

Le résultat est donc démontré pour tout $n\in\mathbb{N}$

c) On a $v_{n+1}\in\{0,1,\dots,v_n-1\}$, puisque c'est le reste d'une division euclidienne par v_n.
La suite d'entiers naturels (v_n) est donc positive et strictement décroissante, ce qui est impossible.
La suite (x_n) n'est donc pas bien définie quand $x_0\in\mathbb{Q}$.

II.B.3) La suite (x_n) est donc bien définie si et seulement si $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

II.C -

II.C.1) Il s'agit d'une simple boucle contrôlé par `i`, on appelle `x` et `a` les variables qui prennent les valeurs de x_i et a_i.
Cette procédure ne convient pas pour $n=0$.

```
an:=proc(x0,n)
local a,x,i;
a:=floor(x0);x:=x0;
for i from 1 to n do
  x:=1/(x-a);a:=floor(x)
od;
a
end;
```

II.C.2) Ici, $x_0=\sqrt{2}$.

a) $a_0=1$ s'obtient directement, puis on obtient avec la procédure $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=2$.

b) On a $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$, d'où $a_1=2$, et, $x_2=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)-2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1=x_1$.

À partir de $n=1$, la suite (x_n) est stationnaire, donc la suite (a_n) aussi.

c) Ma vieille version de Maple renonce bien avant $n=30$!

```
>  an(x0,11);
```

$$\operatorname{floor}\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}-2}-2}-2}-2}-2}-2}-2}-2}-2}-2}\right)$$

C'est l'accumulation du calcul exact qui pose problème ici…

En passant en calcul approché, ce qui nécessite de modifier la procédure, pour $n = 30$, Maple donne ici 1… C'est dû à l'accumulation d'erreurs d'arrondis.

Le fonctionnement d'une calculatrice, ou de Maple diffère ici selon qu'on est en calcul exact ou en calcul approché…

Il ne s'agit pas ici des limites des calculatrices, ou de Maple, mais des limites du calcul approché !

d) Maintenant, $x_0 = \sqrt{3}$, donc $a_0 = 1$, $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, $a_1 = 1$,

$$x_2 = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1,\ a_2 = 2,\ x_3 = \frac{1}{\left(\sqrt{3}+1\right)-2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = x_1.$$

À partir de ce moment, $x_{2n} = x_2$, sauf pour $n = 0$, et $x_{2n+1} = x_1$ par une récurrence facile à établir.

À partir de $n = 1$, la suite (x_n) est donc périodique de période 2, $a_{2n} = 2$ et $a_{2n+1} = 1$.

II.C.3) a) On a des sommes et des produits d'entiers naturels, donc les p_n et les q_n sont bien des entiers naturels. Il ne reste qu'à vérifier le caractère strictement positif.

Vérification initiale

$p_1 > 0$, et d'autre part $a_1 > 0$, donc $q_1 > 0$.

Hérédité

On l'admet jusqu'au rang n, on le montre au rang $n+1$: $a_{n+1}p_n > 0$, donc $p_{n+1} > 0$, de même, $a_{n+1}q_n > 0$, donc $q_{n+1} > 0$.

b) Pour $n \geqslant 2$, $a_n q_{n-1} \geqslant q_{n-1}$ et $q_{n-2} \geqslant 1$ donnent $q_n > q_{n-1}$.

La suite est strictement croissante et $q_1 \geqslant 1$, par récurrence facile, $q_n \geqslant n$.

c) *Vérification initiale*

$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) - a_0 a_1 = 1 = (-1)^0$.

Hérédité

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (a_{n+1}p_n + p_{n-1})\, q_n - p_n\,(a_{n+1}q_n + q_{n-1}) = p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}$$
$$= -\,(p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n) = (-1)^n$$

d) On va encore montrer ce résultat par récurrence.

Vérification initiale

$$\frac{p_0 + p_1 x_2}{q_0 + q_1 x_2} = \frac{a_0 + (a_0 a_1 + 1)\dfrac{1}{x_1 - a_1}}{1 + a_1\dfrac{1}{x_1 - a_1}} = \frac{a_0\,(x_1 - a_1) + a_0 a_1 + 1}{x_1} = \frac{a_0 x_1 + 1}{x_1} = \frac{\dfrac{a_0}{x_0 - a_0} + 1}{\dfrac{1}{x_0 - a_0}}$$
$$= x_0$$

Hérédité

On va en fait montrer que la suite est constante, ici $n \geqslant 1$:

$$\frac{p_n + p_{n+1}x_{n+2}}{q_n + q_{n+1}x_{n+2}} - \frac{p_{n-1} + p_n x_{n+1}}{q_{n-1} + q_n x_{n+1}}$$
$$= \frac{p_n q_{n-1} + p_n q_n x_{n+1} + p_{n+1}q_{n-1}x_{n+2} + p_{n+1}q_n x_{n+1}x_{n+2}}{D}$$
$$- \frac{p_{n-1}q_n + p_n q_n x_{n+1} + p_{n-1}q_{n+1}x_{n+2} + p_n q_{n-1}x_{n+1}x_{n+2}}{D}$$
$$= \frac{(-1)^{n-1} + 0 \times x_{n+1} + (p_{n+1}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+1})\, x_{n+2} + (-1)^n\, x_{n+1}x_{n+2}}{D}$$
$$= \frac{(-1)^{n-1} + (p_{n+1}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+1})\dfrac{1}{x_{n+1} - a_{n+1}} + (-1)^n\, x_{n+1}\dfrac{1}{x_{n+1} - a_{n+1}}}{D}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(x_{n+1}-a_{n+1}) + (p_{n+1}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+1}) + (-1)^n x_{n+1}}{D'}$$
$$= \frac{(-1)^n a_{n+1} + p_{n+1}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+1}}{D'}$$
$$= \frac{(-1)^n a_{n+1} + (a_{n+1}p_n + p_{n-1})q_{n-1} - p_{n-1}(a_{n+1}q_n + q_{n-1})}{D'}$$
$$= \frac{(-1)^n a_{n+1} + a_{n+1}(p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n)}{D'} = \frac{(-1)^n a_{n+1} + a_{n+1}(-1)^{n-1}}{D'} = 0$$

Conclusion

On a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_0 = \dfrac{p_n + p_{n+1}x_{n+2}}{q_n + q_{n+1}x_{n+2}}$

II.C.4) **a)** C'est, ici, facile à obtenir : $r_n - r_{n-1} = \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n}{q_n q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$

b) La série est clairement alternée car les q_k sont strictement positifs.

Le terme général tend vers 0 car $q_n \geqslant n$.

Enfin, la suite (q_n) étant strictement croissante, $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}\right|$ est décroissante.

Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum (r_n - r_{n-1})$ converge.

c) On sait que « la suite (r_n) converge » si et seulement si « la série $\sum (r_n - r_{n-1})$ converge ».

d) Dans le cas où $\sum u_n$ converge par application du critère spécial, $|s - s_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Ici, cela donne : $|s - s_n| \leqslant |r_{n+1} - r_n|$.

Mais $|s - s_n| = |(r - r_0) - (r_n - r_0)| = |r - r_n|$, on en déduit : $|r - r_n| \leqslant |r_{n+1} - r_n| = \dfrac{1}{q_n q_{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{q_n^2}$.

e) Au départ, les variables « simples » sont au rang 0, les « doubles » au rang 1.

Dans la boucles, les variables « simples » sont au rang $i-2$, les « doubles » au rang $i-1$, les « triples » au rang i.

```
rn:=proc(x0,n)
local p,pp,ppp,q,qq,qqq,i,a,aa,aaa,x;
a:=floor(x0);x:=x0;x:=1/(x-a);aa:=floor(x);
p:=a;q:=1;pp:=a*aa+1;qq:=aa;
for i from 2 to n do
   x:=1/(x-aa);aaa:=floor(x);
   ppp:=aaa*pp+p;qqq:=aaa*qq+q;
   p:=pp;pp:=ppp;q:=qq;qq:=qqq;a:=aa;aa:=aaa
od;
pp/qq
end;
```

```
> rn(sqrt(2),2);
```

$$\frac{7}{5}$$

```
> evalf(rn(sqrt(2),2));
```

$$1.400000000$$

```
> rn(sqrt(2),3);
```

$$\frac{17}{12}$$

```
> evalf(rn(sqrt(2),3));
```

$$1.416666667$$

En fait $r = x_0$, c'est même le but des fractions continues, avoir une bonne valeur approchée d'un irrationnel par des rationnels.

II.D -

II.D.1) On réécrit g comme on l'a fait dans la première partie :

$$u = \frac{\alpha}{\gamma} = \alpha, \quad v = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} = \beta - \alpha\delta = 1, \quad w = \frac{\delta}{\gamma} = \delta.$$

$$y_0 = g(x_0) = \alpha + \frac{1}{x_0 + \delta}$$

α est entier, donc rationnel.

$x_0 + \delta$ est irrationnel car, δ, entier, est rationnel et x_0 irrationnel.

$\dfrac{1}{x_0 + \delta}$ est donc irrationnel, de même que y_0.

II.D.2) $b_0 = E(y_0) = E\left(\alpha + \dfrac{1}{x_0 + \delta}\right) = \alpha$ car α est entier et $x_0 + \delta > 1$,

d'où : $y_1 = \dfrac{1}{y_0 - \alpha} = \dfrac{1}{g(x_0) - \alpha} = \dfrac{1}{\alpha + \frac{1}{x_0+\delta} - \alpha} = x_0 + \delta$

Ce qui donne $y_2 = f(y_1) = f(x_0) = x_1$ puisque δ est entier.

Par récurrence immédiate $y_n = x_{n-1}$, et donc $b_n = a_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$.

II.E -

II.E.1) Si $\Delta = n^2$, alors $(\delta + \alpha)^2 + 4 = n^2$ qu'on réécrit : $(n - \delta - \alpha)(n + \delta + \alpha) = 4$.

On a donc deux entiers distincts, dont l'un au moins est positif, et dont le produit est 4.

C'est donc 1 et 4.

Leurs somme est donc $2n$ d'un coté, et 5 de l'autre. D'où $n = 5/2$, qui n'est pas un entier.

De là à pouvoir en *déduire* que $\sqrt{\Delta}$ est un irrationnel, l'énoncé est ambigu : il faut l'admettre.

II.E.2) Le discriminant de cette équation du second degré est bien $\Delta > 0$.

On a donc deux racines réelles distinctes : $\dfrac{\alpha - \delta \pm \sqrt{\Delta}}{2}$.

Ces deux racines sont irrationnelles car $\sqrt{\Delta}$ est un irrationnel et les autres nombres sont entiers.

Leur produit $-\alpha\delta - 1$ est strictement négatif. Une des racines est strictement positive, l'autre strictement négative.

La racine strictement positive est : $z_0 = \dfrac{\alpha - \delta + \sqrt{\Delta}}{2}$.

II.E.3) $g(z_0) = \alpha + \dfrac{1}{z_0 + \delta} = \alpha + \dfrac{1}{\dfrac{\alpha - \delta + \sqrt{\Delta}}{2} + \delta} = \alpha + \dfrac{2}{\alpha + \delta + \sqrt{\Delta}} = \dfrac{\alpha^2 + \alpha\delta + \alpha\sqrt{\Delta} + 2}{\alpha + \delta + \sqrt{\Delta}}$

D'autre part, $z_0 = \dfrac{\alpha - \delta + \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{\left(\alpha - \delta + \sqrt{\Delta}\right)\left(\alpha + \delta + \sqrt{\Delta}\right)}{2\left(\alpha + \delta + \sqrt{\Delta}\right)} = \dfrac{\left(\alpha + \sqrt{\Delta}\right)^2 - \delta^2}{2\left(\alpha + \delta + \sqrt{\Delta}\right)}$

$$= \frac{\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\Delta} + (\delta + \alpha)^2 + 4 - \delta^2}{2\left(\alpha + \delta + \sqrt{\Delta}\right)} = \frac{2\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\Delta} + 2\alpha\delta + 4}{2\left(\alpha + \delta + \sqrt{\Delta}\right)} = \frac{\alpha^2 + \alpha\delta + \alpha\sqrt{\Delta} + 2}{\alpha + \delta + \sqrt{\Delta}} = g(z_0)$$

On a bien : $g(z_0) = z_0$.

II.E.4) $g(z_0)$ et z_0 ont le même développement puisqu'ils sont égaux et aussi un développement décalé d'un rang compte tenu du **II.D.2**).

Leur développement en fraction continue est donc constant à partir du rang 1.

II.E.5) $\sqrt{p^2 + 1}$ est la solution strictement positive de $x^2 - p^2 - 1 = 0$.

On prend $\alpha = \delta = p$ au **II.E.2**), c'est donc le z_0 de cette équation.

Son développement en fraction continue est donc constant à partir du rang 1.